Feuille 4 : Unités, groupe des classes

1 Outils en vrac

— La borne de Minkowski d'un corps K de degré n et de signature (r_1, r_2) est

$$M_K = \sqrt{|\mathrm{disc}(K)|}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2}\frac{n!}{n^n} \tag{1}$$

Tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{Z}_K$ contient un élément α tel que $\left|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)\right| \leqslant M_K N(\mathfrak{a})$.

— Quelques constantes de Minkowski

Signature (r_1, r_2)	(2,0)	(0,1)	(3,0)	(1,1)	(4,0)	(2,1)	(0,2)
$(\frac{\pi}{4})^{-r_2}\frac{n!}{n^n}$	0.5	0.63661	0.2222	0.28299	0.09375	0.11937	0.15198

— Le discriminant de $x^3 + px + q$ est $-4p^3 - 27q^2$.

— Si un polynôme unitaire $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme d'Eisenstein en un premier p, alors en notant α une racine de f, (p) est totalement ramifié dans l'anneau d'entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$ et $\mathbb{Z}[\alpha]$ y est p-maximal.

— Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irréductible unitaire, dans $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ on a $N_{K/\mathbb{Q}}(k - \alpha) = f(k)$.

— Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique, où $d \in \mathbb{Z}$ est sans facteur carré. On note d_K son discriminant : si $d \equiv 1 \bmod 4$ on a $d_K = d$ et $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$, sinon $d_K = 4d$ et $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Un premier $p \geqslant 3$ qui ne divise pas d_K est décomposé dans K si d_K est un carré modulo p, et inerte sinon.

2 Groupe des classes

Exercice 1 :

Montrer que toute classe d'idéaux contient un idéal entier $\mathfrak{a}$ de norme $N(\mathfrak{a}) \leqslant M_K$ (considérer un élément $\alpha \in I^{-1}$).

Exercice 2 :

On considère le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-43})$.

1. Calculer la décomposition de 2 et 3 dans K.
2. Calculer M_K, et montrer que $\mathbb{Z}_K$ est principal.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}_K \setminus \mathbb{Z}$ qui engendre un idéal premier, montrer que $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ est un nombre premier.
4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Z}_K \setminus \mathbb{Z}$, $N(\alpha) \geqslant 11$.
5. Soient x et $y \neq 0$ deux entiers premiers entre eux tels que $x^2 + xy + 11y^2 < 121$. Montrer que $x^2 + xy + 11y^2$ est un nombre premier.

remarque : on montre de la même manière que $x^2 + x + 41$ est premier pour $0 \leqslant x \leqslant 39$, mais la construction s'arrête là.

Exercice 3 :

Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, où α est une racine de $x^3 + 6x + 6$.

1. Déterminer le discriminant d_K de K et son anneau d'entiers.
2. Déterminer la signature de K, et sa constante de Minkowski M_K.
3. Déterminer les idéaux premiers de norme inférieure à M_K
4. Calculer $N(\alpha)$ et $N(\alpha + 2)$, en déduire que $\mathrm{Cl}(K)$ est cyclique.
5. Montrer que $u = \alpha + 1 \in \mathbb{Z}_K^\times$ est une unité. On admet qu'elle est non triviale dans $\mathbb{Z}_K^\times/(\mathbb{Z}_K^\times)^3$ (il se trouve que c'est une unité fondamentale).

Pascal Molin, version 14 octobre 2021.

6. Montrer que 2, $2u$ et $2u^2$ ne sont pas des cubes dans $\mathbb{Z}_K$ (regarder modulo $\mathfrak{p}_7$).

7. En déduire $\mathrm{Cl}(K)$.

Exercice 4 :

Soit $d > 1$ un entier sans facteur carré, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ et d_K son discriminant. Soit p un nombre premier décomposé dans K, et $\mathfrak{p}$ un idéal au dessus de p.

1. Montrer que pour tout $i \geqslant 1$ tel que $p^i < \frac{|d_K|}{4}$, $\mathfrak{p}^i$ n'est pas principal.

2. En déduire que $h_K \geqslant 1 + \lfloor \frac{\log|d_K|}{\log p} \rfloor$.

3 Unités

Exercice 5 : Unités des corps cubiques

Soit K un corps de nombres cubique, tel que $\mathrm{disc}(K) < 0$.

1. Montrer que la signature de K est $(1,1)$ (commencer par supposer $\mathbb{Z}_K$ monogène).

2. Désormais, on utilise le plongement réel pour voir K comme un sous-corps de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 1$ tel que $\mathbb{Z}_K^\times = \left\{\pm\epsilon^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\epsilon)$, et que le polynôme minimal de ϵ est de la forme $g(x) = (x-\epsilon)(x - \frac{e^{it}}{\sqrt{\epsilon}})(x - \frac{e^{-it}}{\sqrt{\epsilon}})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer l'inégalité d'Artin : $|\mathrm{disc}(g(x))| < 4(\epsilon^3 + 6)$ (utiliser sans preuve l'inégalité magique $\left(\frac{u^3+u^{-3}}{2} - \cos t\right)^2 \sin^2 t < \frac{u^6+6}{4}$, valable pour tous réels u, t).

5. Montrer que si $u > 1$ est une unité et vérifie $4(u^{\frac{3}{2}} + 6) < |\mathrm{disc}(K)|$, alors $u = \epsilon$.

6. Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ où $\alpha^3 + \alpha = 1$. Déterminer une unité fondamentale de K (on donne $\alpha \approx 0.682$ dans $\mathbb{R}$).

Pascal Molin, version 14 octobre 2021.