Exercice 1 Mettre sous la forme $x + iy$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}; \tag{1}$$

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}; \tag{2}$$

$$\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}. \tag{3}$$

Exercice 2 Trouver les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$7 + 24i; \tag{4}$$

$$4ab + 2(a^2 - b^2)i \quad (a, b \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations en x suivantes :

$$x^2 - (5 - 14i)x - 2(5i + 12) = 0; \tag{6}$$

$$x^2 - (3 + 4i)x - 1 + 5i = 0. \tag{7}$$

Exercice 4 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations en z suivantes :

$$|z| + z = a + bi; \tag{8}$$

$$|z| - z = c + di. \tag{9}$$

Exercice 5 Etablir les égalités suivantes :

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + i\sin\frac{5\pi}{84}\right); \tag{10}$$

$$(1-i)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{60} + i\sin\frac{7\pi}{60}\right); \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}. \tag{12}$$

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}; \tag{13}$$

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}. \tag{14}$$

Exercice 7 Soient $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \cos(\alpha + k\beta); \tag{15}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \sin(\alpha + k\beta). \tag{16}$$

Exercice 8 Soit ϵ une racine n-ième de l'unité ; calculer :

$$A = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1}. \tag{17}$$

Exercice 9 On pose $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Considérons le système :

$$(S)\begin{cases} x + y + z &= a \\ x + jy + j^2z &= b \\ x + j^2y + jz &= c \end{cases} \tag{18}$$

(a) Résoudre ce système.

(b) Comment choisir a, b, c pour que x, y, z soient réels ?

Exercice 10 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que :

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1; \tag{19}$$

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{5}. \tag{20}$$

Exercice 11 Trouver le module et l'argument de $z = (\sqrt{3}+i)^n$.

Exercice 12 Trouver le module et l'argument de $z = 1 - i\tan\theta$.

Exercice 13 Calculer les racines carrées de $2 - 3i\sqrt{5}$.

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - z + i + 1$.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 16 Soient a, b, c des réel. Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$az + b\overline{z} + c = 0. \tag{21}$$

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^5 = \overline{z}$.

Exercice 18 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer l'identité suivante, appelée "identité du parallélogramme", et en donner une interprétation géométrique :

$$2(|z|^2 + |z'|^2) = |z+z'|^2 + |z-z'|^2. \tag{22}$$

Exercice 19 Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tels que $zz' = z''^2$. Montrer

$$\left|\frac{z+z'}{2} + z''\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - z''\right| = |z| + |z'|. \tag{23}$$

Exercice 20 Soient a et $b \neq 0$ deux réels.

Donner une expression simple des sommes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb). \tag{24}$$

En déduire la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(ka)$.

Exercice 21 Soient a et $b \neq 0$ deux réels.

Donner une expression simple des sommes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(a+kb) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(a+kb). \tag{25}$$

En déduire la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k}$.