ALGèBRE LINéAIRE

1BIO1 - LYCÉE CHAPTAL

Dans tout ce chapitre, le corps des scalaires est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Généralités,Définition

1.1. Espaces vectoriels.

Définition 1.1. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble V muni :*

(1) *d'une loi de composition interne notée + telle que*
   (a) $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ *(la loi est associative) ;*
   (b) $\exists 0_V \in V, \forall v \in V, v + 0_V = 0_V + v = v$ *(élément neutre) ;*
   (c) $\forall v \in V, \exists - v \in V, v + (-v) = (-v) + v = 0_V$ *(chaque élément admet un opposé) ;*
   (d) $\forall v, w \in V, v + w = w + v$ *(la loi est commutative) ;*

(2) *et d'une loi de composition externe par les éléments du corps $\mathbb{K}$ (appelés scalaires) notée . ou " " :*

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v. \end{aligned} \tag{1}$$

On impose de plus les relations suivantes entre les deux lois. On a pour tout $(v, w) \in V^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$1.v = v, \tag{2}$$
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \tag{3}$$
$$\lambda(v + w) = \lambda(v + w) \tag{4}$$
$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v. \tag{5}$$

On a immédiatement :

Proposition 1.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in V$:*

$$0.v = 0_V, \tag{6}$$
$$\lambda.0_V = 0_V \tag{7}$$
$$(-1).v = -v. \tag{8}$$

Exemple de base : $\mathbb{R}^n$. **En fait c'est le seul espace vectoriel que nous considèrerons cette année dans les applications.** Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n); \tag{9}$$
$$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \tag{10}$$

Alors en particulier :

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0). \tag{11}$$

1.2. **Sous-espaces vectoriels.**

Définition 1.2. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors W est un sous-espace vectoriel si et seulement si , $W \neq \emptyset$, $W \subset V$ et pour tout v et tout w dans W, $v + w \in W$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda v \in W$*

On déduit immédiatement de la définition que si W est un sous-espace vectoriel de V, alors $0_V \in W$. En effet, W est non vide, donc il existe $w \in W$, on a alors (comme $0 \in \mathbb{K}$) $0_V = 0.w \in W$. On peut donc remplacer dans la définition la condition $W \neq \emptyset$ par $0_V \in W$.

Proposition 1.2. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $W \subset V$. Alors W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si :*

(1) $0_V \in W$;

(2) $\forall v, w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}, v + \lambda w \in W$.

Remarque: La seconde condition est également équivalente à $\forall v, w \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \mu v + \lambda w \in W$. Autrement dit, un sous-espace vectoriel est un sous ensemble contenant le vecteur nul et stable par combinaisons linéaires (nous préciserons la notion de combinaison linéaire plus bas...).

Proposition 1.3. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et W, W' deux sous-espaces vectoriels de V, alors $W \cap W'$ est un sous-espace vectoriel de V.*

1.3. **Somme, Somme directe.**

Définition 1.3. *Soit V un espace vectoriel et W, W' deux sous-espaces vectoriels de V, alors on pose :*

$$W + W' = \{w + w'/w \in W, w' \in W'\}. \tag{12}$$

Alors on a :

Proposition 1.4. *$W + W'$ est un sous-espace vectoriel de V et de plus c'est le plus petit sous-espace vectoriel de V qui contienne W et W'.*

Définition 1.4. *Soit V un espace vectoriel et W, W' deux sous espaces vectoriels de V, alors on dit que W et W' sont en somme directe si $W \cap W' = \{0\}$. On écrit alors $W \oplus W'$ pour leur somme. Si de plus $W + W' = V$ alors on dit que V est somme directe de W et de W'.*

Proposition 1.5. *Soient W, W' deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel V, tels que $V = W \oplus W'$ alors pour tout $x \in V$ il existe un unique $w \in W$ et un unique $w' \in W'$ tels sque $x = w + w'$.*

Définition 1.5. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et W, W' deux sous-espaces vecotriels de V tels que $V = W \oplus W'$. Alors on dit que W et W' sont supplémentaires dans V et que W' est un supplémentaire de W dans V*

2. Familles libres, génératrices, bases

2.1. **Familles de vecteurs.** Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle famille de vecteurs de V un n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ de n vecteurs de V.

On appelle combinaison linéaires des vecteurs de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ une somme avec coefficients dans $\mathbb{K}$ des vecteurs de la famille. C'est-à-dire un vecteur v tel que :

$$\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n. \tag{13}$$

2.2. **Familles libres.**

Définition 2.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V. On dit que cette famille est libre si et seulement si pour tout pour tout n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}$ de scalaires, on a :*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{14}$$

On dit aussi que les vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ sont linérairement indépendants. Dans le cas contraire on dit que la famille est liée.

