Université Paris 7 **12 septembre 2016**
Algèbre

TD1 : rappels

1 Groupes

Exercice 1 :
Soit G un groupe. Montrer que $x \mapsto x^2$ est un endomorphisme de G si et seulement si G est abélien.

Exercice 2 :
Donner les propriétés de chacun des groupes suivants (abélien, cyclique...) en donner des générateurs, et éventuellement le cardinal.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \quad \mathfrak{S}_n, \quad \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}_+^*$$

2 Anneaux

Exercice 3 :
Même question pour les anneaux suivants (intègre, principal, structure d'algèbre éventuelle, générateurs...)

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}[i], \quad \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, \quad \mathbb{K}[X], \quad M_n(\mathbb{K}), \quad \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$$

Exercice 4 :
On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ où $i^2 = -1$, et l'anneau quotient $A = \mathbb{Z}[i]/(1+3i)$.

1. Montrer que $i \equiv 3$ dans A.
2. En déduire que le morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z} \to A$ est surjectif.
3. Démontrer l'isomorphisme d'anneau $\mathbb{Z}[i]/(1+3i) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

3 Corps

Exercice 5 :
Montrer qu'un anneau commutatif intègre est un corps si et seulement si il possède exactement deux idéaux.

Exercice 6 :
Montrer qu'un morphisme de corps $K \to L$ est nécessairement injectif.

Exercice 7 :
Déterminer un isomorphisme de corps entre $\mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$ et $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.

4 Suites exactes

Exercice 8 :
Préciser les lois de groupes et morphismes pour lesquels on peut écrire les suites suivantes, en vérifiant qu'elles sont exactes

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$
$$1 \to S^1 \to \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^* \to 1$$
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times \to 1$$

5 Trois théorèmes

Exercice 9 :

1. Montrer qu'un groupe d'ordre premier p est cyclique.
2. Soit p premier et $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^p \equiv a \mod p$.
3. Quel est le dernier chiffre de $3^{123456789}$? et celui de $16^{09^{2015}}$?

Exercice 10 :

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux.

1. Expliciter l'application d'isomorphisme chinois $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les entiers congrus à 3 mod 7 et 2 mod 11.
3. Résoudre $x^2 - 4x + 15 = 0$ dans $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$.

Exercice 11 :

1. Quel est le nombre de bases de $\mathbb{F}_7^2$?
2. Calculer le cardinal de $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_7)$.
3. Calculer celui de $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{F}_5)$.
4. Donner la formule générale de $\#\mathrm{Sl}_n(\mathbb{F}_q)$.

6 Equations de degré 3 et 4

Exercice 12 :

Soit l'équation $x^3 + x - 2 = 0$.

1. En donner une racine évidente.
2. En appliquant les formules de Cardan, montrer l'égalité

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 1 \tag{1}$$

Exercice 13 : degré 3, méthode de Lagrange

On considère l'équation de degré 3 $x^3 + px + q = 0$, $q \neq 0$ et on note α_1, α_2, α_3 ses racines dans $\mathbb{C}$. On considère également la racine primitive cubique de l'unité $\omega = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$. et on introduit les *résolvantes de Lagrange* $\beta_1 = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3$ et $\beta_2 = \alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3$.

1. Montrer que $\beta_1^3 + \beta_2^3 = -27q$.
2. Montrer que $\beta_1^3\beta_2^3 = -27p^3$.
3. En déduire les solutions de l'équation.

Exercice 14 : degré 4, méthode de Descartes

On considère l'équation de degré 4.

1. Montrer que l'on peut se ramener à la forme $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, avec $q, r \neq 0$.
2. On pose $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, écrire les relations liant a, b, c, d à p, q, r.
3. Montrer que $2b = p - a^2 - q/a$, et déterminer une équation similaire pour d.
4. En déduire une équation de degré 6 dont a est solution.
5. En déduire les solutions de l'équation initiale.

7 Résultats utiles

Exercice 15 :

Soit K un corps fini de cardinal n.

1. On considère le morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to K$. Montrer que son noyau est de la forme $p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier.
2. Montrer que l'on a un morphisme injectif $\mathbb{F}_p \to K$.
3. Montrer qu'il existe d tel que $n = p^d$.

Exercice 16 :

1. Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Quand a-t-on $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$?
3. Que valent $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$?
4. Soit G un groupe et $x \in G$. Montrer l'application $\phi_x : \mathbb{Z} \to G$ donnée par $n \mapsto x^n$ est un morphisme de groupes. Quelle est son image ?
5. Montrer que le groupe engendré par x est isomorphe soit à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
6. Montrer que s'il existe k tel que $x^k = 1$, alors x est d'ordre fini et cet ordre divise k.
7. Montrer que si x est d'ordre n, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, x^m est d'ordre $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(m,n)}$.
8. Soit $y \in G$ tel que $xy = yx$. On suppose que x et y sont d'ordres finis m et n. Montrer que l'ordre de xy est fini et divise $\mathrm{ppcm}(m, n)$.
9. Montrer que $\frac{mn}{\mathrm{pgcd}(m,n)^2}$ divise l'ordre de xy.
10. En déduire l'ordre de xy si m et n sont premiers entre eux.
11. Donner un contre-exemple si n et n ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 17 :

1. Quel est le cardinal du plus grand groupe cyclique de $\mathfrak{S}_{10}$?

Exercice 18 :

1. Soit A une K-algèbre de dimension finie sur K. Montrer que si A est intègre, alors c'est un corps (on étudiera l'endomorphisme de multiplication par un élément).

Exercice 19 :

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes distingués de G tels que $H \cap K = \{1\}$ et $HK = G$.

1. Montrer que pour tous $h, k \in H \times K$, $hk = kh$.
2. Montrer que $G \simeq H \times K$.

Exercice 20 :

Soit G un groupe, on note $Z(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$ le centre de G.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.
3. Montrer que l'on peut avoir $G/Z(G)$ abélien sans que G soit abélien.

Exercice 21 :

Soit G un groupe d'ordre p^n, p premier.

1. Montrer que toute classe de conjugaison $\{g^{-1}hg, g \in G\}$ est de cardinal une puissance de p.
2. En déduire que le nombre de classes réduites à un élément est multiple de p.
3. En déduire que $Z(G)$ est non trivial.
4. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.