Exercice 1 Ecrire à l'aide des opérations ensemblistes ($\cap, \cup$ prise du complémentaire,...) les événements suivants :

(a) L'un au moins des événements A, B, C est réalisé.

(b) L'un et l'un seulement des événements A ou B se réalise.

(c) A et B se réalisent mais pas C.

(d) Tous les événements A_n $n \geq 1$ se réalisent.

(e) Il y a une infinité des événements A_n $n \geq 1$ qui se réalisent.

(f) Seul un nombre fini des événements A_n, $n \geq 1$ se réalisent.

(g) Il y a une infinité des événements A_n $n \geq 1$ qui ne se réalisent pas.

(h) Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.

Exercice 2 Un oral de concours auquel se présentent 50 candidats se déroule de la manière suivante : l'examinateur dispose d'une boite contenant les 50 questions du programme, le premier candidat tire au hasard sa question dans la boite, le second tire au hasard parmi les 49 restantes... Un candidat à l'oral fait l'impasse sur une seule question. Y-a-t-il, pour lui un rang de passage préférentiel ?

Exercice 3 [Une urne de Pólia]Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : Si a un rang quelconque on obtient une boule rouge celle-ci est remise dans l'urne avant le tirage suivant et si a un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la mange !

(a) Quelle est la probabilité de tirer **une** boule blanche au cours des n premiers tirages ?

(b) Quelle est la probabilité de manger au moins une boule blanche au cours des n premiers tirages ?

(c) sachant qu'au cours des n premiers tirages on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée en dernier ?

Exercice 4 A Brasilia, au Brésil, l'exposition canine de fox à poils durs s'est achevée en mêlée confuse après la visite de la Générale -Présidente. Chacun des n propriétaires est reparti avec un chien saisi au hasard.

Calculer la probabilité pour que chacun des n cabots se retrouve avec un maitre différent que de celui qui l'a conduit à l'exposition.

Que devient cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 5 On considère un jeu de 32 cartes que l'on mélange. Quelle est la probabilité qu'aucun des rois de cœur ou de carreau ne se trouve à côté de l'un des as de cœur ou de carreau ?

Exercice 6 Montrer que si l'on ne tient pas compte des années bissextiles il y a plus d'une chance sur deux pour que sur un groupe de 23 personnes, deux de ces personnes soient nées le même jour.

Que dire d'un groupe de 22 personnes ?

Exercice 7 Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. On en tire 3 simultanément au hasard. Quelle est la probabilité que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

Exercice 8 Une loterie comporte n billets dont r sont gagnants ($1 \leq r \leq n$).

Un tirage a lieu toutes les semaines. Un joueur décide d'acheter m billets et de répartir ses achats sur 2 semaines. Il en achète s la première semaine et $m - s$ la seconde semaine.

(a) Calculer la probabilité $p(s)$ qu'il gagne au moins une fois.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de s $p(s)$ est-elle maximale ? Ce résultat vous étonne-t-il ?

Exercice 9 Un jeu de cartes comporte 32 cartes. On en choisit 8 au hasard qui forment une main.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un cœur ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux carrés ? (Un carré est un ensemble de 4 cartes de même hauteur).

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur et un roi exactement ?

Exercice 10 Grand-Père a trois bérets et une casquette. Quand il descend acheter sa baguette, il saisi un couvre chef au hasard. Sachant qu'il prend une fois sur trois une baguette moulée et que deux fois sur cinq il oublie de chausser ses souliers, calculer la probabilité de le voir remontre en charentaises, un béret sur la tête et une baguette non moulée sous le bras.

Exercice 11

(a) Soient A et B, 2 événements liés à un expérience aléatoire. Montrer que :

$$P(A \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup B) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 2^2 - 1. \tag{1}$$

(b) On cherche à généraliser le résultat précédent.

Soient $A_1, \dots, A_n$, n événements liés à une expérience aléatoire. On forme tous les n-uplets d'événements $(B_2, \dots, B_n)$ en posant soit $B_i = A_i$ soit $B_i = \overline{A}_i$. On note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des n-uplets ainsi obtenus. Montrer que :

$$\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\mathcal{I}_n} P(B_1 \cup \dots \cup B_n) = 2^n - 1. \tag{2}$$

Indication : On raisonnera par reccurence sur n.

Exercice 12 En Belgique on mange 2 types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi mes frites que consomment les Flamands, il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit flamand.

Exercice 13 [∗∗] La mercière de Saint-Martin-sur-Yvette joue avec ses boutons.

(a) Dans une boite à ouvrage, elle a mélangé v boutons verts avec r boutons rouges. Elle en prend un au hasard, puis elle le remet dans la boite avec c boutons de la même couleur. Elle recommence n fois ce processus.

