COMPLEXES

1 BIO 1

1. Rappels, Définitions, Propriétés élémentaires

1.1. **Définition du corps des complexes.** Considérons l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On le muni d'une loi d'addition en posant pour x, x', y, y' dans $\mathbb{R}$:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'). \tag{1}$$

On le muni d'une loi de multiplication en posant pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$:

$$(x, y).(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y). \tag{2}$$

Muni de ces deux lois $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ forme un corps que l'on note $(\mathbb{C}, +, .)$. On pose, $\boldsymbol{i} := (0, 1)$ et pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x + \boldsymbol{i}y = (x, y)$.

On a en particulier :

$$\boldsymbol{i}^2 = -1. \tag{3}$$

Si $z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}$ on pose :

$$Re(z) := x, \tag{4}$$

$$Im(z) := y. \tag{5}$$

On dit que x est la **partie réelle** et y la **partie imaginaire** de z.

On remarquera que l'on a :

$$\lambda \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \Rightarrow Re(\lambda z) = \lambda Re(z). \tag{6}$$

Si $z = \boldsymbol{i}y$, ce qui revient à dire que $Re(z) = 0$, on dit que z est **imaginaire pur**.

Le corps des réel $\mathbb{R}$ est naturellement inclu dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle.

On a la proposition suivante qui provient directement de la définition d'un nombre complexe.

Proposition 1.1. *Deux complexes sont égaux si et seulement si leur parties imaginaires et leur parties réelles sont égales.*

L'addition, la mulitplication et l'inverse dans $\mathbb{C}$ sont alors données en utilisant le symbole $\boldsymbol{i}$ par les formules suivantes si $z = x + \boldsymbol{i}y$ et $z' = x' + iy'$:

$$z + z' = (x + x') + \boldsymbol{i}(y + y'), \tag{7}$$

$$zz' = (xx' - yy') + \boldsymbol{i}(xy' + x'y), \tag{8}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \boldsymbol{i}\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{9}$$

1.2. **Conjugué d'un nombre complexe.**

Définition 1.1. *Soit* $z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}$. *On appelle* **conjugué** *de* z *le nombre complexe :*

$$\overline{z} := x - \boldsymbol{i}y. \tag{10}$$

Quelques propriétés :

Proposition 1.2. *Soient* $z, z' \in \mathbb{C}$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \tag{11}$$

$$\overline{\overline{z}} = z, \tag{12}$$

$$z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$z = -\overline{z} \Longleftrightarrow Re(z) = 0, \tag{14}$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}' \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z}'. \tag{15}$$

Démonstration. Laissée au lecteur. □

1.3. **Module d'un nombre complexe.**

Définition 1.2. *Soit* $z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$. *On appelle module de* z *le réel positif ou nul :*

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{16}$$

Proposition 1.3. *Soient* $z, z \in \mathbb{C}$

(i) $z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0$ *;*
(ii) $|zz'| = |z|.|z'|$ *;*
(iii) *si* $z' \neq 0$ *alors* $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ *;*
(iv) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire),*
si $z \neq 0$ *on a égalité si et seulement si* $z' = az$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *;*
(v) $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$ *;*
(vi) $|z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ *;*
(vii) $|Re(z)| \leq |z|$ *;* $|Im(z)| \leq |z|$.

Démonstration. Les points (i), (ii), (iii) et (vi) sont faciles. Pour montrer (iv). Nous allons d'abord montrer (vii).

(vii) Si $z = x + \boldsymbol{i}y$ on a :

$$|Re(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|; \tag{17}$$

$$|Im(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \tag{18}$$

(vii) L'inégalité triangulaire. Il suffit de comparer les carrés :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(zz') \\ &\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2 \end{aligned} \tag{19}$$

(v) On pose $u = z - z'$ et $v = z'$. Alors on a

$$|z| = |u + v| \leq |u| + |v| = |z - z'| + |z'| \Leftrightarrow |z| - |z'| \leq |z - z'| \tag{20}$$

En échangeant les rôles de z et z', on obtient :

(21) $$|z'| - |z| \leq |z' - z| = |z - z'|.$$

D'où le résultat. $\square$

1.4. **Exponentielle d'un nombre complexe.**

Définition 1.3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ alors on pose :*

(22) $$e^{\boldsymbol{i}\theta} := \cos(\theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta).$$

Plus généralement, si $z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}$, on pose :

(23) $$\exp(z) = e^z := e^x e^{\boldsymbol{i}y} = e^x(\cos(y) + \boldsymbol{i}\sin(y)).$$

Proposition 1.4. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :*

(24) $$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \qquad \textbf{(admis)}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

(25) $$e^{nz} = (e^z)^n.$$

Puis que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ on a la **formule de Moivre (1667-1754)** *:*

(26) $$(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \boldsymbol{i}\sin(n\theta)$$

Démonstration. La première formule est admise. La seconde se montre par une reccurence immédiate. La troisième est la seconde pour $z = \boldsymbol{i}\theta$. $\square$

1.5. **Argument d'un nombre complexe.** Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Alors, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = |z|e^{\boldsymbol{i}\theta}$.*

On rappelle la définition suivante :

Définition 1.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que deux réels x et y sont* **congrus** *ou* **égaux modulo** *α si et seulement si :*

(27) $$\exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\alpha.$$

Dans ce cas on écrit :

(28) $$x \equiv y\,[\alpha] \quad \text{ou} \quad x = y\,[\alpha].$$

On a immédiatement la propriété suivante dont on laisse la démonstration en exercice :

Proposition 1.5. *Soient $(\alpha, x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$. Alors on a :*

(29) $$x = x\,[\alpha]$$

(30) $$x = y\,[\alpha] \Leftrightarrow y = x\,[a]$$

(31) $$x = y\,[\alpha] \wedge y = z\,[a] \Leftrightarrow x = z\,[a]$$

(32) $$x = y\,[\alpha] \Leftrightarrow \lambda x = \lambda y\,[\lambda\alpha];$$

(33) $$\text{si } \lambda \neq 0, \qquad \lambda x = y\,[\alpha] \Leftrightarrow x = \frac{y}{\lambda}\,[\frac{\alpha}{\lambda}];$$

Cela nous permet de poser la définition plus pratique suivante :

Définition 1.5. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on appelle* **argument** *de z un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{\boldsymbol{i}\theta}$.*
On le notre $arg(z)$.
Si $z = 0$, alors z n'a pas d'argument.

