Université de Paris **12 novembre 2021**
M2 – Théorie des nombres

Feuille 6 : caractères additifs

On ce propose dans cette feuille d'expliciter les caractères continus des groupes additifs usuels. On ne demande pas de montrer que les isomorphismes sont topologiques.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $e(x) = \exp(2i\pi x)$. On note $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $U = e(\mathbb{T}) = \{z, |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^\times$ sa version multiplicative.
Si G est un groupe topologique, on note $\widehat{G}$ le dual de Pontryagin de G, c'est-à-dire le groupe des caractères unitaires continus $\chi : G \to U$ muni de la topologie compacte-ouverte.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, et que $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Montrer que tout caractère continu de $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto e(xy)$ pour un $y \in \mathbb{R}$ (on pourra chercher une équation différentielle en considérant $\int_x^{x+a} \chi(t)\,\mathrm{d}t$).

3. En déduire le dual de $\mathbb{R}$, et celui de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : séries de Laurent

Soit p un nombre premier, on note $K_p = \mathbb{F}_p((x))$ muni de la valuation $v(\sum_i a_i x^i) = \min\{i, a_i \neq 0\}$. Soit $\chi = K_p \to U$ un caractère continu.

1. Montrer que $\chi_0 : K_p \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui à $\sum a_i x^i$ associe $e(\frac{a_{-1}}{p})$ est un caractère unitaire.

2. Montrer que pour tout n on peut écrire $\chi(x^n) = e(\frac{b_{-n-1}}{p})$. pour une famille $b_n \in \mathbb{F}_p$ telle que $b_n = 0$ pour $n \ll 0$.

3. On note $\chi_0 : K_p \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui à $\sum a_i x^i$ associe $e(\frac{a_{-1}}{p})$. Déterminer $\widehat{K_p}$ à l'aide de χ_0.

4. Soit $q = p^n$ une puissance p et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Déterminer $\widehat{\mathbb{F}_q}$.

5. Déterminer $\widehat{K_q}$, où $K_q = \mathbb{F}_q((x))$.

Exercice 3 : le cas p-adique

On considère l'application «partie fractionnaire» $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définie par $\{\sum_i a_i p^i\}_p = \sum_{i<0} a_i p^i$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbb{T}[p^\infty] = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$, le groupe de Prüfer des éléments d'ordre une puissance de p.

2. Soit $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p}$. Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que $\chi(p^N\mathbb{Z}_p) = 1$.

3. En déduire $\widehat{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{T}[p^\infty]$.

4. Soit $\chi \in \widehat{\mathbb{Q}_p}$, on pose $\psi(x) = \chi(p^N x)$ pour $N > 0$ tel que $\chi(p^N\mathbb{Z}_p) = 1$. En considérant les $\psi(1/p^n)$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\psi(x) = \exp(2i\pi\{ax\}_p)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$.

5. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est autodual.

Exercice 4 :

1. Montrer que $(\mathbb{T})_{\text{tors}} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

2. Montrer que $\widehat{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}$, où on note $\overline{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le complété profini de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Adèles et caractères de $\mathbb{Q}$

On note $\mathbb{A}$ le groupe des adèles de $\mathbb{Q}$. Pour $y_\infty \in \mathbb{R}$, on note $\chi_{y_\infty}(x) = e(xy_\infty)$, et pour $y_p \in \mathbb{Q}_p$ on note $\chi_{y_p}(x) = e(\{xy_p\}_p)$.

Pascal Molin, version 12 novembre 2021.

1. Soit $y = (y_\infty, y_2, y_3, \dots) \in \mathbb{A}$. Montrer que $\chi_y(x) = \chi_{y_\infty}(x)^{-1} \prod_p \chi_{y_p}(x)$ est un caractère continu de $\mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\chi_y = 1$ si y est dans le plongement diagonal de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{A}$.

3. Montrer que tout caractère de $\mathbb{Q}$ est de la forme χ_y, pour $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \prod_p \mathbb{Z}_p$.

4. Montrer que $\mathbb{A} = \mathbb{Q} + [0,1[\times \prod_p \mathbb{Z}_p$, en déduire que $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ (algébriquement).

Exercice 6 : Compacité, connexité

Soit G un groupe abélien localement compact.

1. Montrer que G est compact ssi $\widehat{G}$ discret.

On suppose désormais G compact (et toujours abélien).

2. Montrer que si $U \subset G$ est un voisinage ouvert et fermé contenant 1, il existe un sous-groupe ouvert $H \subset U$.

3. Montrer que G est connexe ssi $\widehat{G}$ est sans torsion.

Exercice 7 :

Soit G un groupe profini, c'est-à-dire une limite projective de groupes finis discrets, ou de manière équivalente un groupe compact totalement discontinu (les composantes connexes sont les points), ou encore un groupe compact possédant une base de voisinages de l'élément neutre formée de sous-groupes distingués ouverts et fermés.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de $1 \in \mathbb{C}^\times$ ne contenant aucun sous-groupe non-trivial de $\mathbb{C}^\times$.

2. Soit $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ un caractère continu, montrer que son noyau contient un sous-groupe ouvert.

3. Montrer que $\widehat{G}$ est de torsion.