DS DE MATHéMATIQUES N°3

1 BIO 1 - LE 5/12/2012 - 3H

Nota : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements et les énoncés des théorèmes entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que le polynôme X^2+2 divise $X^4+X^3+aX^2+bX+2$?

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer tous les polynômes réels $P(X) \in \mathbb{R}(X)$ tels que

$$XP(X+1) = (X+2)P(X-1)$$

(1) Trouver les polynômes constants solutions du problème.

(2) On suppose maintenant que $deg(P) \geq 1$ et que P est solution du problème.

- (a) Montrer que $\alpha = -1$ est racine de P.
- (b) Montrer que si α est racine de P et $\alpha \neq -1$, alors $\alpha - 2$ est racine de P.
- (c) Montrer que si α est racine de P et $\alpha \neq -1$, alors $\alpha + 2$ est racine de P.
- (d) Montrer que si α est racine de P et $\alpha > -1$, $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha + 2k$ est racine de P.
- (e) Montrer que si α est racine de P et $\alpha < -1$, $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha - 2k$ est racine de P.
- (f) En déduire que si α est racine de P, alors $\alpha = -1$.
- (g) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $P(X) = \lambda(X+1)$.

Problème

Le but de cet exercice est de déterminer les entiers positifs n tels que

$$P_n(X) = X^{n+1} - X(X+1)^n + (X+1)^n - X^n + X - 1 \tag{1}$$

soit divisible par $Q(X) = X^3 - 1$. C'est-à-dire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles il existe un polynôme $R_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q(X)R_n(X)$.

(1) Déterminer les racines du polynôme Q.

(2) Considérons le cas $n = 2k$. Montrer alors que deux des racines de Q ne sont pas racine de P_n.

On pose dans la suite $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

(3) Trouver les valeurs de k telles que $j^{2k+1} = j$.

(4) Trouver les valeurs de k telles que $j^{2k+1} = j^2$

(5) En déduire les valeurs de k telles que si $n = 2k+1$, alors les racines de Q sont racines de P_n.

(6) Répondre à la question : quels sont les entiers positifs n tels que

$$P_n(X) = X^{n+1} - X(X+1)^n + (X+1)^n - X^n + X - 1 \tag{2}$$

soit divisible par $Q(X) = X^3 - 1$.

Exercice de Probabilités

Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\Omega)$ la tribu des événements constitué de foutes les parties de Ω et la probabilité P définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}, P(\{\omega_3\}) = x$ et $P(\{\omega_4\}) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne l'événement contraire (son complémentaire) par $\overline{C}$.

(1) Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?

(2) On donne $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité P .

(3) Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?

(4) On pose $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ (cet ensemble s'appelle la différence symétriquede A et B). Calculer $P(A\Delta B|B)$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A\Delta B$ sachant B réalisé.