Feuille 1 : Valuations, anneaux de Dedekind

1 Valuations, localisation

Exercice 1 :

Une valeur absolue est dite *non-archimédienne* si elle vérifie l'inégalité ultramétrique

$$|x+y| \leqslant \max(|x|, |y|).$$

Montrer que $|\cdot|$ est ultramétrique si et seulement si la restriction de $|\cdot|$ à $\mathbb{Z}$ est bornée.

Exercice 2 :

On suppose que les valeurs absolues $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ définissent la même topologie sur K. Montrer qu'elles sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe $e > 0$ tel que $|\cdot|_2 = |\cdot|_1^e$.

Exercice 3 :

Soit A un anneau commutatif. Pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, on note $S_\mathfrak{p} = A \setminus \mathfrak{p}$ et $A_{(\mathfrak{p})} = S_\mathfrak{p}^{-1}A$ le localisé de A en $\mathfrak{p}$.
Cette définition s'étend à tout A-module M, on pose $M_{(\mathfrak{p})}$ l'ensemble des fractions $\frac{m}{s}$ pour $m, s \in M \times S_\mathfrak{p}$, modulo l'identification $\frac{m}{s} = \frac{n}{t}$ s'il existe $u \in S_\mathfrak{p}$ tel que $u(tm - sn) = 0$.

1. Montrer que $M \to M_{(\mathfrak{p})}$ est injective si et seulement si la multiplication $M \to^{\times s} M$ est injective pour tout $s \in S_\mathfrak{p}$. Cette condition est vérifiée si A est inclus dans un corps K et M dans un K-espace vectoriel (très souvent dans ce cours).

2. Montrer que sous cette condition, $M = \bigcap_\mathfrak{p} M_{(\mathfrak{p})}$.

2 Entiers algébriques

Exercice 4 :

1. Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 5 :

1. Soit B un anneau, et A un sous-anneau. Pour $a \in B$, montrer l'équivalence

1. a est racine d'un polynôme unitaire $P(x) \in A[x]$.
2. $A[a]$ est un A-module de type fini
3. il existe un A-module de type fini $M \subset B$ contenant A tel que $aM \subset M$.

2. Montrer que la somme et le produit de deux entiers algébriques sont algébriques (on pourra donner deux démonstrations, utilisant respectivement les points 1 et 3).

3 Anneaux de Dedekind

Exercice 6 :

Soit A un anneau de Dedekind, montrer que pour tous idéaux fractionnaires I, J,
on a $I \cap J = I \cdot J \cdot (I+J)^{-1}$.

Exercice 7 :

Soit A un anneau de Dedekind. Montrer que tout idéal fractionnaire de A est engendré par au plus deux éléments, le premier pouvant être choisi arbitrairement parmi les éléments non nuls de l'idéal.

Exercice 8 : Inverse, valuation

Soit A un anneau de Dedekind, K son corps des fractions, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.

1. Soit $x \in \mathfrak{p}$, montrer qu'il existe $y \notin xA$ tel que $y\mathfrak{p} \subset xA$.
2. Montrer qu'avec ces valeurs on a $\mathfrak{p}^{-1} = A + (\frac{y}{x})A$.
3. Soit I un idéal entier et $k \geqslant 0$, montrer que $I \subset \mathfrak{p}^k$ si et seulement si $(\frac{y}{x})^k I \subset A$.
4. Soit $\alpha = \sqrt[3]{5}$, on admet que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ est de Dedekind. Calculer l'inverse de l'idéal $\mathfrak{p} = (3, 1+\alpha)$.

Exercice 9 :

Soit K un corps de nombres de degré n.

1. Montrer que tout idéal entier non nul contient une infinité d'entiers naturels.
2. Réciproquement, montrer que l'entier $b > 0$ est contenu dans au plus b^n idéaux entiers.

Exercice 10 : Critère de Dedekind I

Soit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ un corps de nombre, où θ est un entier algébrique annulé par $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irréductible unitaire. Soit p un nombre premier ne divisant pas $[\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$, et

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x)^{e_i} \bmod p$$

une factorisation en irréductibles de $f(x)$ modulo p, où l'on considère des relevés $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de même degré.
On définit pour $1 \leqslant i \leqslant r$ l'idéal $\mathfrak{p}_i = p\mathbb{Z}_K + f_i(\theta)\mathbb{Z}_K$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\theta] + \mathfrak{p}_i$.
2. Montrer que $\mathfrak{p}_i$ est un idéal premier de degré résiduel $\deg(f_i)$.
3. Montrer l'égalité $p\mathbb{Z}_K = \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i}$.

Exercice 11 : Critère de Dedekind II

On reprend les notations de l'exercice précédent, sauf qu'on ne suppose plus que $\mathbb{Z}[\theta]$ est p-maximal, c'est-à-dire que l'indice $[\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$ est premier à p. Le but de cet exercice est de donner un critère effectif de p-maximalité.
On définit $g(x) = \prod_i f_i(x)$ le radical de f modulo p, et $R_p = \{x \in \mathbb{Z}[\theta], \exists m \geqslant 0, x^m \in p\mathbb{Z}[\theta]\}$ le radical de (p) dans $\mathbb{Z}[\theta]$.

1. Montrer que $R_p = p\mathbb{Z}[\theta] + g(\theta)\mathbb{Z}[\theta]$ (c'est-à-dire que $a(\theta) \in R_p \Leftrightarrow g \mid a(x) \bmod p$).
2. On suppose que $p \mid [\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}_K$ tel que $a \notin \mathbb{Z}[\theta]$ mais $pa \in \mathbb{Z}[\theta]$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{Z}_K$ tel que $b \notin \mathbb{Z}[\theta]$ mais $pb \in \mathbb{Z}[\theta]$ et $g(\theta)b \in \mathbb{Z}[\theta]$
3. Montrer qu'on a dans ce cas $pb \in R_p$ et $g(\theta)b \in R_p$.
4. On suppose de plus que $h(x) = \prod f_i^{e_i - 1}$ et $r(x) = \frac{f(x) - g(x)h(x)}{p} \in \mathbb{Z}[x]$ sont premiers entre eux modulo p. En écrivant les éléments de R_p sous la forme $a(x) = g(x)U(x) + pV(x)$ (question 1), montrer que les conditions $pb \in R_p$ et $g(\theta)b \in R_p$ impliquent $b \in \mathbb{Z}[\theta]$.

5. Réciproquement, supposons $e_i \geqslant 2$ et $f_i(x) \mid r(x) \bmod p$. En posant $R(x) = f_i(x)^{e_i-1} \prod_{j \neq i} f_j(x)^{e_j}$, montrer que $\alpha = \frac{R(\theta)}{p}$ est un entier algébrique de degré 2.

6. En déduire le critère : $\mathbb{Z}[\theta]$ est p-maximal si et seulement si h et r sont premiers entre eux modulo p.

7. Montrer que le critère d'Eisenstein est un cas particulier de ce critère.