LOGIQUE-ENSEMBLES

P.LAVAUD
1 BIO 1-CHAPTAL

1. Quelques éléments de logique

1.1. **Notions de base.** Si A est une proposition logique, alors elle est soit vraie (V) soit fausse (F).

Définition 1.1. *On note nonA ou encore $\neg A$ sa proposition contraire qui, par définition est vraie lorsque A est fausse et réciproquement. Autrement dit, $\neg A$ est définie par le tableau de vérité suivant;*

(1)

A	V	F
$\neg A$	F	V

Définition 1.2. *Etant donné deux relations A et B on définit la* **disjonction de** A **et** B *comme la proposition, notée (A ou B) ou encore $A \vee B$, qui est vraie si l'une au moins des relations A, B est vraie. Autrement dit, $A \vee B$ est défini par le tableau de vérité suivant:*

(2)

A / B	V	F
V	V	V
F	V	F
$A \vee B$		

De même on définit la **conjonction de** A **et** B par

$$A \wedge B \overset{\text{def}}{=} \neg[\neg A \vee \neg B] \tag{3}$$

Autrement dit (A *et* B) est vraie si et seulement si A et B sont vraies simultanément.

La relation ($\neg A \vee B$) s'appelle **l'implication de** B **par** A et se note $A \Rightarrow B$:

$$A \Rightarrow B \overset{\text{def}}{=} \neg A \vee B \tag{4}$$

On dit que A et B sont **equivalentes** si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$. On écrit alors $A \Leftrightarrow B$.

1.2. **Règles logiques.** Nous admettrons que les propositions suivantes sont toujours vraies. On peut s'en persuader en examinant leurs tables de vérité:

$$\neg A \vee A \qquad \text{(autrement dit } A \Rightarrow A) \tag{5}$$

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A) \tag{6}$$

$$A \Rightarrow (A \vee B) \tag{7}$$

$$[A \Rightarrow B] \Rightarrow [(C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)] \tag{8}$$

Pour être complêt, signalons qu'une théorie logique doit satisfaire trois axiomes en plus des quatre précédents. Le formalisme de ces axiomes étant un peu différent nous n'en parlerons pas. Il s'agit ici simplement de donner un apperçu de la rigueur logique que l'on cherche à atteindre...

On en déduit alors par exemple que les relations suivantes sont vraies:

$$[(A \vee B) \vee C] \Leftrightarrow [A \vee (B \vee C)] \tag{9}$$

$$[(A \vee B) \wedge C] \Leftrightarrow [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)] \tag{10}$$

$$A \Leftrightarrow A \wedge A \tag{11}$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow A \tag{12}$$

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) \tag{13}$$

$$[(A \wedge B) \wedge C] \Leftrightarrow [A \wedge (B \wedge C)] \tag{14}$$

$$[(A \wedge B) \vee C] \Leftrightarrow [(A \vee C) \wedge (B \vee C)] \tag{15}$$

$$A \Leftrightarrow \neg(\neg A) \tag{16}$$

$$(A \vee A) \Leftrightarrow A \tag{17}$$

$$[A \Rightarrow B] \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)] \tag{18}$$

On en déduit encore la relation suivante:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{19}$$

L'implication de droite est appelée la **contraposée** de l'implication de gauche. Montrer qu'une proposition est vraie est donc équivalent à montrer que sa contraposée est vraie.

On notera:

$$\neg(A \Rightarrow B) = \neg[(\neg A) \vee B] \Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge (\neg B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B). \tag{20}$$

Cette proposition est la base du **raisonnement par l'absurde**. Pour montrer qu'une implication est vraie il suffit de montrer que son contraire est faux. C'est à dire que l'on ne peut avoir en même temps l'hypothèse et le contraire de la conclusion.

1.3. **Appartenance, Existence.** Soit A une relation dans laquelle le terme x est susceptible de figurer, on ecrira alors éventuellement $A(x)$ pour le mettre en évidence. On écrit:

$$\exists x, A(x) \tag{21}$$

pour exprimer le fait qu'il existe au moins un x tel que la relation $A(x)$ soit vraie. Le symbole $\exists$ s'appelle le **quantificateur existentiel**. De même on écrit:

$$\forall x, A(x) \tag{22}$$

pour exprimer la relation

$$\neg(\exists x, \neg A(x)). \tag{23}$$

Le symbole $\forall$ s'appelle le **quantificateur universel**.

