Université de Paris **17 décembre 2021**
M2 – Théorie des nombres

Feuille 11: fonctions L d'Artin

1 Représentations d'Artin

Soit G un groupe fini et $\rho : G \to V$ une représentation, on note $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ son caractère $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$: deux représentations sont isomorphes si elles ont même caractère.
Les caractères de représentations irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur G pour le produit $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_x \overline{\chi}(x)\psi(x)$.
Si ρ est une représentation d'un sous-groupe H de G, la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ sur G est de caractère $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_\rho)(g) = \frac{1}{\#H} \sum_{x^{-1}gx \in H} \chi_\rho(x^{-1}gx)$.
Si L/K est galoisienne de groupe de Galois G, et $H \subset G$ est un sous-groupe, pour toute représentation galoisienne ρ de H on a $L(\rho, L/L^H, s) = L(\mathrm{Ind}_H^G(\rho), L/K, s)$.

Rappels :
- la représentation régulière sur $\mathbb{C}[G]$ (via $g.h = gh$) de dimension $\#G$ est de caractère $r_G(1) = \#G$ et $r_G(g) = 0$ sinon
- en décomposant en irréductibles $r_G = \sum n_i\chi_i$ on a donc $\#G = \sum n_i^2$ avec n_i la dimension de χ_i. (évaluation en 1).

Exercice 1 : Induction de Brauer

On considère $f(x) = x^5 - 4x - 1$.

1. Montrer que f est irréductible et que son groupe de Galois est $\mathfrak{S}_5$

f est irréductible modulo 3 (on voit qu'il n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_9$ car $x^9 - x \equiv -1 \bmod f, 3$). Il a également deux racines complexes, donc son groupe de Galois contient un 5-cycle et une transposition, c'est $\mathfrak{S}_5$.

2. On note σ_2 une transposition, $\sigma_{2,3}$ le produit d'une transposition et d'un 3-cycle, etc.
On note 1 la représentation triviale, $P : \mathfrak{S}_5 \to \mathbb{C}^5$ la représentation de permutation, et V la représentation standard telle que $P = 1 \oplus V$ (V est la restriction de P à l'hyperplan $\sum x_i = 0$).
Écrire la table des caractères de χ_1, χ_P et χ_V.

On écrit les 7 classes. Le caractère de la représentation triviale est trivial. Celui de la représentation par permutation consiste à compter le nombre de point fixe du cycle considéré. Puisque $P = 1 \oplus V$, on obtient la représentation standard en faisant la différence.

	1	σ_2	$\sigma_{2,2}$	σ_3	$\sigma_{2,3}$	σ_4	σ_5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_P	5	3	1	2	0	1	0
χ_V	4	2	0	1	-1	0	-1

3. Si σ_c est une permutation d'ordre d, note H_c le sous-groupe engendré par σ_c et $\psi_c : H_c \to \mathbb{C}^\times$ le caractère $\sigma_c \mapsto \exp(2i\pi/d)$.
On note $\chi_c = \mathrm{Ind}_{H_c}^{\mathfrak{S}_5}(\psi_c)$ le caractère de la représentation induite de H_c à $\mathfrak{S}_5$.
Déterminer la table des caractères $\chi_{(2,3)}$ et χ_5.

— $\chi_c(1)$ est simplement l'indice de H_c
— si H_c ne contient aucun élément de la classe de g, alors $\chi_c(g) = 0$
— sinon, $\chi_c(g)$ est la somme des $\psi_c(h)$ quand g est conjugué à $h \in H_c$, avec multiplicité le nombre de telles conjugaisons.

Pour χ_5, le 5-cycle σ_5 est conjugué aux 4 5-cycles de H_c de 5 manières, donc $\chi_5(\sigma_5) = \sum \psi_5(\sigma_5^k) = -1$.
Pour $\chi_{2,3}$, on a $\psi(\sigma_2) = -1$, et σ_2 n'est conjugué qu'à lui-même dans H_c, il l'est par $\langle\sigma_2\rangle \times \mathfrak{S}_3$. Avec la multiplicité, $\chi_{2,3}(\sigma_2) = -2$.
On note $\psi(\sigma_3) = j$ la racine cubique de l'unité. Puisque σ est conjugué à lui-même ou son carré, à chaque fois par le sous-groupe $\langle\sigma_3\rangle \times \mathfrak{S}_2$, on obtient $\chi_{2,3}(\sigma_3) = (j + \bar{j}) = -1$.
Enfin, $\sigma_{2,3}$ d'ordre 6 est conjugué à lui-même et son inverse, à chaque fois de 2×3 manières et on a $\chi_{2,3}(\sigma_3) = (\zeta_6 + \bar{\zeta}_6) = 1$.

On obtient donc la table

	1	σ_2	$\sigma_{2,2}$	σ_3	$\sigma_{2,3}$	σ_4	σ_5
χ_5	24						-1
$\chi_{2,3}$	20	-2		-1	1		

4. En déduire que $L(\chi_V, s) = \dfrac{L(\psi_5, s)}{L(\psi_{2,3}, s)}$.

On a $\chi_V = \chi_5 - \chi_{2,3}$, donc on a $\mathrm{Ind}(\psi_5) = V \oplus \mathrm{Ind}(\psi_{2,3})$ et la relation multiplicative correspondante sur les fonctions L.

Pascal Molin, version 17 décembre 2021.