DS DE MATHéMATIQUES N°5

1 BIO 1 - 13/02/2013

Nota: La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements et les énoncés des théorèmes entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit F le sous ensemble de $\mathbb{R}^5$ défini par:

$$\begin{cases} x - 2y + u = 0 \\ 5x + t - u = 0 \\ 13x + 4y + 3t - 5u = 0. \end{cases}$$

(c'est à dire que F est l'ensemble des points (x, y, z, t, u) qui vérifient le système ci dessus.)

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$

(2) Déterminer une base de F et un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.

Problème

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit α un réel donné, on considère f_α l'endomorphisme de E tel que:

$$f_\alpha(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -n^2 x & & \\ & -\alpha y & +(\alpha - n^2)z \\ & y & -(1+n^2)z \end{pmatrix}.$$

1)a) Déterminer le rang de f_α suivant les valeurs de α.

b) Déterminer le noyau et l'image de f_α suivant les valeurs de α. On précisera dans tous les cas une base et la dimension du noyau et de l'image de f_α.

2) Déterminer en fonction de α pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme $f_\alpha - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif.

3) On suppose que $\alpha = n^2 - 1$.

a) Déterminer le noyau de $f_{n^2-1} + n^2 Id_E$ en précisant une base et sa dimension.

b) Déterminer une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ de E telle que:

$$f_{n^2-1}(v_1) = -n^2 v_1;$$
$$f_{n^2-1}(v_2) = -n^2 v_2;$$
$$f_{n^2-1}(v_3) = v_2 - n^2 v_3.$$

On choisira les vecteurs v_1, v_2 et v_3 le plus simplement possible.

c) Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit (X, Y, Z) les coordonnées de e dans la base $\mathcal{V}$, donnez une relation entre (x, y, z) et (X, Y, Z).

4) On suppose que $\alpha \neq n^2 - 1$.

a) Déterminer le noyau de $f_\alpha + n^2 Id_E$ en précisant une base et sa dimension.

b) Déterminer le noyau de $f_\alpha + (\alpha + 1) Id_E$ en précisant une base et sa dimension.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que:

$$f_a(e_1) = -n^2 e_1; \qquad f_a(e_2) = -n^2 e_2; \qquad f_a(e_3) = -(\alpha + 1) e_3.$$

Donner une telle base.

e) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

f) Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit (X', Y', Z') les coordonnées de e dans la base $\mathcal{B}$, donnez une relation entre (x, y, z) et (X', Y', Z').

Exercice "bonus"

On se propose d'étudier la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases} \tag{1}$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
(2) étudier le sens de variations de $f(x) = \sqrt{2 + x}$ et le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
(3) Dessiner une courbe sommaire de $y = x$ et $y = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
(4) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(5) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
(6) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ si elle existe.