ESPACES PROBABILISéS

1 BIO 1

1. Cas fini

1.1. Expérience aléatoire.

Définition 1.1. *Une* **expérience aléatoire** *est un phénomène que l'on est en mesure de tester mais dont on ne peut prédire le résultat de manière certaine.*

Le mieux est de donner quelques exemples.

Exemple 1. Le lancer d'un dé non truqué à 6 faces est une expérience aléatoire. On peut tester le résultat mais on ne peut pas savoir à l'avance le résultat: on est incapable de dire à priori quelle face va apparaitre.

Exemple 2. De même le résultat du lancer de deux dés discernables ou non est une expérience aléatoire.

Exemple 3. Si on tire au hasard une carte dans un jeu de 32 Cartes on ne peut savoir à l'avance quelle carte va sortir.

Exemple 4. Considérons une urne contenant b boules blanches et n boules noires. Lorsque l'on tire au hasard une boule dans l'urne on ne sait pas à l'avance si le résultat va être une boule blanche ou une boule noire. C'est encore une expérience aléatoire.

Exemple 5. De même si on retire $m(\leq b+n)$ boules de l'urne on ne sait pas à l'avance le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires que l'on va obtenir. C'est toujours un expérience aléatoire.

Exemple 6. Le tirage au sort de la coupe du monde (ou du loto) constitue lui aussi une expérience aléatoire.

Définition 1.2. *On appelle le résultat ω d'une expérience aléatoire un* **possible** *et l'ensemble des possibles l'***univers des possibles** *ou l'***univers** *de l'expérience aléatoire. On le note Ω.*

Décrivons les univers des différentes expériences aléatoires précédentes.

Exemple 1. Les résultats possibles d'un lancer de dé sont les 6 faces du dé soit $\omega \in \{1,2,3,4,5,6\}$. On a donc l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Exemple 2. Les résultats possibles d'un lancer de deux dés discernables sont tous les couples de faces. On a donc:

$$\Omega = \{(i,j)|i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2. \tag{1}$$

Exemple 3. Dans le cas d'un lancer de deux dés non-discernables les couples (i,j) et (j,i) représentent le même résultat. L'univers est donc:

$$\Omega = \{(i,j)|1 \leq i \leq j \leq 6\} \tag{2}$$

Exemple 4. Dans l'exemple du tirage des cartes l'univers des possibles est égal à l'ensemble des 32 cartes.

Exemple 5. Dans l'exemple de tirage des boules, on a deux possibles. Soit on tire une boule blanche soit on tire une boule noire. L'univers de l'expérience aléatoire a donc deux éléments {"blanc", "noir"}.

Exemple 6. Dans l'expérience aléatoire du tirage de m boules, les résultats possibles sont déterminés par le nombre k de boules blanches tirées (on a alors $m-k$ boules noires). l'entier k pouvant prendre toutes les valeurs comprises entre $max\{0, m-n\}$ et $min\{b,m\}$. D'une part parce que le nombre $m-k$ de boules noires doit être inférieur à n et d'autre part parce que le nombre de boules blanches doit être inférieur à b enfin on doit évidemment avoir $0 \leq k \leq m$. (On a évidemment $m-n \leq min\{b,m\}$ car $b+n \geq m$ d'une part et $n \geq 0$ d'autre part)

1.2. Événements.

Lorsque l'on effectue une expérience aléatoire on peut attendre un résultat particulier ou un certain type de résultat. De manière informelle on appelle événement un certain type de résultats.

Exemple 1. Lorsque l'on lance un dé l'événement "Le résultat est un 1" est réalisé lorsque le dé s'arrête sur la position 1.

Exemple 2. Lorsque l'on lance deux dés discernables l'événement "la somme des deux dés est 5" est réalisé lorsque le résultat du tirage donne l'un des couples $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

Exemple 3. Lorsque l'on lance deux dés non-discernables l'événement "La somme des deux dés est 5" est cette fois-ci réalisé lorsque le résultat du tirage donne l'un des couples: $\{(1,4),(2,3)\}$.

