Exercice 1 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $x \in [a, b]$

(a) Démontrer que pour tout entier n il existe un entier naturelk_n unique vérifiant $0 \leq k_n \leq 2^n$ et

$$a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leq x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n}.$$

(b) En déduire que tout élément de l'intervalle $[a, b]$ est limite d'une suite (u_n) où les u_n sont de la forme :

$$u_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n} \qquad \text{avec } 0 \leq k_n \leq 2^n.$$

Exercice 2 Etudier la suite : $u_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{5^k}$.

Exercice 3 Etudier la suite $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 4 Trouver (si elle existe) la limite de :

$$u_n = \frac{\ln\Big(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\Big)}{\ln\Big(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\Big)} \tag{1}$$

Exercice 5 Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $(n \geq 1)$:

$$v_n = \frac{\ln^2 n + \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2}}{\cos^2(n^3) - 2n^4 + n!}$$

En déduire sa limite.

Exercice 6 Soients $u_O > 0$, $v_0 > 0$, $u_0 \geq v_0$ et $0 < q < p$. On pose :

$$u_{n+1} = \frac{p\,u_n + q\,v_n}{p+q} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{q\,u_n + p\,v_n}{p+q}.$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 7 [Suites homographiques]

(a) Etudier la nature de la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{u_n + 4}.$$

(b) Montrer que les valeurs à éviter pour u_0 pour que la suite soit définie forment une suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3-4a_n}{a_n-2} \\ a_0 = -4 \end{cases}$$

Exercice 8 Trouver la limite si elles existent des suites :

(a) $u_n = \sqrt[n]{n}$.

(b) $v_n = \sqrt[n]{n!}$.

(c) $w_n = \sqrt[n^2]{n!}$.

Exercice 9 Etudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3+2x-1}{3}$.
Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Discuter la nature de (u_n) suivant les valeurs de u_0.

Exercice 10 Etudier la suite $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}$ (2 intervient n fois).

Exercice 11 $*$ On définit la suite (u_n) par $u_1 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$. Etudier cette suite.

Exercice 12 Etudier la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$; $u_{n+2} = (u_{n+1})^{\frac{1}{2p+1}} + (u_n)^{\frac{1}{2p+1}}$ où p est un entier non nul fixé.
Pour cela :

(a) Montrer que (u_n) est croissante.

(b) Chercher les limites possibles l de (u_n).

(c) Montrer que (u_n) est majorée par un de ces réels l.

Exercice 13 p étant un entier naturel on considère la suite de terme général :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}.$$

(a) Montrer que si $p \geq 2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(On cherchera un encadrement simple de u_n.)

(b) Dans cette question et la suivante, on prend $p = 1$ montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée. En déduire qu'elle converge.

(c) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}$$

En utilisant l'inégalité (à montrer) : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^3}{3} \leq \sin x \leq x$ montrer que (v_n) converge vers la même limite que (u_n)

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n - \ln(n)$

(a) Etudier les variations de (u_n).

(b) Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

Exercice 15

(a) Démontrer en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \to \ln(x)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ona, \frac{1}{n+1} < \ln(\frac{n+1}{n}) < \frac{1}{n}$$

(b) Déterminer en utilisant la question précédente que la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(c) On considère la somme :

$$S_{n,p} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

(i) Utiliser la première question pour trouver un encadrement de $S_{n,p}$.

(ii) En déduire la limite de $S_{n,p}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 On considère la suite (u_n) telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{2-n}{2}$

(a) Calculer $S_11 = u_0 + \cdots + u_{11}$.

(b) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente et donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

(c) On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Calculer S_n en fonction de n. Calculer sa limite en $+\infty$.

Exercice 17 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

(a) Montrer qu'elles sont adjacentes.

(b) Soit l la limite commune de ces deux suites.

On suppose que l est rationnel : $l = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$.

(i) Démontrer qu'il existe un réel θ $(0 < \theta < 1)$ tel que

$$l = u_q + \frac{\theta}{qq!}.$$

(ii) Montrer que $l - u_q$ est une fraction rationnelle de dénominateur $q!$.

(iii) En déduire que l'hypothèse l est rationnel est fausse.

