

## Feuille 5 : fonctions zeta et L

### 1 FONCTION ZÊTA

#### Exercice 1 : Quelques séries de Dirichlet

1. Montrer que  $\prod_p (1 + \frac{1}{p^2}) = \frac{15}{\pi^2}$ .

On reconnaît  $\prod_p (1 - p^{-4}) / (1 - p^{-2}) = \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}$ .

2. Soit  $n = \prod_{i=1}^r p^{e_i}$  un entier, écrit sous forme factorisée. On pose  $\mu(n) = (-1)^r$  si chaque  $e_i = 1$ ,  $\mu(n) = 0$  sinon. Exprimer à l'aide de  $\zeta(s)$  les séries de Dirichlet associées à  $\mu(n)$  et  $\mu(n)^2$ .

$$\begin{aligned} - \prod_p (1 - p^{-s}) &= 1/\zeta(s) \\ - \prod_p (1 + p^{-s}) &= \zeta(s)/\zeta(2s) \end{aligned}$$

3. Montrer que  $\sum_n \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$  (écrire  $\varphi(n)$  comme une convolution).

On a  $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$ , donc cette série de Dirichlet est la multiplication de  $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$  par  $\sum_n \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1)$ .

#### Exercice 2 : Lemme de Mertens

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ , avec  $x > 1$ .

1. Montrer que

$$\log |\zeta(x + iy)| = \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(ny \log p)}{np^{nx}}$$

On développe le produit eulérien et le logarithme, et on écrit  $\log |\cdot| = \operatorname{Re}(\log(\cdot))$

$$\begin{aligned} \log |\zeta(x + iy)| &= \sum_p \log |1 - p^{-s}| \\ &= \sum_p \operatorname{Re} \log(1 - p^{-s}) \\ &= \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Re}(p^{-ns})}{n} \end{aligned}$$

En prenant  $s = x + iy$  et en décomposant sous forme trigonométrique on obtient le résultat voulu.

2. Vérifier  $3 + 4 \cos t + \cos(2t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Cela vaut  $2(1 + \cos t)^2$ .

3. Montrer que l'on a

$$\left| \zeta(x)^3 \zeta(x + iy)^4 \zeta(x + 2iy) \right| \geq 1.$$

En utilisant la question 1, la somme vaut

$$\sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{3 + 4 \cos(ny \log p) + \cos(2ny \log p)}{np^{nx}}$$

4. En déduire que  $\zeta(s)$  n'a pas de zéro pour  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ .

Il suffit de montrer le résultat pour  $s = 1 + iy$ , puisque  $\zeta$  ne s'annule pas pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$  par convergence absolue du produit eulérien.

Si il existe  $y > 0$  tel que  $\zeta(1 + iy) = 0$ , puisque l'inégalité précédente reste valable en  $x + iy = 1 + iy$  (par passage à la limite  $x \rightarrow 1$ ) le zéro d'ordre 4 en  $1 + y$  soit être compensé par un pôle d'ordre 4, donc  $\zeta$  doit avoir un pôle en  $1 + 2y$ . Impossible (on sait que zeta a un seul pôle simple en  $s = 1$ ).

### Exercice 3 : équation fonctionnelle de zeta

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de la classe de Schwartz. Sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} f(x) dx$$

vérifie la formule de Poisson  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)$ . On pose  $\Theta(t) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$ .

1. Sachant que  $x \mapsto e^{-\pi x^2}$  est sa propre transformée de Fourier, montrer l'équation fonctionnelle  $\sqrt{t}\Theta(t) = \Theta(\frac{1}{t})$ .

On pose  $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ . En utilisant  $\widehat{f(ax)}(y) = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{y}{a})$ , la transformée de Fourier de  $f$  est  $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{y^2}{t}}$ .

On a donc  $2\Theta(t) + 1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} (2\Theta(1/t) + 1)$ .

2. En écrivant la fonction L complétée  $\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$  montrer que  $\Lambda(2s)$  est la transformée de Mellin de  $\psi(t) = \frac{\Theta(t)-1}{2}$ .

Pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$  on fait rentrer la série  $\zeta$  dans la transformée de Mellin  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$  pour obtenir  $\Lambda(2s) = \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \sum_{m \geq 1} e^{-t} \pi^{-s} t^s n^{-2s} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t}$ . Il s'agit bien la transformée de Mellin de  $\psi$ .

3. Montrer l'équation fonctionnelle  $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$ .

$\psi(t)$  vérifie l'équation  $\psi(\frac{1}{t}) = \sqrt{t}\psi(t) + \frac{\sqrt{t}-1}{2}$ .

On coupe l'intégrale de  $\Lambda(2s)$  en  $t = 1$ , et sur le terme  $\int_0^1$  on change de variable  $t \mapsto \frac{1}{t}$  pour obtenir  $\int_1^\infty \left( \sqrt{t}\psi(t) + \frac{\sqrt{t}-1}{2} \right) t^{-s} \frac{dt}{t}$ .

La fraction rationnelle s'intègre en  $\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}-1}{2} t^{-s} \frac{dt}{t} = \frac{1}{1-2s} - \frac{1}{2s}$  pour  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ .  
Ainsi on a isolé les pôles sous forme de fractions rationnelles et on a

$$\Lambda(2s) = \int_1^\infty \psi(t)t^s \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \psi(t)t^{-s+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} + \frac{1}{1-2s} - \frac{1}{2s}$$

pour  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ .

Or les deux intégrales convergent et sont holomorphes pour  $s \in \mathbb{C}$  donc le membre de droite est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  et invariant par la symétrie  $s \mapsto \frac{1}{2} - s$ .

En repassant à  $\Lambda(s)$  on obtient la symétrie  $s \mapsto 1 - s$  et les pôles simples de résidu 1 en 0 et 1 (ceci pour la fonction complétée  $\Lambda$ , mais le pôle en 0 est dû à la fonction gamma, ce n'est pas un pôle de zêta).

## 2 DEDEKIND ET DIRICHLET

On appelle caractère de Dirichlet de module  $n$  une fonction totalement multiplicative  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , non nulle et périodique de période  $n$ . On appelle conducteur de  $\chi$  le plus petit  $m \mid n$  tel que  $\chi(1 + m\mathbb{Z}) = 1$ , de sorte que pour tout  $k$  premier à  $n$  on a  $\chi(k) = \tilde{\chi}(k \bmod m)$  où  $\tilde{\chi}$  est un caractère de module  $m$ . Un caractère dont le conducteur est égal au module est dit primitif.

Si  $\chi$  est un caractère primitif modulo  $m$ , on pose la fonction L de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

### Exercice 4 :

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit le symbole de Kronecker  $\left(\frac{D}{n}\right)$  en étendant le symbole de Jacobi  $\left(\frac{D}{m}\right)$ , déjà défini pour tout  $m > 0$  impair, avec les valeurs

$$\left(\frac{D}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid D, \\ 1 & \text{si } D \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1 & \text{si } D \equiv \pm 3 \pmod{8}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \left(\frac{D}{-1}\right) = \frac{D}{|D|}$$

Soit  $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$  un entier sans facteur carré. On note  $D$  le discriminant du corps  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ( $D = d$  si  $d \equiv 1 \pmod{4}$  et  $D = 4d$  sinon).

On admet que pour  $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ,  $n \mapsto \chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$  est un caractère primitif modulo  $|D|$ .

1. Montrer que pour  $\text{Re}(s) > 1$ , on a  $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(\chi_D, s)$ .

À la main, il suffit de vérifier en chaque premier  $p$  l'égalité de facteurs eulériens  $\prod_{\mathfrak{p} \mid p} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s}) = (1 - p^{-s})(1 - \chi_D(p)p^{-s})$ . En notant  $T = p^{-s}$ , on a :

- si  $p \mid D$ ,  $p$  est ramifié, on a  $\chi_D(p) = 0$  et l'égalité  $(1 - T) = (T) \times 1$ .
- si  $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ , alors  $D$  est un carré modulo  $p$  donc  $p$  est décomposé dans  $K$  (critère de Dedekind) et on a bien l'égalité  $(1 - T)^2 = (1 - T)(1 - T)$
- si  $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ ,  $D$  n'est pas un carré modulo  $p$  donc  $p$  est inerte et on vérifie  $(1 - T^2) = (1 - T)(1 + T)$ .

