Université de Paris **12 novembre 2021**
M2 – Théorie des nombres

Feuille 6 : caractères additifs

On ce propose dans cette feuille d'expliciter les caractères continus des groupes additifs usuels. On ne demande pas de montrer que les isomorphismes sont topologiques.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $e(x) = \exp(2i\pi x)$. On note $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $U = e(\mathbb{T}) = \{z, |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^\times$ sa version multiplicative.
Si G est un groupe topologique, on note $\widehat{G}$ le dual de Pontryagin de G, c'est-à-dire le groupe des caractères unitaires continus $\chi : G \to U$ muni de la topologie compacte-ouverte.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, et que $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

> Ces deux groupes sont discrets donc les caractères sont automatiquement continus. Ils sont caractérisés par l'image de 1 respectivement dans $U \simeq \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $U[n] \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Montrer que tout caractère continu de $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto e(xy)$ pour un $y \in \mathbb{R}$ (on pourra chercher une équation différentielle en considérant $\int_x^{x+a} \chi(t)\,\mathrm{d}t$).

> Deux approches :
> — un morphisme continu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se relève en morphisme continu du revêtement universel $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est une application linéaire $x \mapsto xy$.
> — soit χ un tel caractère, on montre qu'il vérifie une équation différentielle en écrivant $\chi(x) = \frac{\int_x^{x+a}\chi(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^a \chi(t)\,\mathrm{d}t}$ pour un $a > 0$ tel que le dénominateur A est > 0, ce qui est possible par continuité puisque $\chi(0) = 1$. En dérivant (c'est possible à droite), $\chi'(x) = \frac{\chi(a)-1}{A}\chi(x)$ d'où en intégrant l'équation différentielle $\chi(x) = e^{\lambda x}$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ puisque χ est unitaire. Ce qui conclut.
> — attention, travailler par densité est délicat ici, $\chi(1)$ détermine χ sur $\mathbb{Z}$, mais il faudrait travailler beaucoup plus pour étendre à $\mathbb{Q}$.

3. En déduire le dual de $\mathbb{R}$, et celui de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

> $\mathbb{R}$ est donc autodual via $y \mapsto (\chi_y : x \mapsto e(xy))$.
> On a par dualité de Pontryagin $\hat{\widehat{\mathbb{Z}}} = \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.
> On peut aussi dire qu'un caractère de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un caractère de $\mathbb{R}$ trivial sur $\mathbb{Z}$, donc de la forme χ_y avec $y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 : séries de Laurent

Soit p un nombre premier, on note $K_p = \mathbb{F}_p((x))$ muni de la valuation $v(\sum_i a_i x^i) = \min\{i, a_i \neq 0\}$. Soit $\chi = K_p \to U$ un caractère continu.

1. Montrer que $\chi_0 : K_p \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui à $\sum a_i x^i$ associe $e(\frac{a_{-1}}{p})$ est un caractère unitaire.

> C'est bien un caractère, d'ordre p, continu car son noyau contient l'ouvert $\mathbb{Z}_p$ (donc χ est continu en 0, donc partout).

Pascal Molin, version 12 novembre 2021.

2. Montrer que pour tout n on peut écrire $\chi(x^n) = e(\frac{b_{-n-1}}{p})$. pour une famille $b_n \in \mathbb{F}_p$ telle que $b_n = 0$ pour $n \ll 0$.

> x^n est d'ordre p, son image est bien une racine p-ième. Puisque $x^n \to 0$, on doit avoir $b_n = 0$ pour $n \ll 0$.

3. On note $\chi_0 : K_p \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui à $\sum a_i x^i$ associe $e(\frac{a_{-1}}{p})$. Déterminer $\widehat{K_p}$ à l'aide de χ_0.

> Notons $b = \sum_n b_n x^n$ la série de Laurent obtenue par la question précédente. par définition $\chi()$. On a $\chi(x^k) = \chi_0(bx^k)$, donc $\chi(a) = \chi_0(ab)$. Ainsi, K_p est autodual.

