POLYNôMES

1BIO1 - LYCÉE CHAPTAL

1. Définitions

1.1. **Introduction.** Une fonction polynômiale est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des réels $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{1}$$

On appelle polynôme une telle appplication polynômiale. On appelle les a_k les coefficients du polynôme $P(x)$.

Notons X le polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ X(x) = x$. Alors, on a l'égalité suivante entre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $P(X) = P \circ X = P$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels.

On a la proposition très importante suivante:

Proposition 1.1. *Soient P et Q deux polynômes réels. Alors ils sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.*

Plus précisément: si $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, alors si on pose pour $k \leq p+1$: $a_k = 0$ et pour $k \geq q+1$, $b_k = 0$, on a:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = b_k.$$

1.2. **Opérations arithmétiques sur les polynômes.**

Proposition 1.2. *Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*

(i) $(P+Q)(X) \overset{def}{=} P(X) + Q(X)$ *est un polynôme de coefficients $a_k + b_k$ (avec $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$).*

(ii) $(\lambda P)(X) \overset{def}{=} \lambda P(X)$ *est un polynôme de coefficients λa_k.*

(iii) $(PQ)(X) \overset{def}{=} P(X)Q(X)$ *est un polynôme de coefficients*

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \tag{2}$$

(avec $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$).

(iv) $(P \circ Q)(X) \overset{def}{=} P\big(Q(X)\big)$ *est un polynôme.*

On rappelle la formule des coefficients binômiaux:

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3}$$

Proposition 1.3 (Formule du Binôme de Newton)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Alors on a:*

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k. \tag{4}$$

Cette formule est équivalente à la formule suivante pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{5}$$

1.3. **Dérivation.**

Définition 1.1. *Soit* $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme réel. On définit son polynôme dérivé par:*

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}. \tag{6}$$

De même on définit sont k-ième polynôme dérivé, noté $P^{(k)}$ *par réccurrence par la formule:*

(i) $P^{(0)}(X) = P(X)$.
(ii) *Pour* $k \geq 0$*:* $P^{(k+1)}(X) = \left(P^{(k)}\right)'(X)$.

On a:

Proposition 1.4. *Soient* $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ *et* $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ *deux polynômes réels. Soit* $k \in \mathbb{N}$*. Alors on a:*

(i) $(P+Q)^{(k)}(X) = (P^{(k)} + Q^{(k)})(X) = P^{(k)}(X) + Q^{(k)}(X)$;
(ii) $(\lambda P)^{(k)}(X) = (\lambda P^{(k)})(X) = \lambda P^{(k)}(X)$;
(iii) $(PQ)'(X) = (P'Q + PQ')(X) = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X)$;
(iv) *Plus généralement, on a la formule de Leibnitz:*

$$(PQ)^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)}(X) Q^{(k-i)}(X). \tag{7}$$

Proposition 1.5 (Formule de Taylor pour les polynômes)**.** *Soit* $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme réel. Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Alors il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que:*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k. \tag{8}$$

En particulier pour $a = 0$*, on obtient si* $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$*:*

$$\forall k \in [0,p]_{\mathbb{N}},\ a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}. \tag{9}$$

1.4. **Degré.**

Définition 1.2. *Soit* $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$. *On pose:*

$$\deg(P) = Max\{k \in [0,n]_{\mathbb{N}} \,/\, a_k \neq 0\}. \tag{10}$$

On pose:

$$-\infty + -\infty = -\infty \tag{11}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\infty + n = -\infty \tag{12}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n. - \infty = -\infty \tag{13}$$

Proposition 1.6. *Soient P et Q deux polynômes. Alors:*

(i) $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$;
(ii) $deg(P+Q) \leq max\big(deg(P), deg(Q)\big)$ *avec égalité si* $deg(P) \neq deg(Q)$.
(iii) *Si* $P \neq 0$ *et* $Q \neq 0$: $deg(P \circ Q) = deg(P).deg(Q)$

2. Racines

2.1. **Notion de racine d'un polynome, ordre de multiplicité d'une racine.**

Définition 2.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de $P(X)$ si et seulement si $P(\alpha)=0$.*

Proposition 2.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de $P(X)$ si et seulement si il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$.*

Définition 2.2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine d'ordre k de $P(X)$ si et seulement si il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que*

(i) $P(X) = (X-\alpha)^k Q(X)$;
(ii) $Q(\alpha) \neq 0$.

