Exercice 1 [$*$]$\phi \in \mathbb{R}$. Montrer que pour

(a) $P(X) = X^n \sin\phi - X \sin n\phi + \sin(n-1)\phi$.

(b) $P(X) = X^{n+1}\cos(n-1)\phi - X^n \cos n\phi - X\cos\phi + 1$

et $Q(X) = X^2 - 2X\cos\phi + 1$ il existe un polynôme $R(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = R(X)Q(X)$.

Indication : On pourra se placer d'abord dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{C}[X]$ on considère les polynômes :

$$f(X) = aX^2 + bX + c \text{ et } \phi(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma.$$

Peut-on trouver des nombres complexes a, b, c, α, β et γ tels que $f[\phi] = \phi[f]$.

Exercice 3 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $P(X) = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$ prend des valeurs entières ainsi que toutes ses dérivées pour $X = 0$ et $X = \frac{a}{b}$.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 + 12x = 12$. (On peut poser $x = u + v$ et se ramener à une équation du second degré en choisissant une valeur judicieuse pour uv.)

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(1) $$x^4 - 2x^2 - 15 = 0$$

(2) $$x^4 - x^2 + 4 = 0.$$

Exercice 6 Trouver les racines de

(a) $P(X) = X^4 + 16$;

(b) $P(X) = X^4 + X^2 + 1$.

Puis factorisez les dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 Calculer le produit $P_n(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n}) = \prod_{k=0}^{n}(1+X^{2^k})$

Exercice 8 Soient n un entier strictement positif et α un nombre réel. Montrer qu'il existe un seul polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) + \alpha P_n'(X) = X^n$.

Exercice 9 Pour tout $x > 0$ et pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, soit $z = xe^{i\theta}$. En calculant de deux manières la partie réelle de $A(z) = 1 + z + \cdots + z^{n-2}$, montrer que, pour tout entier $n > 2$, il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{C}(X)$ tel que si

$$P(X) = X^n \cos(n-2)\theta - X^{n-1}\cos(n-1)\theta - X\cos\theta + 1$$

on ait $P(X) = Q(X)\big(X^2 - 2X\cos\theta + 1\big)$.

Exercice 10 Pour quelles valeurs de m le polynôme $P_m = (X+1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par $Q = X^2 + X + 1$?

Exercice 11 [$**$] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que le polynôme $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - X$; c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(P(X)) - X = Q(X)\big(P(X) - X\big)$.

Exercice 12 Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{2p+1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $2p+1$ à coefficients réels tels que pour tout $0 \le k \le 2p+1$, $P^{(k)}(0) < 0$.

(a) Montrer que $P(X)$ admet au moins une racine réelle.

(b) Montrer que toutes ses racines réelles sont strictement négatives.

Exercice 13 Soit P un polynôme réel de degré n ayant n racines distinctes $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ classées dans l'ordre croissant.

(a) Montrer que le polynôme dérivé P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

(b) En introduisant la fonction $f(x) = e^x P(x)$, montrer que le polynôme $P + P'$ a n racines réelles.

Exercice 14

(a) Soit le polynôme $P(X) = X^{2n} - 1$. Décomposer $P(X)$ en un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) (i) En exprimant d'une autre manière $X^{2n} - 1$, donner une expression simple de :

$$p_1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

(ii) Application : Calculer la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$

Exercice 15 En établissant une relation entre P et P' montrer que le polynôme :

$$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^{2n}}{(2n)!}$$

n'admet pas de racines réelles.

Exercice 16 Déterminer p et q tels que $X^5 + pX + q$ ait une racine d'ordre ≥ 3.

Exercice 17 Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $X^3 + pX + q$ soit divisible par $X^2 + mX - 1$.

Exercice 18 Montrer que 1 est racine double de $P(X) = X^{n+1} - X^n - X + 1$.

Exercice 19 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $deg(P) \geq 2$. Montrer que les racines du polynôme dérivé P' sont dans l'enveloppe convexe **C** des racines de P.

Exercice 20 Donner les conditions sur $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $X^2 - pX + q$ ait deux racines de module 1.

Exercice 21 $*$Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 22 $*$Soit $k > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, admettant n zéros réels distincts ou confondus.
Montrer que $Q = kP + XP'$ possède la même propriété.

Exercice 23 $*$ Déterminer le polynômes P_n définie par la relation de récurrence : $P_{n+2} = -XP_{n+1} - P_n$ et les conditions initiales $P_0 = 1$, $P_1 = -X$. Calculer les racines des P_n.

Exercice 24 $*$ Prouver que $X^5 - X^2 + 1$ n'admet aucune racine rationnelle et une unique racine réelle.