On a utilisé dans les deux derniers points le critère de Dedekind, le polynôme minimal du générateur standard de l'anneau des entiers est de discriminant  $D$ , donc se factorise modulo  $p$  si et seulement si  $D$  est un carré modulo  $p$ .

2. Soient  $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$  et  $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$  deux corps quadratiques distincts. On pose  $L = K_1 K_2$  leur compositum. Montrer que l'on a une factorisation

$$\zeta_L(s) = \zeta(s) L(\chi_{D_1}, s) L(\chi_{D_2}, s) L(\chi_{D_3}, s)$$

où  $D_1, D_2, D_3$  sont des entiers que l'on définira.

On pose  $d_3 = d_1 d_2 \bmod \mathbb{Z}^2$ , de sorte que  $\mathbb{Q}(\sqrt{d_{1,2,3}})$  sont les trois sous-corps quadratiques de  $L$ , qui est une extension galoisienne de groupe  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_2$ .

On pose  $D_1, \dots, D_3$  les discriminants des  $\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$ .

Soit  $p$  un nombre premier. On liste les situations possibles, en vérifiant à nouveau l'égalité au niveau des facteurs eulériens  $(1 - T^f)^g = (1 - T) \prod_{i=1}^3 (1 - \chi_{D_i}(p)T)$ , pour un premier  $p$  ayant une décomposition de type  $4 = gef$  où  $g$  le nombre de premiers au-dessus de  $p$ ,  $e$  leur indice de ramification et  $f$  leur degré résiduel (l'extension  $L/\mathbb{Q}$  est galoisienne).

On va utiliser le fait que ces degrés sont croissants voire multiplicatifs dans les tours d'extensions.

On sait aussi que dans une extension galoisienne, la suite exacte

$$1 \rightarrow I_p \rightarrow D_p \rightarrow \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow 1$$

signifie que les idéaux premiers commencent par se décomposer dans l'extension de décomposition, puis prennent de l'inertie avec l'augmentation du degré résiduel, et enfin se ramifient.

Remarquons enfin que par définition,  $D_1 D_2 D_3$  est un carré donc si  $p \nmid D_1 D_2 D_3$  on a  $\left(\frac{D_1}{p}\right) \left(\frac{D_2}{p}\right) \left(\frac{D_3}{p}\right) = 1$ , de sorte qu'aucun premier n'est inerte partout; de même le groupe de Galois ne contient pas d'élément d'ordre 4.

- soit chaque symbole vaut 1,  $p$  est décomposé dans chaque  $K_i$ . Il est alors totalement décomposé dans le compositum : en effet  $L \otimes \mathbb{Q}_p$  est une sous-algèbre de  $K_1 \otimes K_2 \otimes \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p^4$ , donc  $e(\mathfrak{p})f(\mathfrak{p}) = 1$  pour chaque premier  $\mathfrak{p}$  au-dessus de  $p$ . On a alors  $(1 - T)^4 = (1 - T)(1 - T)^3$ .
- soit deux symboles valent  $-1$ , par exemple  $p$  est inerte dans  $K_1$  et  $K_2$  et décomposé dans  $K_3$ . Puisque l'extension est galoisienne, qu'il y a au moins deux premiers au-dessus de  $p$  et un degré résiduel  $f \geq 2$ , on a exactement deux premiers de degré 2 au-dessus de  $p$ , et  $(1 - T^2)^2 = (1 - T)(1 - T)(1 + T)(1 + T)$ .
- si  $p > 2$  est ramifié il l'est dans exactement deux extensions, par exemple  $K_1$  et  $K_2$ , et il est inerte ou décomposé dans  $K_3$ . Dans les deux cas, le ou les premiers de  $K_3$  se ramifient et on a  $(1 - T^2) = (1 - T)(1 + T)$  dans le cas inerte ou  $(1 - T)^2 = (1 - T)(1 - T)$  dans le cas décomposé.
- enfin, si  $p = 2$  est ramifié dans chacune des trois extensions (on a  $D_i \equiv 0 \bmod 4$  pour tout  $i$ ), il est totalement ramifié dans  $L$ . En effet si le groupe d'inertie était un sous-groupe strict, alors  $L^I/\mathbb{Q}$  serait une extension quadratique non ramifiée, impossible. On a alors simplement  $(1 - T) = (1 - T) \times 1^3$ .