Définition 1.3. *Soit Ω ($Card(\Omega) < \infty$) l'univers fini d'une expérience aléatoire. On appelle* **événement** *de l'expérience aléatoire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{P}(\Omega)$ constitue la* **tribu** *(ou l'algèbre) des événements.*

On appelle **événement élémentaire** *un singleton de $\mathcal{P}(\Omega)$. L'ensemble des événements élémentaires est donc: $\big\{\{\omega\}|\omega \in \Omega\big\}$.*

*On appelle l'ensemble vide ($\emptyset$) l'***événement impossible** *(jamais réalisé) et Ω l'***événement certain** *(toujours réalisé).*

Exemple 1. Dans l'expérience aléatoire du jeté de dé l'événement "Le résultat est à la fois pair et impair" est l'événement impossible. Par contre l'événement "Le résultat est pair ou impair" est l'événement certain.

Exemple 2. De même dans le tirage de m boules si $m > b$, l'événement "on n'a que des boules blanches" est l'événement impossible.

Posons encore quelques définitions:

Définition 1.4. *Soit Ω un univers.*

(i) *On dit qu'un événement A* **implique** *un événement B si $A \subset B$. (Les possibles qui réalisent A réalisent aussi B).*
(ii) *Soit A un événement. Les événements A et $\overline{A}$ sont appelés* **événements contraires**.
(iii) *Deux événements A et B sont dits* **incompatibles** *si $A \cap B = \emptyset$. (Il n'y a aucun possible qui réalise à la fois A et B).*
(iv) *On appelle* **système complet d'événements** *tout p-uplet $(A_1, \ldots, A_p)$ d'événements deux à deux incompatibles tels que:*

$$\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega. \tag{3}$$

Exemple 1. Dans l'exemple du dé l'événement "Le résultat est 2" c'est-à-dire l'événement $\{2\}$ implique l'événement "Le résultat est un nombre pair" c'est-à-dire l'événement $\{2, 4, 6\}$. En effet, on a $\{2\} \subset \{2, 4, 6\}$.

Exemple 2. Dans l'exemple du jeux de cartes l'événement A "La carte tirée est un Roi" (c'est-à-dire $A = \{R\clubsuit, R\diamondsuit, R\heartsuit, R\spadesuit\}$) implique l'événement B "La carte tirée est une tête (Valet, Dame ou Roi)" (c'est-à-dire $B = \{V\clubsuit, V\diamondsuit, V\heartsuit, V\spadesuit, D\clubsuit, D\diamondsuit, D\heartsuit, D\spadesuit, R\clubsuit, R\diamondsuit, R\heartsuit, R\spadesuit\}$)

Exemple 3. Dans l'exemple du lancer de dé, si A est l'événement "Le résultat est un nombre pair" (c'est-à-dire $A = \{2, 4, 6\}$) alors l'événement contraire $\overline{A}$ est l'événement "Le résultat est un nombre impair" (c'est-à-dire $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$).

Exemple 4. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. Alors le n-uplet des événements élémentaires: $(\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\})$ forme un système complet d'événements.

Exemple 5. Soit Ω un univers fini. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. Alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

Exemple 6. Dans l'exemple du lancer de dé le triplet d'événements $\big(\{1, 3\}, \{2, 5, 6\}, \{4\}\big)$ est un système complet d'événements.

1.3. **Probabilité.**

1.3.1. *Définition.* La question naturelle est maintenant de savoir pour une expérience aléatoire et un événement donnés si cet événement a beaucoup de chances ou non d'être réalisé. C'est ce que l'on formalise par la notion de probabilité. On associe à chaque événement A un nombre réel $P(A)$ compris entre 0 et 1 appelé probabilité de l'événement A. Plus $P(A)$ est proche de 1, plus l'événement A a de chances d'être réalisé. Plus précisément:

Définition 1.5. *Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire de cardinal fini. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ la tribu de ses événements. On appelle* **probabilité** *sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une application:*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \tag{4}$$
$$A \longmapsto P(A), \tag{5}$$

qui vérifie deux axiomes suivants:

(i) $P(\Omega) = 1$.
(ii) *Pour tout A et tout B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{6}$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé **espace probabbilisé fini**.

Pour tout événement A le réel $P(A)$ est appelé **probabilité de l'événement** A.

Remarque: L'axiome i. signifie que l'événement certain est toujours réalisé, et l'axiome ii. signifie que la probabilité pour que l'un ou l'autre de deux événements incompatibles soit réalisé est la somme des probabilités de ces deux événements. Par exemple le nombre de chances quand on lance un dé d'avoir un 2 ou un 3 est égal au nombre des chances d'avoir un 2 plus le nombre de chances d'avoir un 3.

