Université Paris 7 **10 octobre 2016**
Algèbre

TD5 : extensions de corps

Exercice 1 :

On considère l'extension $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}}) \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sqrt{2} \in K$.
2. En considérant une éventuelle décomposition sur une base, montrer que $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3. En déduire $[K : \mathbb{Q}]$.
4. Obtenir le même résultat en déterminant le polynôme minimal de $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 :

On considère $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et en déterminer un polynôme annulateur $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
2. Déterminer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
3. On pose $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, calculer $\alpha\beta$ et montrer que $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Exercice 3 :

1. Quels sont les degrés de $\sqrt{3}$ et $\sqrt[3]{7}$ sur $\mathbb{Q}$?
2. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$.

Exercice 4 :

Soient α et β deux éléments algébriques de degrés m et n premiers entre eux.
Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

Exercice 5 :

1. Montrer que si $k + l \leqslant n$, alors $k! \times l! \mid n!$.
2. Soit P un polynôme de degré n sur K, et L un corps de décomposition. Montrer que $[L : K] \mid n!$.
3. On suppose P irréductible, montrer que $n \mid [L : K] \mid n!$.

Exercice 6 :

1. Montrer que l'on a une extension $\mathbb{F}_{p^k} \to \mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si $k \mid n$.
2. En déduire qu'un polynôme irréductible de degré k a une racine dans $\mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si $k \mid n$.
3. Redémontrer le fait que $x^{p^n} - x$ est produit de tous les irréductibles de degré $k \mid n$ sur $\mathbb{F}_p$.

Exercice 7 :

Soient $F \subset K \subset L$ des extensions. Montrer que si $\alpha \in L$ est algébrique sur F, il l'est sur K, et que le degré de α sur K est inférieur au degré de α sur F.

Exercice 8 :

On considère $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{3})$.

1. Montrer que $x^4 - 2$ et $x^3 - 3$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.
2. En déduire $[K : \mathbb{Q}]$.

Exercice 9 :

Soient $p_1, \dots p_r$ des nombres premiers distincts, et $K_r = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots \sqrt{p_r})$.

1. En raisonnant par récurrence, calculer $[K_r : \mathbb{Q}]$ ainsi qu'une base de K_r sur $\mathbb{Q}$.

2. En déduire que $\sqrt{p_1} + \dots \sqrt{p_r} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10 :

1. Montrer que $P(x) = x^5 - x - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2. On note $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

3. Montrer que $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

4. On note $\beta \in \mathbb{C}$ une racine de Φ_8. Montrer que $\mathbb{Q}(\beta + \beta^{-1}) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.

5. Déterminer le minimal de $\beta + \beta^{-1}$.

Exercice 11 :

1. Montrer qu'une extension $[L : K]$ de degré premier est monogène (de la forme $K(a)$).

2. Soient $K \subset L$ des corps. Montrer que si P est irréductible sur K et de degré premier à $[L : K]$, alors P est également irréductible sur L.

3. Soit x algébrique sur K de degré impair. Montrer que $K(x^2) = K(x)$.

Exercice 12 :

Donner un élément primitif de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

Exercice 13 :

Soit p un nombre premier et x, y deux indéterminées. On considère les corps $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subset L = \mathbb{F}_p(x, y)$.

1. Montrer que $P(t) = t^p - x^p$ est scindé sur L, puis que c'est le polynôme minimal de x sur K.

2. Montrer que $[L : K] = p^2$.

3. Soit $z = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \in L$. Montrer que $[K(z) : K] \leqslant p$.

4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $z \in L$ tel que $L = K(z)$.

Exercice 14 :

Soit L/K une extension finie, et $\alpha, \beta \in L$ de polynôme minimal respectif $P, Q \in K[x]$. Montrer que P est irréductible sur $K(\beta)$ si et seulement si Q est irréductible sur $K(\alpha)$.