Remarque: Dans tous les exercices $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que

$$E_m = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x - y + 2z - 3t = m\} \tag{1}$$

soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
[Rép : m=0]

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient A, B, C trois sous espaces vectoriels de E tels que :

$$A \cap B = A \cap C \tag{2}$$

$$A + B = A + C \tag{3}$$

$$B \subset C. \tag{4}$$

Montrer que $B = C$

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^5$ on considére les vecteurs :

$$x_1 = (1, 0, 1, 1, 1), \qquad x_2 = (2, 1, 3, 0, 2), \qquad x_3 = (1, -1, 1, 1, 1). \tag{5}$$

Montrer qu'ils sont libres et les complêter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 4 Montrer que :

$$F = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + t = 0,\ y - z = 0,\ 3x + t = 0\Big\} \tag{6}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en trouver une base.

Exercice 5 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, vérifier que les vecteurs $A = (1, 2, -1, -2)$, $B = (2, 3, 0, -1)$, $C = (1, 3, -1, 0)$, $D = (1, 2, 1, 4)$ sont linéairement indépendants. Est-ce une base ? Calculer les coordonnées du vecteur $X = (7, 14, -1, 2)$ sur la base (A, B, C, D). C'est-à-dire trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $X = aA + bB + cC + dD$.

Exercice 6 Dans $V = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique déterminer suivant α le rang du systéme suivant : $a = (1, 1, \alpha)$ $b = (1, \alpha, 1)$ $c = (\alpha, 1, 1)$.

Exercice 7 Pour tout réel m on considére l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y + z, mx - 2y + mz, -x + y, -mx + my - mz)$$

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer la matrice de M dnas les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

(c) (i) Déterminer une base du noyau de f. Pour quelle valeur de m l'application f est-elle injective ?
 (ii) f est-elle bijective ?

(d) Déterminer une base de l'image de f.

Exercice 8 Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\begin{cases} x - 2y + u = 0 \\ 5x + t - u = 0 \\ 13x + 4y + 3t - 5u = 0. \end{cases}$$

(c'est-à-dire que F est l'ensemble des points (x, y, z, t, u) qui vérifient le système ci dessus.)
Déterminer une base de F et un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{C}^n$ et f un endomorphisme de E.
On dit qu'un vecteur a de E est cyclique pour f si et seulement si il existe un entier m tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), \ldots, f^m(a))$ soit génératrice dans E.

(a) Quelles sont les valeurs possibles pour m ?

(b) On suppose que a est cyclique pour f, montrer que $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g$ inversible et $f \circ g = 0$. Montrer que $rg(f) + rg(g) = dim(E)$.

Exercice 11 Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^tAA$.

Exercice 13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = (a_i b_j)$. Rang de A.

Exercice 14 Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

[On retranche la première ligne. Le rang est 2.]

Exercice 15 Déterminer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 16 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ tel que $AX = \lambda X$.

(b) Déterminer $E_\lambda = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X \right\}$. [On trouve $\lambda = 0, 2, 4$].

Exercice 17 Donner une base de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

Exercice 18 Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ a^2 x + y + az = 0 \\ ax + a^2 y + z = 0 \end{cases}$.

Exercice 19 Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = \mu \\ x + y + az + t = \mu^2 \\ x + y + z + at = \mu^3 \end{cases}$.

Exercice 20 Inverser en utilisant un systéme linéaire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2 \end{cases}$.

Exercice 22 Résoudre $\begin{cases} -cy + bz = \alpha \\ cx - az = \beta \\ -bx + ay = \gamma \end{cases}$.

Exercice 23 Résoudre le système $S = \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ -x - y + z + t = 2 \\ x + y - z - t = 3 \\ -3x + y - 3z - 7t = 4 \end{cases}$.

Exercice 24 Résoudre en discutant sur la valeur de m, le système $S = \begin{cases} x + y + (1-m) = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$

Exercice 25 Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels. Résoudre le système $S = \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$.

[En fonction de la parité de n. Si n est impair, on trouve $x_1 = a_1 - a_2 + \cdots$ et les autres expression se déduisent par permutation circulaire. Si n est pair il faut que $\sum (-1)^{i-1} a_i = 0$. Dans ce cas on peut prendre x_n pour paramètre et on trouve

$$x_1 + x_n = a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1}, \quad x_2 - x_n = a_2 - a_3 + \cdots - a_{n-1}, \quad x_{n-1} + x_n = a_{n-1}.]$$

Exercice 26 Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (x, y, z) \to (z, x - y, y + z)$ est un automorphisme.

Exercice 27 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E)/\mathrm{Im} f = \ker f$$

Exercice 28
Soit trois vecteurs non nuls x_i et un endomorphisme vérifiant $f(x_i) = a_i x_i$, avec les a_i distincts deux à deux. Montrer que les x_i sont libres.

Exercice 29 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence de

$$E = Im(f) \oplus Ker(f), \tag{7}$$

et

$$Imf = Imf^2. \tag{8}$$

Exercice 30 Soit f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que l'on a

$$Imf + Img = Kerf + Kerg = E.$$

Montrer que les sommes sont directes.