1.3.2. *Quelques propriétés.*

Proposition 1.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. On a:*

(i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. *En particulier on en déduit $P(\emptyset) = 0$.*
(ii) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
(iii) *si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.*
(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. (i) On a $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donc d'après l'axiome ii., $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A})$. Or $A \cup \overline{A} = \Omega$ et d'après l'axiome i., $P(\Omega) = 1$ d'où $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ d'où:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{7}$$

(ii) On a $A = (A \setminus B) + (A \cap B)$ d'où d'après l'axiome ii., $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$. D'où:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{8}$$

(iii) Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Alors la formule précédente donne $P(B - A) = P(B) - P(A)$. Or $P(A \setminus B) \geq 0$, d'où:

$$P(A) \leq P(B). \tag{9}$$

(iv) On a $A \cup B = A \cup (B - A)$. Or $A \cap (B - A) = \emptyset$ d'où d'après l'axiome ii., on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$. Or d'après ce qui précède $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$. On en déduit:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{10}$$

□

Proposition 1.2 (Formule du crible de Poincaré). *Pour toute famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'événements, on a:*

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned} \tag{11}$$

En particulier, pour toute famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'événements 2 à 2 disjoints on a:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{12}$$

D'où, pour tout événement A:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}). \tag{13}$$

Démonstration. Par reccurrence sur n. On sait d'après le iv. de la proposition précédente que la formule est vraie pour $n = 2$. Supposons qu'elle est vraie pour $n = p$. Considérons $p + 1$ événements. On pose $B = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. On a alors, $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$, d'où d'après le ii. de la proposition précédente:

$$P(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i) = P(B) + P(A_{p+1}) - P(B \cap A_{p+1}). \tag{14}$$

Or $B \cap A_{p+1} = \bigcup_{i=1}^{p} \Big(A_i \cap A_{p+1} \Big)$, d'où d'après la relation de reccurrence

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{p} P(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{p+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_p); \\ P(B \cap A_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p} P(A_i \cap A_{p+1}) + \ldots \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{p+1}) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{p+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_p \cap A_{p+1}). \end{aligned} \tag{15}$$

En faisant la différence de ces deux lignes et en ajoutant $P(A_{p+1})$, on obtient bien, après changement d'indice et regroupement des sommes, la formule cherchée. □

1.3.3. *Equiprobabilité.* On peut considérer maintenant un cas particulier de probabilité:

Définition 1.6. *On dit qu'il y a* **équiprobabilité** *lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. On dit aussi que P est la* **probabilité uniforme** *sur* $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$

On a dans ce cas:

Proposition 1.3. *S'il y a équiprobabilité on a pour tout événement A:*

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}. \tag{16}$$

Démonstration. Notons p la probabilité commune des événements élémentaires. Alors la probabilité d'un événement A est:

$$P(A) = P(\underset{\omega\in A}{\cup} P(\{\omega\})) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{w\in A} p = p.Card(A). \tag{17}$$

En particulier on en déduit:

$$1 = P(\Omega) = p.card(\Omega). \tag{18}$$

D'où $p = \frac{1}{Card(\Omega)}$ et:

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}. \tag{19}$$

□

Remarque: Dans ce cas on peut aussi écrire:

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}. \tag{20}$$

Exemple 1. Pour un dé honête on a équiprobabilité entre chaque face. Chaque face a donc une probabilité égale à $\frac{1}{6}$.

Exemple 2. Si par contre le dé a été pipé de sorte que la face 6 "sorte" plus souvent alors la probabilité de $\{6\}$ est supérieure aux probabilités des autres faces. Dans le cas extrème ou la face 6 sort systématiquement on a: $p(\{6\}) = 1$ et $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = 0$.

Exemple 3. Dans l'exemple de l'urne contenant m boules blanches et $m-1$ boules noires, la probabilité de l'événement élémentaire "On tire une boule blanche" est égale à $\frac{m}{2m-1}$, alors que la probabilité de l'événement élémentaire "On tire une boule noire" est égale à $\frac{m-1}{2m-1.}$ Il n'y a donc pas équiprobabilité.

2. Indépendance et conditionnement

2.1. **Probabilités conditionnelles.** Il s'agit d'évaluer la probabilité qu'un événement se produise sachant qu'un autre événement s'est produit.