Montrer que la probabilité de saisir un bouton vert la n^{me} fois est indépendante de n.

(b) Dans chacun des compartiments d'une boite à couture, la mercière mélange respectivement v_1 boutons verts avec r_1 boutons rouges et v_2 boutons verts avec r_2 boutons rouges. Elle saisit au hasard un bouton du premier compartiment pour le mélanger à ceux du deuxième, puis attrape au hasard un bouton du deuxième pour le mêler à ceux du premier. Elle prend alors un bouton au hasard dans le compartiment, calculer la probabilité pour qu'il soit vert.

Exercice 14 [∗] On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona-Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% pour que ce soit celle que Léonard à peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier qui se trompe un fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

Exercice 15 On lance m dés non truqués, puis on laisse de côté ceux qui amènent 6. On relance les autres, en laissant à nouveau de côté ceux qui ont amené 6, et ainsi de suite.

(a) On fixe un dé, et on note A_n, l'événement : "le dé est lancé au moins n fois". Calculer $P(A_n)$.

Indication : on étudiera attentivement les faces amenées par ce dé au cours des $n-1$ premiers lancers.

(b) Soit B_n l'événement : "on obtient la figure formée de m 6 en au plus n relances". Calculer $P(B_n)$.

(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 16 On lance m dés non truqués, puis on laisse de côté ceux qui amènent 6. On relanc les autres en laissant à nouveau de côté ceux qui ont amené 6, et ainsi de suite.

(a) On fixe un dé et on note A_n, l'événement : "le dé est lancé au moins n fois". Calculer $P(A_n)$.

(Indication : on étudiera attentivement les faces amenées par ce dé au cours des $n-1$ premiers lancers.)

(b) Soit B_n l'événement : "On obtient la figure formée de m 6 en au plus n relances". Calculer $P(B_n)$.

(c) Calculer $lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 17 Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à l'instant t, passe au vert à l'instant $t+1$ avec la probabilité p, et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité q $(0 < p < 1,\ 0 < q < 1)$.

On note r_n (resp. v_n), la probabilité que ce feu soit rouge (resp. vert) à l'instant $t = n$.

On suppose $r_0 + v_0 = 1$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales montrer que :

(a) $r_{n+1} = (1-p)r_n + qv_n$.

(b) $v_{n+1} = pr_n + (1-q)v_n$.

b) En déduire l'existence d'une matrice A, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que :

$$\forall n \geq 0 \ : \ \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

c)

(a) Déterminer deux matrices B et C telles que :

$$\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-p).C = A \end{cases} \tag{4}$$

(I désigne la matrice unité)

(b) Calculer B^2, C^2, $B.C$ et $C.B$.

d) En appliquant convenablement la formule du binôme de Newton dans l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (qui n'est pas commutative), calculer A^n pour $n \geq 1$.

e) En déduire les expressions de r_n et v_n en fonction de n, $n \geq 1$.

f)Donner les valeurs de $\lim_{n\to+\infty}(r_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}(v_n)$.

Commente les résultats obtenus.

Exercice 18 [La ruine du Joueur] Un joueur effectue une série de manches indépendantes. A chaque manche, il gagne $1F$ avec la probabilité p et perd $1F$ avec la probabilité $q = 1 - p$.

Le jeu prend fin lorsque le joueur a accumulé NF $(N \geq 3)$ ou lorsqu'il est ruiné.

On note u_k, la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède kF au départ.

(a) On suppose $p \neq q$.

(i) Calculer u_0 et u_N.

(ii) En considérant les résultats possibles de la 1$^{\text{re}}$ manche, et en appliquant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que :

$$u_k = p.u_{k+1} + q.u_{k-1}. \tag{5}$$

(iii) En déduire que

$$u_k = \frac{(\frac{q}{p})^p - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}. \tag{6}$$

(iv) Que se passe-t-il lorsque N tend vers $+\infty$?

(b) Reprendre les questions précédentes dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 19 Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n. Si$p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ est la factorisation de n en facteurs premiers, on se propose de démontrer que l'on a :

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r}). \tag{7}$$

On connait des démonstrations obtenues algébriquement à l'aide du théorème chinois. En voici une probabiliste :

Soit $\Omega = \{1 \dots, n\}$ muni de la probabilité uniforme.

(a) Si d est un diviseur de n, on note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $P(D_d)$.

(b) Montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des facteurs premiers de n alors les événements $D_{p_1}, \dots, D_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

(c) Conclure.

Exercice 20 Deux joueurs A et B jouent avec deux dés honnêtes. A gagnera en amenant un total de 7 et B un total de 6. B Joue le premier et ensuite (s'il y a une suite !) A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne. Quelle est la probabilité de succès de chacun des deux joueurs.
