TD4 : polynômes symétriques

1 Polynômes symétriques

Exercice 1 :

Soit $P = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} x_{\sigma(1)}^4 x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$ un polynôme symétrique de $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Exprimer P en termes des fonctions élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Exercice 2 :

On considère les trois racines complexes α, β, γ de $y^3 + 2y^2 - 3y + 5$. Calculer les polynômes ayant pour racines

1. $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$
2. $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$
3. α^2, β^2, γ^2
4. $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$

Exercice 3 :

Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$ ayant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ pour racine.

Exercice 4 :

1. Soient trois nombres complexes α, β, γ tels que $\alpha^i + \beta^i + \gamma^i \in 6\mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Montrer que cela reste vrai pour tout $i \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que $\alpha^i + \beta^i + \gamma^i = i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

Exercice 5 :

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme irréductible unitaire de degré n. On suppose que toutes les racines complexes $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ de P vérifient $|\alpha_i| \leqslant 1$.

1. Montrer que les coefficients de P vérifient $|a_i| \leqslant \binom{n}{i}$.
2. Montrer que pour tout k, les complexes $\alpha_1^k, \ldots \alpha_n^k$ sont racines d'un polynôme P_k de degré n dont les coefficients $a_{k,i}$ sont entiers et tels que $\left|a_{k,i}\right| \leqslant \binom{n}{i}$.
3. Montrer qu'il existe i et deux entiers $k < l$ tels que $\alpha_i^k = \alpha_i^l$.
4. Montrer qu'il existe m tel que $P \mid x^m - 1$.

2 Discriminant

Exercice 6 :

1. calculer $\Delta(x_1, x_2)$ en fonction de σ_1 et σ_2
2. faire de même avec trois variables x_1, x_2, x_3, en supposant que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Exercice 7 :

On considère n variables $x_0, \ldots x_{n-1}$, et on indice les matrices de 0 à $n - 1$.

1. Montrer que $\delta = \sqrt{\Delta}$ est le déterminant de la matrice de Vandermonde (x_i^j).
2. En déduire que Δ est le déterminant de la matrice de sommes de Newton (N_{i+j}).

3 Groupe symétrique

Exercice 8 :

1. Décomposer $(25)(56)(13254)$ et $(123)(124)$ en cycles à supports disjoints.
2. Même question avec $x \mapsto 7x + 2 \bmod 10$.

Exercice 9 :

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.
2. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(i, i+1)$
3. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par le cycle $(1, 2, \dots n)$ et la transposition $(1, 2)$.
4. Montrer que si p est premier, un p-cycle et une transposition (quelconques) engendrent $\mathfrak{S}_p$.

Exercice 10 :

Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_{10}$?

Exercice 11 :

Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes non trivial

$$\epsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\} \tag{1}$$

et qu'il s'agit de la signature.