Feuille 3 : corps locaux

Exercice 1 : nombres p-adiques

1. Calculer la limite de $\frac{n!}{n!+1}$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout premier p.

2. On note p_n le n-ième nombre premier, et $p_\infty = \infty$. On se donne une famille $a_n \in \mathbb{Z}_{p_n}$, et on pose $a_\infty = 0$. Construire une suite de rationnels $z_n \in \mathbb{Q}$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots \infty\}$, $\lim_{n\to\infty} |z_n - a_i|_{p_i} = 0$ (on pourra utiliser la suite $y_n = 1 + \prod_{i=1}^n p_i^{n+1}$).

Exercice 2 : lemme de Hensel

Soit A un anneau de valuation discrète complet, et $f \in A[x]$. On suppose que $a_0 \in A$ et qu'il existe $\epsilon < 1$ tel que $|f(a_0)| \leqslant \epsilon \, |f'(a_0)|^2$ avec $f'(a_0) \neq 0$. On considère la suite

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

1. Montrer que $a_n \in A$, $|f'(a_n)| = |f'(a_0)|$ et $|f(a_n)| \leqslant \epsilon^{2^n} \, |f'(a_0)|^2$.

2. Montrer que a_n converge vers une racine $a \in A$ de f qui vérifie $|a - a_0| \leqslant \epsilon \, |f'(a_0)|$, et qu'une telle racine est unique.

Exercice 3 : Dedekind via complétions

1. Factoriser $x^4 - 17$ sur $\mathbb{Q}_2$.

2. Décrire la décomposition de l'idéal (2) dans l'anneau des entiers de $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17})$.

Exercice 4 : anneau d'entier non monogène

Soit $K/\mathbb{Q}$ un corps de nombres de degré n.

1. Montrer que si un nombre premier $p < n$ est totalement décomposé dans l'anneau d'entiers $\mathbb{Z}_K$, ce dernier ne peut pas s'écrire sous la forme $\mathbb{Z}[\alpha]$.

2. À l'aide du polynôme $f(x) = x^3 - x + 8$, donner un exemple d'anneau d'entiers non monogène.

Exercice 5 :

Soit p un premier impair, on note μ_{p-1} le groupe des racines $(p-1)$-ièmes de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}_p^\times = p^{\mathbb{Z}} \times \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$.

2. Montrer que pour p impair, $\mathbb{Q}_p$ n'a que trois extensions quadratiques.

3. Montrer de même que $\mathbb{Q}_2$ possède 7 extensions quadratiques.

Exercice 6 : Extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$

1. Soit $f \geqslant 1$, on note $\overline{\alpha}$ un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{p^f}^\times$, et $\overline{P}(x) = x^f + \overline{a_1} x^{f-1} + \dots \overline{a_f}$ un polynôme minimal sur $\mathbb{F}_p$. Soient $a_i \in \mathbb{Z}_p$ des relèvements des $\overline{a_i}$, et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ une racine de $P(x) = \sum a_i x^i$. Montrer que $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ est une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f.

2. Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré f. Montrer que $K = \mathbb{Q}_p(\zeta)$ où ζ est une racine $(p^f - 1)$-ième de l'unité.

3. Montrer que pour tout n, $\mathbb{Q}_p$ possède une unique extension non ramifiée de degré n.

Exercice 7 : Extensions totalement ramifiées

Pascal Molin, version 7 octobre 2021.

Soit K un corps local et L/K une extension finie de degré n. On note π une uniformisante de $\mathbb{Z}_L$.

1. Montrer que si L/K est totalement ramifiée, alors $\mathbb{Z}_L = \mathbb{Z}_K[\pi]$.

2. Montrer que si L/K est totalement ramifiée, le polynôme minimal de π est un polynôme d'Eisenstein.

3. Montrer que si α est annulé par un polynôme d'Eisenstein sur $\mathbb{Z}_K$, l'extension $K(\alpha)/K$ est totalement ramifiée.

Exercice 8 : lemme de Krasner

Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie, et $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}_p}$.

1. Montrer que tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est une isométrie. Montrer que si $|\alpha - \beta| < |\alpha - \alpha'|$ pour tout conjugué α' de α sur K distinct de α, alors $K(\alpha) \subset K(\beta)$.

Exercice 9 : Nombre d'extensions ramifiées

Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie, $A = \mathbb{Z}_K$ son anneau d'entiers et π une uniformisante.

1. Soit $f(x) = \sum a_i x^i \in A[x]$ un polynôme irréductible unitaire séparable de degré d, on l'écrit $f(x) = \prod(x - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}_p}$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout polynôme unitaire $g(x) = \sum b_i x^i \in A[x]$ tel que $\max |a_i - b_i| < \delta$ s'écrit $g(x) = \prod(x - \beta_i)$ avec $|\alpha - \beta| < \epsilon$.

2. Soit $E = \left\{ a_0 + a_1 x + \cdots + x^d \in A[x], |a_i| < 1, |a_0| = |\pi| \right\}$ l'ensemble des polynômes d'Eisenstein de degré d, et $D = \{K(\alpha), \exists f \in E, f(\alpha) = 0\}$ l'ensemble des extensions qu'ils définissent. Montrer que D est fini (utiliser le lemme de Krasner).

Exercice 10 : Extensions finies de $\mathbb{Q}_p$

Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie de degré $n = ef$.

1. On pose $E = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^f-1})$, montrer que E est la plus grande sous-extension non ramifiée de K.

2. Montrer que K/E est totalement ramifiée.

3. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ n'a qu'un nombre fini d'extensions de degré n.