

Feuille 5 : fonctions zeta et L

1 FONCTION ZÊTA

Exercice 1 : Quelques séries de Dirichlet

1. Montrer que $\prod_p (1 + \frac{1}{p^2}) = \frac{15}{\pi^2}$.
2. Soit $n = \prod_{i=1}^r p^{e_i}$ un entier, écrit sous forme factorisée. On pose $\mu(n) = (-1)^r$ si chaque $e_i = 1$, $\mu(n) = 0$ sinon. Exprimer à l'aide de $\zeta(s)$ les séries de Dirichlet associées à $\mu(n)$ et $\mu(n)^2$.
3. Montrer que $\sum_n \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ (écrire $\varphi(n)$ comme une convolution).

Exercice 2 : Lemme de Mertens

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x > 1$.

1. Montrer que

$$\log |\zeta(x + iy)| = \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(ny \log p)}{np^{nx}}$$

2. Vérifier $3 + 4 \cos t + \cos(2t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que l'on a

$$\left| \zeta(x)^3 \zeta(x + iy)^4 \zeta(x + 2iy) \right| \geq 1.$$

4. En déduire que $\zeta(s)$ n'a pas de zéro pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1$.

Exercice 3 : équation fonctionnelle de zeta

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la classe de Schwartz. Sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} f(x) dx$$

vérifie la formule de Poisson $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)$. On pose $\Theta(t) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$.

1. Sachant que $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est sa propre transformée de Fourier, montrer l'équation fonctionnelle $\sqrt{t} \Theta(t) = \Theta(\frac{1}{t})$.
2. En écrivant la fonction L complétée $\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$ montrer que $\Lambda(2s)$ est la transformée de Mellin de $\psi(t) = \frac{\Theta(t)-1}{2}$.
3. Montrer l'équation fonctionnelle $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$.

2 DEDEKIND ET DIRICHLET

On appelle caractère de Dirichlet de module n une fonction totalement multiplicative $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, non nulle et périodique de période n . On appelle conducteur de χ le plus petit $m \mid n$ tel que $\chi(1 + m\mathbb{Z}) = 1$, de sorte que pour tout k premier à n on a $\chi(k) = \tilde{\chi}(k \bmod m)$ où $\tilde{\chi}$ est un caractère de module m . Un caractère dont le conducteur est égal au module est dit primitif.

Si χ est un caractère primitif modulo m , on pose la fonction L de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit le symbole de Kronecker $\left(\frac{D}{n}\right)$ en étendant le symbole de Jacobi $\left(\frac{D}{m}\right)$, déjà défini pour tout $m > 0$ impair, avec les valeurs

$$\left(\frac{D}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid D, \\ 1 & \text{si } D \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1 & \text{si } D \equiv \pm 3 \pmod{8}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \left(\frac{D}{-1}\right) = \frac{D}{|D|}$$

Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ un entier sans facteur carré. On note D le discriminant du corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ($D = d$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$ et $D = 4d$ sinon).

On admet que pour $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$, $n \mapsto \chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ est un caractère primitif modulo $|D|$.

1. Montrer que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(\chi_D, s)$.

2. Soient $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ et $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ deux corps quadratiques distincts. On pose $L = K_1 K_2$ leur compositum. Montrer que l'on a une factorisation

$$\zeta_L(s) = \zeta(s)L(\chi_{D_1}, s)L(\chi_{D_2}, s)L(\chi_{D_3}, s)$$

où D_1, D_2, D_3 sont des entiers que l'on définira.

Exercice 5 : Corps cyclotomiques

Soit n un entier, on note $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ le n -ième corps cyclotomique. Pour tout premier p , on note $n = p^e m$ avec $p \nmid m$, et f_p l'ordre de p modulo m . On pose également $g_p = \frac{\varphi(m)}{f_p}$.

1. Montrer que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ la fonction zeta de Dedekind de K_n s'écrit

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_p (1 - p^{-f_p s})^{-g_p}$$

2. Soit G un groupe abélien fini de cardinal n , et $g \in G$ d'ordre f . Montrer que

$$\prod_{\chi} (1 - \chi(g)T) = (1 - T^f)^{\frac{n}{f}}$$

3. Si χ est un caractère de Dirichlet modulo n , on note $\tilde{\chi}$ le caractère primitif associé. En notant toujours $n = p^e m$, montrer que $\chi(p) = \tilde{\chi}(p)$ si le conducteur de $\tilde{\chi}$ divise m , et $\chi(p) = 0$ sinon.

4. En déduire la factorisation

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{\chi \bmod n} L(\tilde{\chi}, s)$$