Université Paris 7 **9 décembre 2016**
Algèbre

TD9 : calculs de groupes de Galois

Exercice 1 :

Soit $P(x) = x^5 - 4x + 2$ et $L/\mathbb{Q}$ une extension de décomposition.

1. Montrer que $P(x) = x^5 - 4x + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2. Montrer que $P(x)$ a trois racines réelles (regarder en $x = 1$).

3. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_5$

Exercice 2 :

On pose $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x - 2$.

1. Factoriser $P(x)$ modulo 2.

2. Factoriser $P(x)$ modulo 3.

3. En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

4. On vérifie facilement que P a exactement deux racines modulo 11 : en déduire son groupe de Galois.

Exercice 3 :

On pose $P(x) = x^7 - 3$, et L son corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $L = \mathbb{Q}(\zeta_7, \alpha)$ où α est une racine de P.

2. Montrer que $[L = \mathbb{Q}] = 42$.

3. On note G le groupe de Galois de P. Montrer que G est l'ensemble des

$$\sigma_{a,b} : P(\zeta, \alpha) \mapsto P(\zeta^a, \alpha\zeta^b)$$

pour $a, b \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\sigma_{a,b}\sigma_{a',b'} = \sigma_{aa',ab'+b}$, de sorte que G est isomorphe au groupe de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_7)$$

(c'est le groupe des applications affines de la droite $\mathbb{F}_7$).

5. Montrer que G contient un sous-groupe d'ordre 7 qui est distingué. C'est l'unique 7-Sylow de G.

6. Montrer que G contient 7 sous-groupes d'ordre 6 qui sont conjugués.

Exercice 4 :

On considère l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_{49})/\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2. Faire le diagramme de tous les sous-corps de L.