CORRIGé DU PROBLèME DU DS DE MATHÉMATIQUES N°5

1 BIO 1

(1) Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E$ il faut résoudre :

$$f_\alpha(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n^2x & & & = & a \\ & -\alpha y & +(\alpha - n^2)z & = & b \\ & y & -(1+n^2)z & = & c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n^2x & & = & a \\ & \big((\alpha - n^2) - \alpha(1+n^2)\big)z & = & b + \alpha c \\ y & -(1+n^2)z & = & c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n^2x & & = & a \\ & -(1+\alpha)n^2z & = & b+\alpha c \\ y & -(1+n^2)z & = & c \end{cases}$$

Comme $n \neq 0$, on a deux cas :

<u>Premier cas : $\alpha \neq -1$</u> alors le système précédent est un système de Cramer donc f_α est bijective et on a :

$$rang(f_\alpha) = 3. \tag{1}$$

Dans ce cas :

$$Ker(f_\alpha) = \{0_E\} \qquad dim(Ker(f_\alpha)) = 0 \qquad \text{base } \emptyset. \tag{2}$$

D'autre part :

$$Im(f_\alpha) = E \qquad dim(Im(f_\alpha)) = 3 \qquad \text{base : par exemple la base canonique de } E = \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

<u>Second cas : $\alpha = -1$</u>

Le système devient :

$$\begin{cases} -n^2x & & = & a \\ & 0 & = & b-c \\ y & -(1+n^2)z & = & c \end{cases}$$

On en déduit :

$$Im(f_\alpha) = \Big\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E \,/\, b-c=0 \Big\} = \Big\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} \,/\, a,b \in \mathbb{R} \Big\} = Vect\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) \tag{4}$$

En particulier :

$$rang(f_\alpha) = dim(Im(f_\alpha)) = 2 \qquad \text{base de } Im(f_\alpha) : \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) \tag{5}$$

D'autre part pour le noyau on résout le système avec $a = b = c = 0$:

(6)

$$Ker(f_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \,/\, x = 0,\ y = (1+n^2)z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ (1+n^2)z \\ z \end{pmatrix} \,/\, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1+n^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En particulier :

(7) $$dim(Ker(f_\alpha)) = 1 \qquad \text{base de } Ker(f_\alpha) : \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1+n^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(2) L'endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie E n'est pas bijectif si et seulement si il n'est pas injectif. On doit donc résoudre :

$$(f_\alpha - \lambda Id_E)(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-n^2-\lambda)x & & & = & 0 \\ & (-\alpha-\lambda)y & +(\alpha-n^2)z & = & 0 \\ & y & (-(1+n^2)-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(n^2+\lambda)x & & = & 0 \\ & \big((\alpha-n^2)-(\alpha+\lambda)(1+n^2+\lambda)\big)z & = & 0 \\ y & -(1+n^2+\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(n^2+\lambda)x & & = & 0 \\ & -\big((1+\alpha)n^2+\lambda(1+n^2+\alpha)+\lambda^2\big)z & = & 0 \\ y & -(1+n^2+\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

Le noyau n'est pas nul si et seulement si le système n'est pas de Cramer c'est à dire si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul. Or $(1+\alpha)n^2+\lambda(1+n^2+\alpha)+\lambda^2 = (\lambda+n^2)(\lambda+1+\alpha)$:

(8) $-(n^2+\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = -n^2; (1+\alpha)n^2+\lambda(1+n^2+\alpha)+\lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = -n^2 \text{ ou } \lambda = -(1+\alpha).$

Donc les valeurs de λ pour lesquelles $f_\alpha - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif si et seulement si :

(9) $$\lambda \in \{-n^2, -(1+\alpha)\}.$$

(3) Maintenant $\alpha = n^2 - 1$

(a) D'après le système ci dessus :

(10) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f_{n^2-1} + n^2 Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x & & = & 0 \\ & 0z & = & 0 \\ y & -z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z$$

D'où

(11) $$Ker(f_{n^2-1} + n^2 Id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix} \,/\, x, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En particulier :

(12) $$dim(Ker(f_{n^2-1} + n^2 Id_E)) = 2 \qquad \text{base de } Ker(f_{n^2-1} + n^2 Id_E) : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Posons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente (v_1, v_2) base de $Ker(f_{n^2-1} + n^2 Id_E)$; donc pour $i = 1$ et $i = 2$:

(13) $$f_{n^2-1} + n^2 Id_E)(v_i) = 0_E \Leftrightarrow f_{n^2-1}(v_i) + n^2 v_i = 0_E \Leftrightarrow f_{n^2-1}(v_i) = -n^2 v_i.$$