En fait on a $l = e$ et on vient de montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 18 Soient a et b deus réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad \text{et} \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n}, \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (v_{n+1} - u_{n+1}) < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
(On utilisera le fait que (u_n) est croissante.)
En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On appelle l leur limite commune.

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n v_n = ab$. En déduire la valeur de l en fonction de a et b.

Exercice 19 On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{1 + 2u_n}.$$

(a) Montrer que (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$. Etudier les variations de (u_n).

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$.

(c) Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison.

(d) exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

(e) Chacune des suites (u_n) et (v_n) admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui laquelle ?

Exercice 20 On défint i les suites réelles (u_n) et (v_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2+5}{2u_n} \end{cases}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$$

(a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $v_{n+1} = v_n^2$. En déduire la relation $v_n = v_0^{2n}$ pour tout $n \geq 0$.

(b) Montrer que $v_0 = \frac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ et en déduire la majoration $|v_0| < \frac{1}{16}$. Déterminer alors la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 21 On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier naturel n=

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(a) Calculer u_1, u_2.

(b) Soit la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n\sqrt{2} - n.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(c) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.
La suite (u_n) converge-t-elle ?

(d) On considère la suite S_n de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n.$$

Calculer S_n en fonction de n.

Exercice 22 **Le paradoxe de Zénon** Le philosophe grec Zénon proposait le paradoxe suivant : “Achile ne rattrapera jamais la tortue qui marche devant lui” car auparavant il doit atteindre la place d’où est partie la tortue ; quand il y sera parvenu la tortue aura quitté cette place et aura elle-même progressé. Le raisonnement se répète ainsi indéfiniment ; la tortue sera toujours au devant d’Achile.

Ce raisonnement peut s’exprimer de la façon suivante : supposons qu’Achile et la tortue se déplacent sur une même droite dans le même sens, à des vitesses constantes respectivement égales à V et v ; à l’instant 0 on suppose qu’Achile est au point d’abcisse 0 et la tortue au point M_0 d’abcisse x_0. Soit t_0 le temps mis par Achile pour aller de O à M_0 ; pendant ce temps la tortue arrive au point M_1 d'abcisse x_1 etc. On définit ainsi une suite de points $M_n(x_n)$ et une suite de réels t_n tels que t_n désigne le temps mis par Achile pour aller de M_{n-1} à M_n et lorsque Achile est en M_n, la tortue est en M_{n+1}.

On définit une suite (y_n) par $y_0 = x_0$ et $y_n = x_n - x_{n-1}$ (si $n \geq 1$). Exprimer t_n en fonction de y_n et y_{n+1} en fonction de t_n. En déduire que les suites (t_n) et (y_n) sont des suites géométriques et déterminer leur raison.

Soit $T_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$ le temps mis par Achile au point M_n. Calculer T_n en fonction de n est du rapport $k = \frac{V}{v}$; montrer que (T_n) est convergente (on suppose $V > v$).

Conclure sur le paradoxe de Zénon.

Exercice 23 Le nombre d'Or

(a) Dans l'antiquité on considérait qu'un rectangle était harmonieux si sa longueur a était la moyenne géométrique entre sa largeur b et la somme de sa longueur et de sa largeur.

Déterminer la valeur du quotient $q = \frac{a}{b}$ pour un rectangle hramonieux ; q était appelé "nombre d'or". (*rappel : la moyenne géométrique de* $x, y \geq 0$ *est le réel* $\sqrt{xy}$.)

(b) On considère un rectangle harmonieux R_1 de longueur a_1 et de largeur b_1. A partir de R_1 on construit un rectangle R_2 en supprimant un carré de côté b_1. Calculer$a_1 - b_1$ en fonction de b_1 et en déduire que le rectangle R_2 ainsi obtenu est harmonieux ; on note sa longueur a_2 et sa largeur b_2.

(c) Par le procédé décrit au numéro précédent on construit une suite de rectangles harmonieux $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note a_n et b_n respectivement la longeur et la largeur du rectangle R_n.

(i) Montrer que les suites a_n et b_n sont des suites géométriques dont on déterminera la raison ; en déduire l'expression de a_n en fonction de a_1 et celle de b_n en fonction de n et de b_1.

(ii) On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du rectangle R_n ; calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de $\mathcal{A}_1$ et de n.

Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = q\mathcal{A}_1$

Exercice 24 Suite de Fibonacci. On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \end{cases}$$

(a) (i) Calculer les 10 premiers termes de la suite.

(ii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

(iii) Montrer que (F_n) est strictement croissante pour $n \geq 2$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n \geq n - 1$. En déduire que (F_n) est divergente.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

(i) Calculer les 10 premiers termes de cette suite. Qu'en déduit-on intuitivement sur sa convergence ?

(ii) Montrer que :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}. \end{cases}$$

(iii) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Construire les points M_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathcal{C}$ d'abcisse u_n ; qu'en déduit-on intuitivement sur la convergence de (u_n) ?

(iv) Soit l la solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$. Calculer l.

(i) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} - lF_n = \frac{(-1)^n}{l^n}$.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - l = \frac{(-1)^n}{F_n l^n}.$$

(ii) Déduire à l'aide de la question (aiii) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Vérifier que la limite obtenue correspond aux résultats intuitifs des questions précédentes.

Exercice 25 Etude de la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x \in \mathbb{R}$.

(a) on suppose que $x > 1$. et on pose $x = 1+a$. Montrer par reccurence que pour $n \geq 2$ on a $(1+a)^n > 1+na$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) On suppose $0 < x < 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(c) Etudier les cas $x = 1$ et $x = 0$.

Exercice 26 Soient a et b deux réels strictement positifs. Etudier la suite
$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$
Indication : On pourra considérer les cas $a > b > 0$, $a = b > 0$ et $0 < a < b$ et factoriser le numérateur et le dénominateur par a^n ou b^n suivant le cas.

Exercice 27 Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit x un élément de l'intervalle fermé $[a, b]$.

(a) Montrer que pour tout entier n il existe un entier k_n unique vérifiant $0 \leq k_n \leq 2^n$ et :
$$a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leq x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n}.$$

(b) En déduire que tout élément x de l'intervalle $[a, b]$ est limite d'une suite (u_n) où les u_n sont de la forme
$$u_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n} \text{ avec } 0 \leq k_n \leq 2^n.$$

Exercice 28

(a) Soit (u_n) une suite de nombre réels. On suppose qu'il existe un nombre réel $k > 1$ et un entier n_0 tels que $u_{n_0} > 0$ et $u_{n+1} \geq k u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(b) Soit (v_n) une suite de nombres réels. On suppose qu'il existe un nombre réel k et un entier n_0 tels que $0 < k < 1$ et $|v_{n+1}| \leq k|v_n|$ si $n \geq n_0$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exercice 29 [*]Soient l un nombre réel et (u_n) une suite de nombre réels non nuls tels que :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$
On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs de l.

(a) On suppose que $0 \leq l < 1$. Démontrer qu'il existe un nombre réel k et un entier n_0 tel que :
$$-1 < k < 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k$$
pour tout entier $n \geq n_0$. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la limite de la suite u_n lorsque (u_n) lorsque $-1 < l \leq 0$.

(b) On suppose que $|l| > 1$, étudier la limite de la suite (u_n).

(c) Donner des exemples de suites convergentes et de suites divergentes telles que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

(d) Soient k un entier relatif et x un nombre réel non nul. Etudier la suite $(u_n) = \left(\frac{n^k}{x^n}\right)$.

Exercice 30 [**] Théorème de Césaro Soit (u_n) une suite de nombres réels convergent vers un nombre réel l. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (v_n) définie par :
$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$$
pour tout entier $n \geq 1$, est convergente et admet pour limite l.

(a) Soit ϵ un nombre réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$ on ait :
$$|u_p - l| + |u_{p+1} - l| + \cdots + |u_n - l| < n\frac{\epsilon}{2}.$$

(b) L'entier p étant celui trouvé précédemment, démontrer qu'il existe un entier q tel que pour tout entier $n \geq q$ on ait :
$$|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)| < n\frac{\epsilon}{2}.$$

(c) Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{+\infty} v_n = l$.

Exercice 31 Montrer que l'on a les relations suivantes :

(a) $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$

(b) $\ln n = o(n^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

(c) Soit $a > 1$ et $\alpha > 0$ Alors $n^\alpha = o(a^n)$.