Attention, dans cette définition $arg(z)$ n'est défini qu'à un multiple de 2π près !

Avant d'ennoncer des propriétés utiles de l'argument nous rappelons :

Théorème 1.2. *Soient $z = |z|e^{\boldsymbol{i}\theta}$ et $z' = |z|e^{\boldsymbol{i}\theta'}$ avec $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors on a :*

$$z = z' \Longleftrightarrow |z| = |z'| \ \mathit{et}\ \theta = \theta'\ [2\pi]. \tag{34}$$

Proposition 1.6. *Soient $z = |z|e^{\boldsymbol{i}\theta}$ et $z' = |z|e^{\boldsymbol{i}\theta'}$ avec $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors on a :*

$$z = z' \Longleftrightarrow |z| = |z'| \ \mathit{et}\ \theta = \theta'\ [2\pi]; \tag{35}$$

$$zz' = |z||z'|e^{\boldsymbol{i}(\theta+\theta')} \tag{36}$$

$$arg(\overline{z}) = -arg(z)\ [2\pi] \tag{37}$$

Si $z = x + \boldsymbol{i}y$, alors on a :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{38}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \tag{39}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \tag{40}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \qquad \mathit{si}\ x \neq 0. \tag{41}$$

Démonstration. laissée au lecteur. □

On a de plus les formules très importantes suivantes :

Proposition 1.7 (Formules d'Euler (1707-1783)). *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\boldsymbol{i}\theta} + e^{-\boldsymbol{i}\theta}}{2} \tag{42}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{\boldsymbol{i}\theta} - e^{-\boldsymbol{i}\theta}}{2\boldsymbol{i}} \tag{43}$$

Démonstration. laissée au lecteur. □

1.6. **Racines n-mes de l'unité.**

Définition 1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de l'unité les solutions de l'équation :*

$$z^n = 1 \tag{44}$$

Proposition 1.8. *Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $a = r^{i\alpha}$ alors l'équation*

$$z^n = a \tag{45}$$

admet n racines distinctes données par

$$\rho = |z| = {}^{n}\sqrt{r} \tag{46}$$

et

$$\theta = \frac{\alpha}{n}[\frac{2\pi}{n}] \tag{47}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \textit{avec } k = 0, \ldots, n-1. \tag{48}$$

Ou encore :

$$z^n = a = r\, e^{\boldsymbol{i}\alpha} \Leftrightarrow z \in \left\{ \sqrt[n]{r}\, e^{\boldsymbol{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \,/\, k \in \{1, \ldots, n-1\} \right\}. \tag{49}$$

En particulier les racines n-ièmes de l'unité sont les $z \in \mathbb{C}$ tq

$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \textit{avec } k = 0, \ldots, n-1. \tag{50}$$

Ou encore

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \left\{ e^{\boldsymbol{i}\frac{2k\pi}{n}} \,/\, k \in \{1, \ldots, n-1\} \right\}. \tag{51}$$

Démonstration. □

1.7. **Représentations dans le plan complexe.** Comme d'un point de vue ensembliste $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on peut représenter $\mathbb{C}$ comme un plan réel. Le complexe $z = x + \boldsymbol{i}y$ étant alors représenté par le point de coordonnées (x, y).

Inversement, si M est un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) on dit que $z = x + \boldsymbol{i}y$ est l'**affixe** de M. De même on parlera de l'affixe d'un vecteur du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Si M et M' sont deux points d'affixes z et z', alors l'affixe vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.

Notons $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ ($O = (0, 0)$, $\overrightarrow{\imath} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{\jmath} = (0, 1)$). Soit M le point d'affixe z, alors on a :

$$OM = |z|, \tag{52}$$

$$arg(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}}) = arg(z)\,[2\pi]. \tag{53}$$

1.8. **Dérivations des fonctions à valeurs complexes.** On rappelle avant tout :

Définition 1.7. *Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction réelle à valeurs réelles. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si :*

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{54}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas on pose :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{55}$$

On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pout tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0. Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f la fonction :

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned} \tag{56}$$

Cela étant rappelé, on pose :

Définition 1.8. *Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ une fonction complexe de la variable réelle : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On pose :*

$$f_{\mathbb{R}}(x) = Re(f(x)) \;\; \textit{et} \;\; f_{\boldsymbol{i}\mathbb{R}}(x) = Im(f(x)) \tag{57}$$

Ainsi $f_{\mathbb{R}}$ et $f_{\boldsymbol{i}\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $f = f_{\mathbb{R}} + \boldsymbol{i} f_{\boldsymbol{i}\mathbb{R}}$.

On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f_{\mathbb{R}}$ et $f_{\boldsymbol{i}\mathbb{R}}$ le sont. Dans ce cas on pose :

$$f' = f'_{\mathbb{R}} + \boldsymbol{i} f'_{\boldsymbol{i}\mathbb{R}}. \tag{58}$$

On a alors :

Proposition 1.9. *Soit $m \in \mathbb{C}$ alors la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{mx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus :*

(59) $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = me^{mx}.$$

Démonstration. Exercice. □