4. Soit $q = p^n$ une puissance p et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Déterminer $\widehat{\mathbb{F}_q}$.

> Comme groupe additif, $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p^n$ et les caractères sont de la forme $(a_i), (b_i) \mapsto \prod e(\frac{a_i y_i}{p}) = e(\frac{\sum a_i b_i}{p})$. En particulier, les caractères se factorisent par une application bilinéaire non dégénérée $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$: on peut prendre la trace, et l'on obtient que les caractères sont de la forme $a \mapsto e(\frac{\mathrm{Tr}(ab)}{p})$ pour $b \in \mathbb{F}_q$.

5. Déterminer $\widehat{K_q}$, où $K_q = \mathbb{F}_q((x))$.

> Soit ψ un caractère non trivial sur $\mathbb{F}_q$, ce qui permet de définir comme précédemment $\chi_0(\psi(a_{-1}))$. Alors les caractères sont les $b \mapsto (a \mapsto \chi_0(ab))$, et K_q est autodual.

Exercice 3 : le cas p-adique

On considère l'application «partie fractionnaire» $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définie par $\{\sum_i a_i p^i\}_p = \sum_{i<0} a_i p^i$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbb{T}[p^\infty] = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$, le groupe de Prüfer des éléments d'ordre une puissance de p.

> Clair en regardant image et noyau de l'application $\{x\}_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

2. Soit $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p}$. Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que $\chi(p^N \mathbb{Z}_p) = 1$.

> Les $p^n\mathbb{Z}_p$ sont une base de voisinages compacts de 0, leurs images sont une suite de sous-groupes compacts qui tendent vers 1 : les sous-groupes compacts non triviaux sont les racines de l'unité qui ne sont pas contenus dans un voisinage de 1, donc $\chi(p^N\mathbb{Z}_p) = \{1\}$ pour N assez grand.

3. En déduire $\widehat{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{T}[p^\infty]$.

> Puisque $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$, un caractère χ est caractérisé par l'image de 1. Par continuité on doit avoir $\chi(p^n) = 1$ pour n assez grand, donc $\chi(1)$ est bien de la forme $e(x)$ pour $x \in \mathbb{T}[p^\infty]$.

4. Soit $\chi \in \widehat{\mathbb{Q}_p}$, on pose $\psi(x) = \chi(p^N x)$ pour $N > 0$ tel que $\chi(p^N\mathbb{Z}_p) = 1$. En considérant les $\psi(1/p^n)$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\psi(x) = \exp(2i\pi\{ax\}_p)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$.

ψ est trivial sur $\mathbb{Z}_p$, donc $1/p^n$ est envoyé sur une racine p^n-ième de l'unité $e(\frac{u_n}{p^n})$. On a $p\frac{u_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{u_n}{p^n}$ donc $u_{n+1} \equiv u_n \mod p^n$, la suite u_n converge vers $u \in \mathbb{Z}_p$, d'où le résultat en posant $a = up^{-N}$.

5. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est autodual.

On a bien un isomorphisme $\mathbb{Q}_p \to \widehat{\mathbb{Q}_p}$ donné par $y \mapsto \chi_y : x \mapsto e(\{xy\}_p)$.

Exercice 4 :

1. Montrer que $(\mathbb{T})_{\text{tors}} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion, il se décompose en partie primaires (c'est la décomposition en éléments simples des fractions), donc $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_p \mathbb{T}[p^\infty] = \bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ d'après l'exercice précédent.

2. Montrer que $\widehat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}$, où on note $\overline{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le complété profini de $\mathbb{Z}$.

La dualité transforme les sommes en produits : $\widehat{\bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} = \prod \widehat{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} = \prod \mathbb{Z}_p = \overline{\mathbb{Z}}$.

Exercice 5 : Adèles et caractères de $\mathbb{Q}$

On note $\mathbb{A}$ le groupe des adèles de $\mathbb{Q}$. Pour $y_\infty \in \mathbb{R}$, on note $\chi_{y_\infty}(x) = e(xy_\infty)$, et pour $y_p \in \mathbb{Q}_p$ on note $\chi_{y_p}(x) = e(\{xy_p\}_p)$.

