	Systèmes Linéaires	**Familles de vecteurs**	**Applications Linéaires**	**Matrices**
Notation		On note $(e_1,\dots,e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.		
Objet	$(S):\begin{cases} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1p}x_p & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{np}x_p & = & y_n \end{cases}$	$(v_1,\dots,v_p)$ avec $v_j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}$ $v_j=\phi(e_j).$	$\phi\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1p}x_p\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{np}x_p\end{pmatrix}$ ϕ est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour $1\le j\le p$: $v_j=\phi(e_j)$.	$M=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}$ La famille des vecteurs colonne de M est $(v_1,\dots,v_p)$
Opération	Résoudre le système	Soit $v=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ Trouver $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que: $x_1v_1+\cdots+x_pv_p=v.$	Soit $v=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ Trouver les antécédants de v par ϕ. C'est à dire: $\{u\in\mathbb{R}^p \,/\, \phi(u)=v\}$	Soit $Y\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Résoudre l'équation en $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$: $MX=Y.$
Noyau	Solutions du système homogène associé (avec $y_1=\cdots=y_n=0$).	Trouver les $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ tels que: $x_1v_1+\cdots+x_pv_p=0_{\mathbb{R}^n}.$	$\ker(\phi)=\Big\{u\in\mathbb{R}^p \,/\, \phi(u)=0_{\mathbb{R}^n}\Big\}.$	Trouver les $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^p$ tels que: $MX=0_{\mathbb{R}^n}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$
Image	Ensemble des $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que le système admet des solutions.	$\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)=$ $\Big\{x_1v_1+\cdots+x_pv_p \,/\, (x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p\Big\}.$	$\Im m(\phi)=\Big\{v\in\mathbb{R}^n \,/$ $\exists u\in\mathbb{R}^p,\ \phi(u)=v\Big\}.$ $=\mathrm{Vect}(\phi(e_1),\dots,\phi(e_p)).$	$\Im m(M)=\Big\{Y\in\mathbb{R}^n/$ $\exists X\in\mathbb{R}^p, MX=Y\Big\}.$
rang	Nombre de lignes (ou de pivots) non nulles après avoir mis le système sous forme échelonnée.	$\mathrm{rang}(v_1,\dots,v_p)=$ $\dim\big(\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)\big).$	$\mathrm{rang}(\phi)=\dim(\Im m(\phi))$ $=\mathrm{rang}(\phi(e_1),\dots,\phi(e_p)).$	$\mathrm{rang}(M)=\dim(\Im m(M))$ $=\mathrm{rang}(v_1,\dots,v_p).$

	Systèmes Linéaires	**Familles de vecteurs**	**Applications Linéaires**	**Matrices**
Injectivité / liberté	Le système homogène associé n'admet que la solution triviale $(x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$. $\Updownarrow$ Quel que soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ le système admet au plus une solution $\Updownarrow$ $\text{rang}(S) = p$	$(v_1, \ldots, v_p)$ est libre. $\Updownarrow$ $\text{rang}(v_1, \ldots, v_p) = p$	ϕ est injective. $\Updownarrow$ $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. $\Updownarrow$ $\text{rang}(\phi) = p$.	M est injective. $\Updownarrow$ $\ker(M) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. $\Updownarrow$ $\text{rang}(M) = p$.
Sur- jectivité / génératrice	Quel que soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ le système admet au moins une solution $\Updownarrow$ $\text{rang}(S) = n$	$(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$. $\Updownarrow$ $\text{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = \mathbb{R}^n$ $\Updownarrow$ $\text{rang}(v_1, \ldots, v_p) = n$	ϕ est surjective. $\Updownarrow$ $\Im m(\phi) = \mathbb{R}^n$. $\Updownarrow$ $\text{rang}(\phi) = n$.	M est surjective. $\Updownarrow$ $\Im m(M) = \mathbb{R}^n$. $\Updownarrow$ $\text{rang}(M) = n$.
Bijectivité / Base $n = p$	Système de Cramer $\Updownarrow$ Quel que soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ le système admet exactement une solution $\Updownarrow$ $\text{rang}(S) = n = p$	$(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p$. $\Updownarrow$ $v_1, \ldots, v_p$ est libre et génératrice. $\Updownarrow$ $\text{rang}(v_1, \ldots, v_p) = n = p$	ϕ est bijjective. $\Updownarrow$ $\Im m(\phi) = \mathbb{R}^n$ et $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. $\Updownarrow$ $\text{rang}(\phi) = n = p$.	M est inversible. $\Updownarrow$ $\exists N \in \mathcal{M}_n, MN = NM = I_n$ $\Updownarrow$ $\text{rang}(M) = n = p$.