Lemme 2.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V. Alors, $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée si et seulement si :*

$$\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\},\ x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0_V. \tag{15}$$

2.3. **Familles génératrices.**

Définition 2.2. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Soit $(v_1, \ldots, v_n) \in W^n$ une famille de n vecteurs de W. On dit que cette famille est génératrice de W, si et seulement si pour tout vecteur v de W il existe un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires tels que :*

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n. \tag{16}$$

Lorsque $W = V$ on dit simplement que $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice. (sous entendu de V).

Autrement dit encore, une famille finie de vecteurs de W est génératrice de W si et seulement si tout vecteur de W peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Définition 2.3. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V. On pose :*

$$Vect(v_1, \ldots, v_n) = \Big\{ x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \,/\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \Big\} \tag{17}$$

Autrement dit :

$$w \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \Leftrightarrow \exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \ w = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n. \tag{18}$$

D'autre part, avec cette notation, $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice de W si et seulement si :

$$W = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n). \tag{19}$$

On a :

Lemme 2.2. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V. Alors $Vect(v_1, \ldots, v_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de V contenant tous les vecteurs de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$.*

2.4. **Bases.**

Définition 2.4. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de V. On dit que cette famille est une base de V si et seulement si elle est libre et génératrice.*

L'exemple fondamental est le suivant : on se place dans l'espace vectoriel $V = \mathbb{K}^n$. On pose $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. C'est le n-uplet de scalaires n'ayant que des 0 sauf un 1 à la i-ième place alors : $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Par exemple lorsque $n = 3$, on a :

$$e_1 = (1, 0, 0); \qquad e_2 = (0, 1, 0); \qquad e_1 = (0, 0, 1). \tag{20}$$

On a alors immédiatement

Proposition 2.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de n vecteurs de V. Alors $(v_1,\dots,v_n)$ est une base de V si et seulement si pour tout vecteur v de V il existe un unique n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ de scalaires tels que :*

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n. \tag{21}$$

Si $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel V et $v \in V$. On appelle l'unique n-uplet $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, le n-uplet des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

2.5. Quelques Lemmes techniques importants.

Lemme 2.3. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de n vecteurs de V. Alors :*

1. $(v_1,\dots,v_n)$ *liée* $\Leftrightarrow \exists i \in [1,n]_{\mathbb{N}}, v_i \in Vect(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$;
2. $(v_1,\dots,v_n)$ *libre et* $v \notin Vect(v_1,\dots,v_n) \Longrightarrow (v_1,\dots,v_n,v)$ *libre ;*
3. $v_i \in Vect(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n) \Longrightarrow Vect(v_1,\dots,v_n) = Vect(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$.

Lemme 2.4. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de n vecteurs de V. Soit $(w_1,\dots,w_p)$ une famille de p vecteurs de V. Alors :*

$$Vect(v_1,\dots,v_n) \subset Vect(w_1,\dots,w_p) \text{ et } n \geq p \Longrightarrow (v_1,\dots v_n) \text{ liée.} \tag{22}$$

3. Espace vectoriel de dimension finie

3.1. Définition.

Définition 3.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel on dit que V est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie. C'est-à-dire si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$ telle que $Vect(v_1,\dots,v_n) = V$.*

Proposition 3.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie alors si $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$ est une famille génératrice. Il existe $p \leq n$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ tels que $(v_{i_1},\dots,v_{i_p})$ soit une base de V. En particulier dans un sous-espace vectoriel de dimension finie il y a des bases.*

Théorème 3.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie alors si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_p)$ sont des bases de E alors $n = p$.*

Définition 3.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors on dit que n est la dimension de E. On pose :*

$$dim(E) = n. \tag{23}$$

3.2. Encore quelques lemmes techniques.

Lemme 3.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que* $\dim(V) = n$. *Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de p vecteurs de V. Alors :*

1. $(v_1,\dots,v_p)$ *libre* $\Longrightarrow p \leq n$;
2. $(v_1,\dots,v_p)$ *génératrice* $\Longrightarrow p \geq n$;
3. $(v_1,\dots,v_p)$ *base* $\Longrightarrow p = n$.

Lemme 3.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors :*

$$(v_1,\dots,v_n) \text{ libre } \Leftrightarrow (v_1,\dots,v_n) \text{ génératrice } \Leftrightarrow (v_1,\dots,v_n) \text{ base.} \tag{24}$$

3.3. **Dimension d'un sous-espace vectoriel, supplémentaire.**

Proposition 3.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$. De plus $dim(F) = dim(E)$ si et seulement si $E = F$.*

Proposition 3.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on a la relation :*

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G). \tag{25}$$

Proposition 3.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E alors F admet un supplémentaire G et $dim(G) = dim(E) - dim(F)$.*

Définition 3.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors on appelle rang de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ la dimension de l'espace vectoriel $Vect(x_1, \ldots, x_n)$. (Elle existe car $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice finie de $Vect(x_1, \ldots, x_n)$.)*

4. Applications linéaires, endomorphismes.

4.1. **Applications linéaires.**

Définition 4.1. *Soient V et W deux espaces vectoriels. Une application linéaire (ou morphisme) ϕ de V dans W est une application de de V dans W telle que*

(1) *pour tous v, w dans V : $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$.*
(2) *pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$.*

Ces deux conditions sont équivalentes à : pour tous v, w dans V et tout λ dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\phi(\lambda v + w) = \lambda\phi(v) + \phi(w). \tag{26}$$

On note $\mathcal{L}(V, W)$ l'espace des applications linéaires de V dans W. Si $W = V$ on dit que ϕ est un endomorphisme de V. On note $\mathcal{L}(V)$ ou $End(V)$ l'espace des endomorphismes de V.

