Exercice 1 A et B étant deux propositions, compléter les énoncés équivalents à $A \Rightarrow B$:

(a) ...implique ....

(b) Pour que ...il suffit que ....

(c) Pour que ...il est nécessaire que ....

(d) Une condition nécessaire pour que ...est que ....

(e) Une condition suffisante pour que ...est que ....

Exercice 2 Les propositions suivantes sont elles vraies ? Sinon énoncer leur négation :

(1) $$\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5.$$

(2) $$\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5.$$

(3) $$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2.$$

(4) $$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N},\ y > x^2.$$

(5) $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x < y \leq z.$$

(6) $$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, (x+y)^2 - 2y = x^2 + y^2.$$

Exercice 3 Trois réels strictement positifs a, b, c satisfont aux conditions :

(7) $$abc > 1 \qquad \text{et} \qquad a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Démontrer que :

(a) aucun des 3 nombres n'est égal à 1.

(b) l'un des trois nombres (au moins) est inférieur à 1.

Exercice 4

(a) Factoriser l'expression $xy - x - y + 1$.

(b) Soient x et y deux réels strictement positifs. Démontrer que :

(8) $$x \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad y > 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x+y}{1+xy} \geq 1.$$

Exercice 5 Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E. Démontrer que :

(a) $((A \cup C) \subset (A \cup B)\ et\ (A \cap C) \subset (A \cap B)) \Rightarrow C \subset B$.

(b) $(A \subset (B \cap C)\ et\ (B \cup C) \subset A) \Rightarrow A = B = C$.

Exercice 6 A et B étant des parties données d'un ensemble E, résoudre l'équation d'inconnue X :

(9) $$A \cup X = B.$$

Exercice 7 Soient E et F deux ensembles et F une application de E vers F. Que signifient les propositions suivantes :

(10) $$\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x);$$

(11) $$\forall y \in F, \forall x \in E, y = f(x);$$

(12) $$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x);$$

(13) $$\exists x \in E, \forall y \in F, y = f(x).$$

Exercice 8 Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

(14) $$\text{si } x \text{ est pair, } f(x) = x + 3, g(x) = \frac{x}{2};$$

(15) $$\text{si } x \text{ est impair, } f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x+1}{2}.$$

f et g sont elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Déterminer $g \circ f$.

Exercice 9 Soient les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

(16) $$f(x, y) = (x + y, 3x + 2y) \text{ et } g(x, y) = (|x| + y, 3|x| + 2y).$$

(a) Démontrer que f est bijective et donner f^{-1}.

(b) Démontrer que g n'est ni injective ni surective.

Exercice 10 Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F.

(a) Démontrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{17}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B); \tag{18}$$

$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B \tag{19}$$

(b) Démontrer les équivalences suivantes :

$$(\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)) \Leftrightarrow f \text{ injective}; \tag{20}$$

$$(\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B))) = B \Leftrightarrow f \text{ surjective}. \tag{21}$$

Exercice 11 Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G.

(a) Démontrer que

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective}; \tag{22}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}. \tag{23}$$

(b) On prend $E = F = G = \mathbb{N}$. Soit f et g des applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = n + 1; \tag{24}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ g(n) = n - 1 \text{ et } g(0) = 1. \tag{25}$$

(26)

f et g sont elles injectives ? surjectives ? Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ et déduire de cet exemple que si $g \circ f$ est surjective (resp. injective) on ne peut rien dire des propriétés de f (resp. g).

(c) Soit les ensembles E, F, G, H et les applications f de E vers F, g de F vers G et h de G vers H. Démontrer en utilisant a) que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont.

(d) On suppose $H = E$ et on pose $\alpha = f \circ h \circ g$, $\beta = g \circ f \circ h$, $\gamma = h \circ g \circ f$. Démontrer que si α et β sont injectives et γ surjective alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 12 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Soit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\longmapsto (X \cap A, X \cap B). \end{aligned} \tag{27}$$

(a) Démontrer que : f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

(b) Démontrer que : f surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

(c) A quelle condition f est-elle bijective ? Expliciter alors f^{-1}.

Exercice 13 Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F. On pose :

$$\overline{f} : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) \tag{28}$$

$$X \longrightarrow \overline{f}(X) := f(X) \tag{29}$$

Montrer que :

(a) $\overline{f}$ injective $\Leftrightarrow f$ injective.

(b) $\overline{f}$ surjective $\Leftrightarrow f$ surjective.
