Université Paris 7 **14 novembre 2016**
Algèbre

TD7 : extensions galoisiennes

Exercice 1 :

Soit L/K une extension finie et $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$, montrer que $L^H = \{\alpha \in L, \forall \sigma \in H, \sigma(\alpha) = \alpha\}$ est un sous-corps de L contenant K.

Exercice 2 :

Montrer qu'une extension finie L/K est galoisienne si et seulement si elle est engendrée par des éléments dont les polynômes minimaux sur K sont scindés à racines simples dans L.

Exercice 3 :

On considère $P(x) = x^3 - 3x + 1$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P.

1. Montrer que $\alpha^2 - 2$ est également racine de P.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est galoisienne.
3. Montrer que son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 4 :

Soit L/K une extension, et K_1, K_2 deux sous-corps de L contenant K tels que K_1/K et K_2/K soient galoisiennes.

1. Montrer K_1K_2 (le plus petit corps contenant K_1 et K_2) est galoisienne sur K.
2. Montrer que $(K_1 \cap K_2)/K$ est galoisienne.

Exercice 5 :

Soit L/K une extension de degré 2, où K est de caractéristique différente de 2.

1. Montrer que $L = K[\alpha]$, où α est racine d'un polynôme irréductible de degré 2.
2. Montrer que ce polynôme est séparable sur K
3. Montrer que L/K est galoisienne.

Exercice 6 :

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$ de degré 3, et L son corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $[L : \mathbb{Q}] \in \{1, 2, 3, 6\}$ (on pourra – par exemple – considérer le groupe de Galois de P).
2. Donner des exemples de polynômes P pour lesquels $[L : \mathbb{Q}]$ vaut respectivement 1 et 2.
3. Montrer que si $[L : \mathbb{Q}] = 3$, alors P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais scindé sur $\mathbb{R}$ (considérer la conjugaison complexe).

Exercice 7 :

Soit K un corps de caractéristique nulle, $P \in K[x]$ un polynôme irréductible séparable, et α, β deux de ses racines dans un corps de décomposition L.

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$.
2. On suppose que $\alpha - \beta \in K$. Montrer que $\sigma^n(\beta) = (n+1)\beta - n\alpha$.
3. En déduire que $\alpha - \beta \notin K$.

Exercice 8 :

On considère le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

1. Montrer que $[K:\mathbb{Q}]=4$.

2. Donner une base de K sur $\mathbb{Q}$.

3. Montrer que $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne en décrivant les éléments du groupe de Galois.

On considère une racine α de $x^2-(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$, et l'extension $L=K(\alpha)$.

4. Soit $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ qui envoie $\sqrt{2}$ sur $-\sqrt{2}$ et qui fixe $\sqrt{3}$. Montrer que $\frac{\sigma(\alpha^2)}{\alpha^2}=(\sqrt{2}-1)^2$.

5. Rappeler à quelle condition on peut prolonger un morphisme $\sigma : K\to L$ à $K(\alpha)\to L$, en fonction du polynôme minimal de α sur K.

6. Montrer que si $\alpha\notin K$, on peut prolonger σ en un élément de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ en posant $\sigma(\alpha)=(\sqrt{2}-1)\alpha$.

7. Montrer que dans tous les cas, $\sigma^2(\alpha)=-\alpha$.

8. En déduire $[L:K]$. On note $G=\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

9. Montrer que σ est d'ordre 4 dans G.

10. Montrer qu'il existe $\tau\in G$ qui fixe $\sqrt{2}$ mais pas $\sqrt{3}$, et tel que $\tau(\alpha)=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\alpha$.

11. Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne

12. Montrer que $L=\mathbb{Q}(\alpha)$.

13. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=L^{\langle\sigma\rangle}$.

14. Calculer le minimal de α sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (que vaut $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$?).

15. En déduire une expression de $\sqrt{3}$ en fonction de α (sous forme de fraction rationnelle).

Exercice 9 :

Soit $P(x)=x^5-4x+2$ et $L/\mathbb{Q}$ une extension de décomposition.

1. Montrer que $P(x)=x^5-4x+2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2. Montrer que $P(x)$ a trois racines réelles (regarder en $x=1$).

3. Soit τ la conjugaison complexe. Montrer que $\tau\in\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

4. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\simeq\mathfrak{S}_5$

Exercice 10 :

Soit L/K une extension galoisienne et $\alpha\in L$ de polynôme minimal P_α. On note $G=\mathrm{Gal}(L/K)$.

1. On note $H=\{\sigma\in G,\sigma(\alpha)=\alpha\}$. Montrer que $H=\mathrm{Gal}(L/K(\alpha))$.

2. Montrer que pour tout $\sigma\in G$, le sous-groupe de G qui fixe $\sigma(\alpha)$ vaut $\sigma H\sigma^{-1}$.

3. Montrer que $\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)} x-\sigma(\alpha)=P_\alpha(x)^{[L:K(\alpha)]}$.

Exercice 11 :

Soit K un corps et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K (son existence est admise).

1. Montrer que L/K est séparable si et seulement si $\#\,\mathrm{Hom}(L,\bar{K})=[L:K]$.

2. En déduire que L/K est séparable si et seulement si elle est engendrée par des éléments séparables.

Exercice 12 :

Soit K un corps, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K (son existence est admise), et $L\subset\bar{K}$ une extension finie de K. Montrer que L/K est normale si et seulement si pour tout $\sigma\in\mathrm{Hom}(L,\bar{K})$, $\sigma(L)\subset L$.