1. Soit $y = (y_\infty, y_2, y_3, \dots) \in \mathbb{A}$. Montrer que $\chi_y(x) = \chi_{y_\infty}(x)^{-1} \prod_p \chi_{y_p}(x)$ est un caractère continu de $\mathbb{Q}$.

Ce sont des caractères de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_p$, donc a fortiori de $\mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\chi_y = 1$ si y est dans le plongement diagonal de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{A}$.

Si $x \in \mathbb{Q}$ on a $x \mod \mathbb{Z} = \prod \{x\}_p$ donc $\chi_y(x) = 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$.

3. Montrer que tout caractère de $\mathbb{Q}$ est de la forme χ_y, pour $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \prod_p \mathbb{Z}_p$.

Une fois défini $y_\infty \in \mathbb{R}$, on peut supposer que $\chi(1) = 1$, de sorte que χ est dans le dual de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui est $\prod_p \mathbb{Z}_p$.

4. Montrer que $\mathbb{A} = \mathbb{Q} + [0,1[\times \prod_p \mathbb{Z}_p$, en déduire que $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ (algébriquement).

On a montré que $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{Z}}$.
L'écriture de $\mathbb{A}$ proposée est une variante de l'approximation faible : soit $y \in \mathbb{A}_f$, on pose q le produit des dénominateurs tel que $qy \in \prod \mathbb{Z}_p$ et on choisit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $v_(x - qy) \geqslant v_p(q)$ pour tout p, de sorte que $x/q - y \in \prod_p \mathbb{Z}_p$. Enfin en décalant d'un entier on peut aussi prendre la composante réelle dans $[0,1[$ (et la représentation est unique, ce qui montre que $[0,1[\times \prod \mathbb{Z}_p$ est un domaine fondamental de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$).

Exercice 6 : Compacité, connexité

Soit G un groupe abélien localement compact.

1. Montrer que G est compact ssi $\widehat{G}$ discret.

> Si G est discret, la topologie compacte ouverte est celle de la convergence simple (ie ponctuelle), pour laquelle $\widehat{G}$ est un fermé de l'espace des fonctions continues $G \to S$, qui est compact.
> Réciproquement, supposons G compact. Soit V un voisinage de $1 \in S$ ne contenant aucun sous-groupe non-trivial. Alors $\{\chi, \chi(G) \subset V\}$ est par définition un ouvert de $\widehat{G}$ ne contenant que l'identité, donc $\widehat{G}$ est discret.

On suppose désormais G compact (et toujours abélien).

2. Montrer que si $U \subset G$ est un voisinage ouvert et fermé contenant 1, il existe un sous-groupe ouvert $H \subset U$.

> Par compacité de U et continuité de la multiplication, il existe un ouvert V contenant 1 tel que $VU \subset U$, le sous-groupe H engendré par V convient.

3. Montrer que G est connexe ssi $\widehat{G}$ est sans torsion.

> S'il existe un caractère d'ordre n, il est à valeur dans le groupe discret des racines n-ièmes de l'unité, dont les images inverses forment une partition de G en ouverts disjoints.
> Réciproquement, si G n'est pas connexe, il existe un voisinage ouvert et fermé de l'élément neutre, strictement inclus dans G. Il existe alors un sous-groupe ouvert H inclus dans U, alors G/H est discret, donc fini, et non trivial. Tout caractère non trivial de G/H induit un caractère de torsion de G.

Exercice 7 :

Soit G un groupe profini, c'est-à-dire une limite projective de groupes finis discrets, ou de manière équivalente un groupe compact totalement discontinu (les composantes connexes sont les points), ou encore un groupe compact possédant une base de voisinages de l'élément neutre formée de sous-groupes distingués ouverts et fermés.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de $1 \in \mathbb{C}^\times$ ne contenant aucun sous-groupe non-trivial de $\mathbb{C}^\times$.

2. Soit $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un caractère continu, montrer que son noyau contient un sous-groupe ouvert.

3. Montrer que $\widehat{G}$ est de torsion.