On admettra que l'on a les relations *fondamentales* suivantes en faisant bien attention que les implications ne sont pas des équivalences:

$$(\exists x, (A(x) \vee B(x))) \Leftrightarrow ((\exists x, A(x)) \vee (\exists x B(x))), \tag{24}$$

$$(\exists x, (A(x) \wedge B(x))) \Rightarrow ((\exists x, A(x)) \wedge (\exists x B(x))), \tag{25}$$

$$(\exists x, (\forall y, A(x,y))) \Rightarrow (\forall y, (\exists x, A(x,y))) \tag{26}$$

On en déduit à l'aide des règles du paragraphe précédent:

$$(\forall x, (A(x) \wedge B(x))) \Leftrightarrow ((\forall x, A(x)) \wedge (\forall x B(x))) \tag{27}$$

$$((\forall x, A(x)) \vee (\forall x B(x))) \Rightarrow (\forall x, (A(x) \vee B(x))) \tag{28}$$

Un exemple de passage à l'expression contraire

$$(\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \epsilon|) \tag{29}$$

son contraire est:

$$(\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) > \epsilon|) \tag{30}$$

1.4. **Principe de recurrence.** On rappelle le principe de recurrence:

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors **on admet** que l'implication suivante est vraie:

$$\Big\{P(n_0) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1))]\Big\} \Rightarrow \Big\{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq [n_0 \Rightarrow P(n)]\Big\} \tag{31}$$

Autrement dit;

Initialisation Si la propriété est vraie au rang n_0;

Hérédité Si la propriété au rang n entraine que la propriété est vraie au rang $n+1$,

On en déduit que la propriété est toujours vraie à partir du rang n_0

Exemple: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

Soit $P(n) = u_n > 0$. On pose:

$$P'(n) = (\forall k \leq n, u_k > 0)$$

Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P'(n). \tag{32}$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P'(n)$ par recurrence.

Initialisation D'après l'hypothèse $P'(1)$ est vraie.

Hérédité Supposons $P'(n)$ vraie. Alors en particulier $u_n > 0$ et $u_{n-1} > 0$. Donc $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} > 0$. Donc comme $P'(n)$ assure que $\forall k \leq n,\ u_k > 0$, on a bien $\forall k \leq n+1,\ u_k > 0$. C'est à dire $P'(n+1)$ vraie.

Donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P'(n)$ est vraie. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. Ensembles, applications

2.1. **Ensembles.**

2.1.1. *Définitions.* On va commencer par quelques rappels de vocabulaire élémentaire de théorie des ensembles.

Définition 2.1. *Soient A et B deux ensembles.*

On dit que A **est inclus dans** *B et on note $A \subset B$ si et seulement si tout élément de A appartient à B. Formellement, on écrit:*

$$(A \subset B) \iff (\forall x \in A,\, x \in B). \tag{33}$$

La **réunion de** *A* **et** *B, notée $A \cup B$ est l'ensemble constitué des élément appartenant à A ou B:*

$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A \ \underline{\text{ou}}\ x \in B). \tag{34}$$

On dit aussi que B est une **partie** *ou un* **sous-ensemble** *de A.*

*L'***intersection de** *A* **et** *B, notée $A \cap B$ est l'ensemble constitué des élément appartenant à A et B:*

$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A \ \underline{\text{et}}\ x \in B). \tag{35}$$

Si $A \subset B$ on appelle **complémentaire de** *A* **dans** *B, noté $C_B(A)$, l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A:*

$$\big(x \in C_B(A)\big) \iff (x \in B, x \notin A). \tag{36}$$

La **différence de** *B* **et** *A, notée $B \setminus A$ est l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A:*

$$(x \in B \setminus A) \iff (x \in B, x \notin A); \tag{37}$$

on a donc:

$$B \setminus A = C_B(A \cap B); \tag{38}$$

en particulier, si $A \subset B$, on a $B \setminus A = C_B(A)$.