Exemple 1. Considérons une urne dans laquelle il y a $2n$ boules, n noires et n blanches. On tire deux boules successivement. Considérons les'événements A: "On a tiré une boule noire", B: "On a tiré une boule noire et une boule blanche". On suppose qu'il y a équiprobabilité entre chacunes des boules. L'univers est l'ensembles des couples de deux couleurs (on écrit b pour blanc et n pour noir):

$$\Omega = \{(b,b),(b,n),(n,b),(n,n)\}; \tag{21}$$
$$A = \{(b,b),(b,n),(n,b)\}; \tag{22}$$
$$B = \{(b,n),(n,b)\}. \tag{23}$$

On a donc $Card(\Omega) = 2^2 = 4$. On a $Card(A) = 3$, $Card(B) = 2$. On a donc:

$$P(A) = \frac{3}{4}; \qquad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \tag{24}$$

On se demande maintenant quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule noire sachant que l'on a tiré deux boules de couleurs différentes. On se place en fait maintenant dans l'univers des tirages successifs de deux boules de deux couleurs différentes, c'est à dire B et on considère l'événement $A\cap B$. Notons $P_B(A)$ la probabilité de $A\cap B$ dans B c'est-à-dire la probabilité d'avoir une boule noire sachant que l'on a tiré deux boules de couleurs différentes. On a:

$$P_B(A) = \frac{Card(A\cap B)}{Card(B)} = \frac{2}{2} = 1 \neq P(A). \tag{25}$$

Ce qui était parfaitement prévisible!

Remarque: On a aussi:

$$P_B(A) = \frac{Card(A\cap B)}{Card(B)} = \frac{Card(A\cap B)/Card(\Omega)}{Card(B)/Card(\Omega)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{26}$$

On est alors amené à poser plus généralement:

Définition 2.1. *Soit $(\Omega,\mathcal{P},P)$ un univers probabilisé. Soit B un événement non quasi-impossible $(P(B)\neq 0)$. On appelle* **Probabilité conditionnelle en B, ou probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé,** *la probabilité P_B (notée encore $P(.|B)$) définie par:*

$$\forall A\in\mathcal{P} \quad : \quad P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{27}$$

La terminologie est cohérente car on a:

Proposition 2.1. *La probabilité conditionnelle P_B définit une probabilité sur l'univers $(\Omega, \mathcal{P})$.*

Démonstration. i. On a $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

ii.Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une suite de n événements 2 à 2 incompatibles alors il en est de même de $(A_1 \cap B, \dots, A_n \cap B)$ De plus on a $\big(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} A_k\big) \cap B = \overset{n}{\underset{k=0}{\cup}}(A_k \cap B)$. On a alors:

$$\begin{aligned} P_B\big(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} A_k\big) &= \frac{P\big(\big(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} A_k\big) \cap B\big)}{P(B)} = \frac{P\big(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}}(A_k \cap B)\big)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k=0}^{n} P_B(A_k). \end{aligned} \tag{28}$$

□

En particulier, une probabilité conditionnelle possède toutes les propriétés des probabilités: probabilité de l'événement contraire, crible de poincaré...

2.2. **Indépendance.** On vient de voir que de façon générale pour deux événements A et B on a $P_B(A) \neq P(A)$. C'est-à-dire

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B). \tag{29}$$

Reprenons l'exemple des boules précédentes. La probabilité conditionnelle d'avoir un tirage bicolore sachant que l'une des boules est noire est supérieure à la probabilité d'avoir un tirage bicolore. Par contre considérons maintenant la probabilité conditionnelle d'avoir un tirage bicolore sachant que la première boule est noire. Elle est de $\frac{1}{2}$ comme la probabilité d'avoir un tirage bicolore. regardons de plus près ce qui se passe. On considère:

(i) A l'événement "On a tiré une boule noire".
(ii) B l'événement "On a tiré un tirage bicolore".
(iii) C l'événement "La première boule tirée est noire".

On a alors:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{1}{2}, \tag{30}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2}, \qquad P(B \cap C) = \frac{1}{4}. \tag{31}$$

On voit que l'on a $P(B \cap C) = P(B)P(C)$. Intuitivement, la probabilité d'avoir un tirage bicolore n'est pas influencée par la couleur de la première boule. Donc la probabilité d'avoir un tirage bicolore dont la première boule est noire est égale à celle d'avoir un tirage bicolore multiplié par celle d'avoir une première boule noire.