Proposition 2.2. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $a \in \mathbb{R}$ *est une racine d'ordre k de P.*
(ii) $a \in \mathbb{R}$ *est une racine de P et une racine d'ordre $k-1$ de P'.*
(iii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ *et* $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

3. Polynômes complexes et réels

3.1. **Polynômes complexes.** Tout ce qui a été dit dans les sections précédentes peut être dit mot pour mot en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Pour les polynômes complexes, on a le théorème fondamental suivant:

Théorème 3.1 (d'Alembert(1717-1783) encyclopédiste)**.** *Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine.*

Proposition 3.1. *Soit P un polynôme de degré au plus n. Si P a au moins $n+1$ racines distinctes alors P est nul.*

Corollaire 3.1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $deg(P) \geq 1$, alors il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$, des complexes $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, des entiers positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ et un complexe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que:*

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_r)^{\alpha_r} \tag{14}$$

De plus une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque: On a $deg(P) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$.

3.2. **Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels.**

Remarque: Ne pas oublier qu'un polynôme réel est un polynôme complexe.

Cependant si l'on travaille sur $\mathbb{R}$ le théroème de d'Alembert n'est plus vrai. Il existe des polynômes réels qui n'ont pas de racines réelles. Il suffit de considérer par exemple $P(X) = X^2 + 1$.

Proposition 3.2. *Soit P un polynôme complexe à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\overline{\alpha}$ est également racine et avec le même ordre de multiplicité que α.*

Le lemme suivant est très utile en pratique en particulier pour montrer la proposition précédente.

Lemme 3.1. *Soient $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $R(X) \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réels et $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe tels que $P(X) = Q(X)R(X)$.*

Alors $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$: c'est en fait un polynôme à coefficients réels.

Corollaire 3.2. *En particulier si P est un polynôme à coefficients réels et si $deg(P)$ est impair alors il possède au moins une racine réelle.*

Remarque: : Si $\alpha \in \mathbb{C}$ on a:

$$(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - 2(Re(\alpha))X + |\alpha|^2. \tag{15}$$

3.3. **Factorisation des polynômes réels.**

Proposition 3.3. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coeffecients réels de degré supérieur ou égal à 1. Alors il existe deux entiers k, r avec $k + r \geq 1$:*

(i) *des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts.*
(ii) *des entiers naturels non nuls $n_1, \dots, n_k$;*
(iii) *des polynômes $Q_1, \dots, Q_r$ de degré 2 sans racines réelles, de coefficient de X^2 égal à 1 ($Q_i(X) = X^2 + b_iX + c_i$ avec $b_i, c_i \in \mathbb{R}$) et deux à deux distincts;*
(iv) *des entiers naturels non nuls $p_1, \dots, p_r$;*
(v) *$\lambda \in \mathbb{R}$;*

tels que:

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{n_1} \dots (X - \alpha_k)^{n_k} Q_1(X)^{p_1} \dots Q_r(X)^{p_r}. \tag{16}$$

De plus une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Preuve de la Proposition 2.2.

Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$:

On suppose que α est racine d'ordre $k \geq 1$ de P. Alors il existe un polynôme Q tel que

$$P(X) = (X-\alpha)^k Q(X) \text{ et } Q(\alpha) \neq 0. \tag{17}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} P'(X) &= k(X-\alpha)^{k-1}Q(X) + (X-\alpha)^k Q'(X) \\ &= (X-\alpha)^{k-1}\big(kQ(X) + (X-\alpha)Q'(X)\big). \end{aligned} \tag{18}$$

Posons $Q_1(X) = kQ(X) + (X-\alpha)Q'(X)$. On a alors:

$$P'(X) = (X-\alpha)^{k-1}Q_1(X). \tag{19}$$

De plus:

$$Q_1(\alpha) = kQ(\alpha) + (\alpha-\alpha)Q'(\alpha) = kQ(\alpha) \neq 0. \tag{20}$$

Donc α racine d'ordre $k-1$ de P' et on savait que α racine de P.

Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$:

D'après l'hypothèse $P(\alpha) = 0$, or $P^{(0)} = P$, donc $P^{(0)}(\alpha) = 0$. D'autre part α racine d'ordre $k-1$ de P' donc il existe un polynôme $Q_1(X)$ tel que:

$$P'(X) = (X-\alpha)^{k-1}Q_1(X) \text{ et } Q_1(\alpha) \neq 0. \tag{21}$$

D'après la formule de Taylor on a (si $n = deg(P)$):

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i. \tag{22}$$

On en déduit:

$$P'(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^{i-1}. \tag{23}$$

D'autre part d'après la formule de Leibnitz, on a pour $k \geq i \geq 1$:

$$\begin{aligned} P^{(i)}(X) &= (P')^{(i-1)}(X) \\ &= \big((X-\alpha)^{k-1}Q_1(X)\big)^{(i-1)} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \frac{(k-1)!}{(k-1-j)!}(X-\alpha)^{k-1-j}Q_1^{(i-1-j)}(X) \end{aligned} \tag{24}$$

Quand $X = \alpha$, on a

(25)

$(X-\alpha)^{k-1-j} = (\alpha-\alpha)^{k-1-j} = 0^{k-1-j} = 0$ si $k-1-j \geq 1$ (c'est à dire si $k-2 \geq j$), et
$(X-\alpha)^{k-1-j} = (\alpha-\alpha)^{k-1-j} = 0^{k-1-j} = 0$ si $k-1-j = 0$ (c'est à dire si $k-1 = j$).

Ce dernier cas ne se produit que lorsque $i-1=k-1$ (c'est à dire $i=k$). On a donc:

$$P^{(i)}(\alpha) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \frac{(k-1)!}{(k-1-j)!}(\alpha-\alpha)^{k-1-j} Q_1^{(i-1-j)}(\alpha) \tag{26}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i<k \\ (k-1)! Q_1(\alpha) \neq 0 & \text{si i=k} \end{cases}$$

Montrons que $(iii) \Rightarrow (i)$:
D'après la formule de Taylor on a (si $n = deg(P)$):

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i. \tag{27}$$

On en déduit d'après l'hypothèse (iii):

$$P(X) = \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i \tag{28}$$
$$= (X-\alpha)^k \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^{i-k}$$
$$= (X-\alpha)^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{P^{(k+i)}(\alpha)}{(k+i)!}(X-\alpha)^{i}$$

On pose alors $Q(X) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{P^{(k+i)}(\alpha)}{(k+i)!}(X-\alpha)^i$. On a donc:

$$P(X) = (X-\alpha)^k Q(X); \tag{29}$$

et

$$Q(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{P^{(k+i)}(\alpha)}{(k+i)!}(\alpha-\alpha)^i \tag{30}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{P^{(k+i)}(\alpha)}{(k+i)!}0^i$$
$$= \frac{P^{(k)}(\alpha)}{(k)!} \neq 0.$$

□

Preuve de la proposition 3.2. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n supposons que P admettre $n+1$ racines distinctes. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ ces racines. Alors il existe un polynôme Q tel que

$$P(X) = (X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n+1})Q(X). \tag{31}$$

On en déduit

$$n \geq \deg(P) = (n+1) + \deg(Q) \tag{32}$$

d'où:

$$\deg(Q) \leq n-(n+1) = -1. \tag{33}$$

On en déduit $\deg(Q) = -\infty$ et donc $Q=0$ et $P=0$.

□