La **différence symétrique de** *A* **et** *B, notée $A\Delta B$, est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent qu'à A ou qu'à B:*

$$A\Delta B \stackrel{def}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{39}$$

Le **produit cartésien de** *A* **et** *B, noté $A \times B$ est l'ensemble des couples d'éléments de A et de B:*

$$A \times B \stackrel{def}{=} \{(x, y) \,|\, x \in A, y \in B\}. \tag{40}$$

*L'***ensemble des parties de** *A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble des sous-ensembles de A.*

On donne maintenant en exercice quelques propriétés élémentaires des opérations ensemblistes ci-dessus.

2.1.2. *Propriétés élémentaires.*

Proposition 2.1. *Soient E, F et G trois ensembles. On a les relation suivantes:*

$$E \cap F = F \cap E; \qquad E \cup F = F \cup E; \tag{41}$$

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G); \qquad (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G); \tag{42}$$

$$C \cap \emptyset = \emptyset; \qquad E \cup \emptyset = E; \tag{43}$$

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (E \cap F) = E; \qquad (E \subset F) \Leftrightarrow (E \cup F) = F; \tag{44}$$

Proposition 2.2 (Relations avec le complémentaire)**.** *Soient E, F et G trois ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset G$. On a les relations suivantes:*

$$C_G(E \cup F) = C_G(E) \cap C_G(F); \tag{45}$$

$$C_G(E \cap F) = C_G(E) \cap C_G(F). \tag{46}$$

Proposition 2.3 (Distributivité)**.** *Soient E, F et G trois ensembles. On a les relations de distributivité suivantes:*

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G); \tag{47}$$

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G). \tag{48}$$

Proposition 2.4 (Relations avec le produit cartésien)**.** *Soient A, A' et B trois ensembles. On a les différents relations suivantes:*

$$(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B), \tag{49}$$

$$(A \cap A') \times B = (A \times B) \cap (A' \times B). \tag{50}$$

On en déduit par exemple:

$$(A \cup A') \times (B \cap B') = \Big((A \times B) \cup (A \times B')\Big) \cup \Big((A' \times B) \cap (A' \times B')\Big). \tag{51}$$

2.2. **Applications.**

2.2.1. *Définitions.* Commençons par définir ce qu'est une application:

Définition 2.2. *Soient E et F deux ensembles. On appelle application de E dans F la donnée d'un triplet $f = (\Gamma, E, F)$ où Γ est une partie de $E \times F$ telle que pour tout x de E l'ensemble:*

$$\{y \,|\, y \in F \text{ et } (x, y) \in \Gamma\} \tag{52}$$

soit réduit à un seul élément. On note $f(x)$ cet élément. On note souvent de la façon suivante une application de E dans F:

$$f : E \longrightarrow F, \tag{53}$$

$$x \longmapsto f(x). \tag{54}$$

Exemple: Voici une application basique mais que l'on retrouve régulièrement. Soit E un ensemble. On définit l'**identité de** E comme l'application $Id_E : E \to E$ telle que:

$$\forall x \in E,\ Id_E(x) = x. \tag{55}$$

Autrement dit:

$$\Gamma_{Id_E} = \big\{(x,x) \in E^2\big\}. \tag{56}$$

Définition 2.3 (Composée)**.** *Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle* **composée de g et de f** *l'application notée $g \circ f$ de E dans G telle que pour tout $x \in E$ on ait:*

$$g \circ f(x) \overset{def}{=} g\Big(f(x)\Big). \tag{57}$$

2.2.2. *Image, image réciproque d'un ensemble.* On a encore besoin des définitions élémentaires suivantes

Définition 2.4. *Soit $A \subset E$ un sous ensemble de E. On pose:*

$$f(A) \overset{def}{=} \{y \in F \,|\, \exists x \in E, f(x) = y\} \tag{58}$$

En particulier on appelle image de f le sous-ensemble:

$$Im(f) \overset{def}{=} f(E) \tag{59}$$

Inversement, si B est un sous-ensemble de F, on pose:

$$f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}. \tag{60}$$

Remarque: : On fera bien attention au fait que f^{-1} n'est pas une application de F dans E mais une application de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 2.5. *Soient E, F deux ensembles et $A, B \subset E$ deux sous-ensembles de E. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors on a les relations suivantes:*

$$A \subset f^{-1}(f(A)); \tag{61}$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B); \tag{62}$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \tag{63}$$
$$f(\emptyset) = \emptyset; \tag{64}$$
$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B). \tag{65}$$