Posons $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a :

$$f_{n^2-1}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -(1+n^2) \end{pmatrix} = v_2 - n^2 v_3. \tag{14}$$

(c) Notons $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Par le pivot de Gauss on obtient :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} v_1 &= \epsilon_2 \\ v_2 &= \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ v_3 &= \epsilon_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} v_1 &= \epsilon_1 \\ v_2 - v_3 &= \epsilon_2 \\ v_3 &= \epsilon_3 \end{cases} \end{aligned} \tag{15}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Xv_1 + Yv_2 + Zv_3 = e &= x\epsilon_1 + y\epsilon_2 + z\epsilon_3 \\ &= x\,v_1 + y(v_2 - v_3) + zv_3 \\ &= x\,v_1 + y\,v_2 + (-y+z)v_3 \end{aligned} \tag{16}$$

D'où par unicité des coordonnées dans une base :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y+z \end{pmatrix}. \tag{17}$$

(4) (a) En reprenant le système de la question 2) on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f_\alpha + n^2 Id_E) \Leftrightarrow &\begin{cases} 0x & & = 0 \\ & -\big((1+\alpha)n^2 - n^2(1+n^2+\alpha) + n^4\big)z & = 0 \\ y & -z & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 0x & & = 0 \\ & 0z & = 0 \\ y & -z & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\; y = z \end{aligned} \tag{18}$$

D'où

$$Ker(f_\alpha + n^2 Id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix} / x, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) \tag{19}$$

En particulier :

$$dim(Ker(f_\alpha + n^2 Id_E)) = 2 \qquad \text{base de } Ker(f_\alpha + n^2 Id_E) : \Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) \tag{20}$$

(b) Encore une fois :

(21)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(f_\alpha + n^2 Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -(n^2+\alpha+1)x & & = 0 \\ & -\big((1+\alpha)n^2 - (\alpha+1)(1+n^2+\alpha) + (\alpha+1)^2\big)z & = 0 \\ y & +(\alpha - n^2)z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & & = 0 \quad \text{car } n^2+\alpha+1 \neq 0 \\ & 0z & = 0 \\ y & +(\alpha-n^2)z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = (n^2-\alpha)z \end{cases}$$

D'où

(22) $$Ker(f_\alpha + (1+\alpha)Id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ (n^2-\alpha)z \\ z \end{pmatrix} \,/\, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ n^2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En particulier :

(23) $$dim(Ker(f_\alpha + (1+\alpha)Id_E)) = 1 \qquad \text{base de } Ker(f_\alpha + (1+\alpha)Id_E) : \left(\begin{pmatrix} 0 \\ n^2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Posons $e_1 = v_1 = \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = v_2 = \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ n^2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} = (n^2-\alpha)\epsilon_2 + \epsilon_3$.

Alors comme à la question 3)b) :

(24) $$\begin{aligned} e_1,\, e_2 \in Ker(f_\alpha + n^2 Id_E) &\Leftrightarrow f_\alpha(e_1) = -n^2 e_1 \text{ et } f_\alpha(e_2) = -n^2 e_2; \\ e_3 \in Ker(f_\alpha + (\alpha+1)Id_E) &\Leftrightarrow f_\alpha(e_3) = -(\alpha+1)e_3. \end{aligned}$$

(d) On a :

(25) $$\begin{cases} e_1 & = \epsilon_1 \\ e_2 & = \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ e_3 & = (n^2-\alpha)\epsilon_2 + \epsilon_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 & = \epsilon_1 \\ e_2 - e_3 & = (1+\alpha-n^2)\epsilon_2 \\ (\alpha-n^2)e_2 + e_3 & = (1+\alpha-n^2)\epsilon_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 & = \epsilon_1 \\ \frac{1}{1+\alpha-n^2}(e_2 - e_3) & = \epsilon_2 \\ \frac{1}{1+\alpha-n^2}((\alpha-n^2)e_2 + e_3) & = \epsilon_3 \end{cases}$$

On en déduit ($1+\alpha-n^2 \neq 0$ par hypothèse) :

(26) $$\begin{aligned} Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 = e &= x\epsilon_1 + y\epsilon_2 + z\epsilon_3 \\ &= x\,e_1 + \frac{y}{1+\alpha-n^2}(e_2 - e_3) + \frac{z}{1+\alpha-n^2}((\alpha-n^2)e_2 + e_3) \\ &= x\,e_1 + \frac{1}{1+\alpha-n^2}\Big((y + (\alpha-n^2)z)e_2 + (-y+z)e_3\Big) \end{aligned}$$

D'où par unicité des coordonnées dans une base :

(27) $$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y+(\alpha-n^2)z}{1+\alpha-n^2} \\ \frac{-y+z}{1+\alpha-n^2} \end{pmatrix}.$$