DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N^{0}4

1 BIO 1 - 9/01/2013

Exercice 1

On définit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+5}{2u_n} \end{cases}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$$

(1) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $v_{n+1} = v_n^2$. En déduire la relation $v_n = v_0^{(2^n)}$ pour tout $n \geq 0$.
(2) Montrer que $v_0 = \frac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ et en déduire la majoration $|v_0| < \frac{1}{16}$. Déterminer alors la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 2

(1) Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
(2) Déterminer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telle que $v_0 = 1$, $v_1 = i$, $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 5v_n$.

Exercice 3

Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par:

$$u_n = \frac{(n^2+1)\ln n - n\sqrt{n^2+3} - \cos(n^2)}{e^{-n} + \ln(n^5) - 3n} \tag{1}$$

$$v_n = \frac{3+2n}{1+n}; \tag{2}$$

$$w_n = n\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \qquad a \in \mathbb{R}_+ \tag{3}$$

(On utilisera les théorèmes usuels sur les limites et les limites connues sans revenir à la définition en ϵ, N_ϵ)

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
(2) Soit $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
(3) Montrer que $a_0 < a_2 < a_3 < a_1$.
(4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_2 < a_{2n} < a_{2n+2} < a_{2n+3} < a_{2n+1}.$$

(5) Montrer que pour $n \geq 2$:

$$\left|a_{n+2} - a_{n+1}\right| < \frac{1}{a_2^2}\left|a_{n+1} - a_n\right|.$$

(6) Montrer que $0 < \frac{1}{a_2^2} < 1$.
(7) Montrer que $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
(8) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

(1) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de 1 on a l'égalité :

$$\frac{z^4-1}{z-1} = z^3 + z^2 + z + 1 \tag{4}$$

(On vous demande une démonstration: pas de dire que c'est vrai parce que vous le savez!)

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

(3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^3 + \left(\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^2 + \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} + 1 = 0. \tag{5}$$

Exercice 6: Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $(n+1)$ nombres complexes (resp. réels) distincts $x_1, \ldots, x_{n+1}$ et $n+1$ nombres complexes (resp. réels) quelconques $y_1, \ldots, y_{n+1}$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients complexes (resp. réels) de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in [1, n+1]_{\mathbb{N}}$ on ait:

$$P(x_i) = y_i. \tag{6}$$

(1) Montrer que le polynôme:

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(y_i \prod_{1 \leq i \leq n+1, i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \right) \tag{7}$$

répond au problème.

Ce Polynôme s'appelle le Polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux x_i et aux y_i.

(2) Montrer que c'est le seul polynôme répondant au problème.

(3) *Application:* Déterminer le polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(1) = 1,\ P(2) = 2,\ P(3) = 3,\ P(4) = 4. \tag{8}$$