On est donc amené à poser la définition suivante:

Définition 2.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un univers probabilisé. On dit que deux événements A et B sont* **indépendants** *si et seulement si $P(A \cap B) = P(B)$.*

On peut généraliser cette définition à n événements $A_1, \dots, A_n$:

Définition 2.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un univers probabilisé. On dit que n événements $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants si et seulement si on a pour toute sous famille $(i_1, \dots, i_k)$ d'indices $(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$:*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}). \tag{32}$$

On a alors immédiatement:

Proposition 2.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un univers probabilisé. Soient $(A_1, \dots, A_n)$ n événements, alors si $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, ils sont 2 à 2 indépendants, mais la réciproque est fausse.*

Démonstration. Il suffit de prendre $k = 2$ dans la définition. □

Exemple 1. On lance 2 fois un dé cubique. On considère les événements:

(i) A: "Le premier nombre obtenu est pair": $A = \{2, 4, 6\} \times [1, 6]_{\mathbb{N}}$;
(ii) B: "Le second nombre obtenu est impair": $B = [1, 6]_{\mathbb{N}} \times \{1, 3, 5\}$.
(iii) C: "La somme des deux nombres obtenus est paire": $C = \{2, 4, 6\}^2 \cup \{1, 3, 5\}^2$.

On a alors:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \tag{33}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}, \tag{34}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0. \tag{35}$$

Les événements A, B, C sont donc 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.

On a de plus la propriété suivante:

Proposition 2.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un univers probabilisé. Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ des événements mutuellemnet indépendants. Alors les événements $(B_1, \ldots, B_n)$ où $B_k = A_k$ ou $\overline{A}_k$ sont mutuellement indépendants.*

Démonstration. Par réccurence sur le nombre de B_k égaux à $\overline{A}_k$. □

2.3. **La formule des probabilités totales.**

Proposition 2.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. Alors, on a:*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k). \tag{36}$$

Démonstration.

$$\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_k)} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) \tag{37}$$

Comme $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet dévénements $(A_k \cap B) \cap (A_l \cap B) = (A_k \cap A_l) \cap B = \emptyset \bigcap B = \emptyset$ si $k \neq l$. Ainsi:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \bigcap B) = P((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \bigcap B) = P(\Omega \bigcap B) = P(B). \tag{38}$$

□

2.4. **La formule des probabilités composées.**

Proposition 2.5. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisable. Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ n événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors:*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2 \big| A_1).P(A_3 \big| A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \big| A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \tag{39}$$

Démonstration. Recurence sur n.

Si $n = 2$, c'est la définition des probabilités conditionnelles:

$$P(A_1)P(A_2 \big| A_1) = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{A_1} = P(A_1 \cap A_2). \tag{40}$$

Supposons la formule vraie pour n événements. Soit $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ un n-uplet de $n+1$ événements alors:

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) &= p(A_1 \cap \cdots \cap A_n)p(A_{n+1} \big| A_1 \cap \cdots \cap A_n) \qquad \text{d'après le cas } n = 2; \\ &= P(A_1).P(A_2 \big| A_1).P(A_3 | A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \big| A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})p(A_{n+1} \big| A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ &\qquad \text{d'après l'hypothèse de reccurrence.} \end{aligned} \tag{41}$$

La formule est donc héréditaire. □

2.5. **La formule de Bayes.**

Proposition 2.6. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un univers probabilisé. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ (resp. $(A_n)_{n \geq 1}$) un système complets d'événements. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. Alors on a:*

$$P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)} \tag{42}$$

Démonstration. D'après la formule des probabilités totales le dénominateur est égal à $P(B)$; et d'après la définition des probabilités conditionnelles, le numérateur est égal à $P(A_i \cap B)$.

□

Remarque: On appelle aussi cette formule la formule des causes car si on interprète le système $(A_n n \in \mathbb{N}$ comme l'ensemble des causes pouvant provoquer les événements ultérieurs, $P(B|A_n)$ calcule la probabilité pour que la cause A_n provoque l'événement B. La probabilité $P(A_n|B)$ est celle, l'événement B ayant eu lieu, que ce dernier ait été provoqué par la cause A_n.