Soient V et W deux espaces vectoriels. Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$, on pose :

$$\phi + \psi : V \longrightarrow W, \ v \longmapsto (\phi+\psi)(v) = \phi(v) + \psi(v). \tag{27}$$

et si $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda\phi : V \longrightarrow W, \ v \longmapsto (\lambda\phi)(v) = \lambda\phi(v). \tag{28}$$

Alors $\phi + \psi$ et $\lambda\phi$ sont des applications linéaires. On peut alors remarquer que l'on a :

Proposition 4.1. *L'espace $\mathcal{L}(V, W)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

4.2. **Noyau, Image.**

Définition 4.2. *Si ϕ est une application linéaire de V dans W on pose :*

$$Ker(\phi) = \{v \in V \,/\, \phi(v) = 0_W\}, \tag{29}$$

$$Im(\phi) = \{w \in W \,/\, \exists v \in V, \phi(v) = w\}. \tag{30}$$

On dit que $Ker(\phi)$ est le noyau de ϕ et $Im(\phi)$ l'image de ϕ.

Proposition 4.2. *Les espaces $Ker(\phi)$ et $Im(\phi)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Il est clair de par la définition que dire que ϕ est surjective c'est dire que $Im(\phi) = W$. On a :

Proposition 4.3. *Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$. Alors ϕ est injective si et seulement si $Ker(\phi) = \{0_V\}$.*

4.3. **Applications linéaires et image d'une famille de vecteurs.**

Proposition 4.4. *Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n) \in V^n$ une base de V. Soit $(w_1, \ldots, w_n) \in W^n$ une famille de n vecteurs de W. Alors :*

Il existe une unique application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ telle que pour tout $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, $\phi(e_i) = w_i$, c'est-à-dire $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) = (w_1, \ldots, w_n)$.

Proposition 4.5. *Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n) \in V^n$ une base de V. Alors :*

(1) *ϕ injective $\Leftrightarrow (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ libre dans W ;*
(2) *ϕ surjective $\Leftrightarrow (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ génératrice dans W ;*
(3) *ϕ bijective $\Leftrightarrow (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ base de W.*

Remarque: Le choix d'une base est équivalent au choix d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E.

4.4. **Le théorème du rang.**

Définition 4.3. *Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$. On pose*

$$rg(\phi) = dim(Im(\phi)). \tag{31}$$

On appelle ce nombre le rang de ϕ.

Lemme 4.1. *Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors :*

$$Im(\phi) = Vect(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)). \tag{32}$$

En particulier, on a : $rg(\phi) = rg(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$.

Proposition 4.6. *Soit V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ une application linéaire de V dans W. Alors on a :*

$$dim(V) = dim(Ker(\phi)) + dim(Im(\phi)); \tag{33}$$

c'est-à-dire :

$$rg(\phi) = dim(V) - dim(Ker(\phi)). \tag{34}$$

4.5. **Composition.**

Proposition 4.7. *Soient U, V, W espaces vectoriels. Soient $\phi \in \mathcal{L}(U, V)$ et $\psi \in \mathcal{L}(V, W)$ alors $\psi \circ \phi \in \mathcal{L}(U, W)$.*

Proposition 4.8. *Soient U, V, W espaces vectoriels. Soient $\phi \in \mathcal{L}(U, V)$, et $\psi \in \mathcal{L}(V, W)$ alors*

(1) *ϕ, ψ injectives $\Longrightarrow \psi \circ \phi$ injective ;*
(2) *ϕ, ψ surjectives $\Longrightarrow \psi \circ \phi$ surjective ;*
(3) *ϕ, ψ bijectives $\Longrightarrow \psi \circ \phi$ bijective ;*
(4) *$\psi \circ \phi$ injective $\Longrightarrow \phi$ injective ;*
(5) *$\psi \circ \phi$ surjective $\Longrightarrow \psi$ surjective ;*

Proposition 4.9. *Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$, alors ϕ isomoprhisme si et seulement si il existe $\psi \in \mathcal{L}(W, V)$ tel que $\phi \circ \psi = Id_W$ et $\psi \circ \phi = Id_V$. On appelle ψ l'isomorphisme réciproque de ϕ et on le note (comme d'habitude) ϕ^{-1}.*