Si C et D sont deux sous-ensembles de F on a de plus les relations d'inclusion suivantes:

$$f(f^{-1}(C)) \subset C; \tag{66}$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D); \tag{67}$$
$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D); \tag{68}$$
$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset; \tag{69}$$
$$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D). \tag{70}$$

Remarque: : Attention, on peut avoir $A \neq f^{-1}(f(A))$ et $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Définition 2.5 (Restriction, Prolongement)**.** *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E dans F. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E. On appelle* **restriction de** f **à** A*, et on note $f|_A$ l'application de A dans F telle que pour tout x dans A on ait:*

$$f|_A(x) \stackrel{def}{=} f(x). \tag{71}$$

Soit H un ensemble tel que $E \subset H$ et $g : H \to F$. On dit que g **est un prolongement de** f *si et seulement si pour tout x dans E on a:*

$$f(x) = g(x). \tag{72}$$

2.2.3. *Injection, Surjection, Bijection.* On a les notions fondamentales suivantes:

Définition 2.6 (Surjectivité, Injectivité, Bijectivité)**.** *Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F. On dit que:*

(i) *f est* **surjective** *si et seulement si $f(E) = F$. Autrement dit:*

$$(f \text{ surjective}) \Longleftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E \,|\, f(x) = y). \tag{73}$$

Ou encore: f est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent dans E.

(ii) *f est* **injective** *si et seulement si la relation suivante est vérifiée:*

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y); \tag{74}$$

ou encore de façon équivalente:

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y. \tag{75}$$

Ou encore: f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent dans E.

(iii) *f est* **bijective** *si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit:*

$$(f \text{ bijective}) \Longleftrightarrow (\forall y \in F, \exists! x \in E \,|\, f(x) = y). \tag{76}$$

Ou encore: f est bijective si et seulement si tout élément de F a un unique antécédent dans E.

On a les propriétés élémentaires suivantes:

Proposition 2.6. *Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications alors:*

(i) *f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective;*
(ii) *f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective;*
(iii) *f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective.*

On a également la propriété légèrement moins triviale suivante:

Proposition 2.7. *Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications alors:*

(i) *$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective;*
(ii) *$g \circ f$ surjective $\Rightarrow gf$ surjective.*

Enfin, on a la propriété fondamentale suivante:

Proposition 2.8. *Soit E et F des ensembles. Soit $f : E :\longrightarrow F$ une bijection de E dans F. Alors il existe une bijection $g : F \longrightarrow E$ de F dans E telle que l'on ait:*

$$g \circ f = Id_E, \tag{77}$$

$$f \circ g = Id_F. \tag{78}$$

Remarque: Les applications Id_E et Id_F sont bijectives!

On fera bien attention que l'on peut avoir $g \circ f = Id_E$ (resp. $f \circ g$) mais $f$non surjective (resp. f non injective) (cf. feuille d'exercices!).

Définition 2.7. *On appelle la bijection g de la proposition ci-dessus l'inverse de f et on la note f^{-1}*

Remarque: Attention il ne faut pas confonde l'application f^{-1} de F dans E définie ci dessus lorsque f est bijective et l'application $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ qui, elle, est toujours définie. Cela dit, lorsque f est une bijection et $B \subset F$ on a $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ quel que soit le sens qu'on donne à cette expression.

2.2.4. *Vocabulaire: involution.* En particulier lorsque $E = F$ on a la terminologie suivante:

Définition 2.8. *Soit E un ensemble. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application de E dans lui-même. Si f est bijective on dit aussi que f est une* **permutation de** *E (surtout lorsque E est fini).*

Si de plus on a $f \circ f = f$ on dit que f est une **involution de** *E.*