### Exercice 5 : Corps cyclotomiques

Soit  $n$  un entier, on note  $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$  le  $n$ -ième corps cyclotomique. Pour tout premier  $p$ , on note  $n = p^e m$  avec  $p \nmid m$ , et  $f_p$  l'ordre de  $p$  modulo  $m$ . On pose également  $g_p = \frac{\varphi(m)}{f_p}$ .

1. Montrer que pour  $\text{Re}(s) > 1$  la fonction zeta de Dedekind de  $K_n$  s'écrit

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_p (1 - p^{-f_p s})^{-g_p}$$

Soit  $p$  premier, on a une factorisation  $\Phi_n(x) = \frac{\Phi_m(x^{p^e})}{\Phi_m(x^{p^{e-1}})} = \Phi_m(x)^{\varphi(p^e)} \bmod p$ . (écrire qu'une racine  $z$  est d'ordre  $p^e m$  ssi  $z^{p^e}$  est d'ordre  $m$  et que  $z^{p^{e-1}}$  ne l'est pas, et faire sortir les puissances  $p$ ). Par

ailleurs,  $\Phi_m(x) = \prod_{i=1}^{g_p} f_i(x) \bmod p$  avec  $\deg(f_i) = f_p$ , l'ordre du Frobenius. On en déduit une décomposition en idéaux premiers  $(p) = \prod_{i=1}^{g_p} \mathfrak{p}_i^{\varphi(p^e)}$  où le degré du corps résiduel de  $\mathfrak{p}_i$  est  $f_p$ . La décomposition annoncée s'ensuit.

2. Soit  $G$  un groupe abélien fini de cardinal  $n$ , et  $g \in G$  d'ordre  $f$ . Montrer que

$$\prod_{\chi} (1 - \chi(g)T) = (1 - T^f)^{\frac{n}{f}}$$

Notons  $\omega$  une racine  $f$ -ième de l'unité, on a  $1 - T^f = \prod_{i=1}^f 1 - \omega^i T = \prod_{\psi} (1 - \psi(g)T)$  où  $\psi$  parcourt les caractères du sous-groupe  $\langle g \rangle$ . Chacun de ces caractères s'étend de  $[G : \langle g \rangle] = \frac{n}{f}$  manières en caractères de  $G$ , d'où le résultat.

3. Si  $\chi$  est un caractère de Dirichlet modulo  $n$ , on note  $\tilde{\chi}$  le caractère primitif associé. En notant toujours  $n = p^e m$ , montrer que  $\chi(p) = \tilde{\chi}(p)$  si le conducteur de  $\tilde{\chi}$  divise  $m$ , et  $\chi(p) = 0$  sinon.

Clair : si  $p$  divise le conducteur,  $\chi(p) = \tilde{\chi}(p) = 0$ , et sinon la valeur est non nulle et commune.

4. En déduire la factorisation

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{\chi \bmod n} L(\tilde{\chi}, s)$$

D'après les deux questions précédentes,  $\prod_{\chi \bmod n} (1 - \chi(p)T) = \prod_{\chi \bmod m} (1 - \chi(p)T) = (1 - T^f)^{\varphi(m)/f}$ , d'où le résultat.