Université de Paris **17 décembre 2021**
M2 – Théorie des nombres

Feuille 11: fonctions L d'Artin

1 Représentations d'Artin

Soit G un groupe fini et $\rho : G \to V$ une représentation, on note $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ son caractère $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$: deux représentations sont isomorphes si elles ont même caractère.
Les caractères de représentations irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur G pour le produit $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_x \overline{\chi}(x)\psi(x)$.

Si ρ est une représentation d'un sous-groupe H de G, la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ sur G est de caractère $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_\rho)(g) = \frac{1}{\#H} \sum_{x^{-1}gx \in H} \chi_\rho(x^{-1}gx)$.

Si L/K est galoisienne de groupe de Galois G, et $H \subset G$ est un sous-groupe, pour toute représentation galoisienne ρ de H on a $L(\rho, L/L^H, s) = L(\mathrm{Ind}_H^G(\rho), L/K, s)$.

Exercice 1 : Induction de Brauer

On considère $f(x) = x^5 - 4x - 1$.

1. Montrer que f est irréductible et que son groupe de Galois est $\mathfrak{S}_5$

2. On note σ_2 une transposition, $\sigma_{2,3}$ le produit d'une transposition et d'un 3-cycle, etc.
On note 1 la représentation triviale, $P : \mathfrak{S}_5 \to \mathbb{C}^5$ la représentation de permutation, et V la représentation standard telle que $P = 1 \oplus V$ (V est la restriction de P à l'hyperplan $\sum x_i = 0$).
Écrire la table des caractères de χ_1, χ_P et χ_V.

3. Si σ_c est une permutation d'ordre d, note H_c le sous-groupe engendré par σ_c et $\psi_c : H_c \to \mathbb{C}^\times$ le caractère $\sigma_c \mapsto \exp(2i\pi/d)$.
On note $\chi_c = \mathrm{Ind}_{H_c}^{\mathfrak{S}_5}(\psi_c)$ le caractère de la représentation induite de H_c à $\mathfrak{S}_5$.
Déterminer la table des caractères $\chi_{(2,3)}$ et χ_5.

4. En déduire que $L(\chi_V, s) = \dfrac{L(\psi_5, s)}{L(\psi_{2,3}, s)}$.

Pascal Molin, version 17 décembre 2021.