Feuille 7 : Fourier

1 Groupes abéliens finis

Dans cette partie, G désigne un groupe abélien fini d'ordre n, muni de la mesure de comptage normalisée $\mu(G) = 1$.

Exercice 1 :

1. Vérifier que les caractères $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ forment une base orthonormée de $L^2(G)$ pour le produit scalaire hermitien $\langle f, g\rangle = \frac{1}{n}\sum_x f(x)\overline{g(x)}$ (décomposer l'indicatrice $\mathbb{1}_{\{0\}}$).

> Il s'agit des relations d'orthogonalité. $\langle \chi, \psi\rangle = 0$ si $\chi \neq \psi$ donc les caractères sont orthogonaux, ils sont normés par définition du produit. Enfin $\sum_\chi \chi(x) = \#\widehat{G}1_{\{0\}}(x)$ par le même argument (et par décalage on exprime les autres indicatrices) donc la famille est génératrice, c'est une base et cela donne $\#\widehat{G} = \#G$.

2. Montrer la formule d'inversion de Fourier $f(x) = \sum_\chi \hat{f}(\chi)\chi(x)$, la formule de Plancherel $\|f\|_{L^2(G)} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\hat{G})}$ et l'identité de Parseval $\langle f, g\rangle_{L^2(G)} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2(\hat{G})}$.

> On décompose f sur la base des caractères $f = \sum_\chi \langle f, \chi\rangle \chi$, avec $\langle f, \chi\rangle = \hat{f}(\chi)$ pour la mesure normalisée.
> Cette formule d'inversion correspond à prendre la mesure de comptage (non normalisée) sur $\widehat{G}$.
> La formule de Plancherel est l'identité de Parseval sont immédiates en décomposant sur la base orthonormale des caractères.

3. On munit $L^2(G)$ du produit de convolution $(f \star g)(z) = \frac{1}{n}\sum_{x+y=z} f(x)g(y)$. Vérifier que $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$.

> Faire le calcul $\widehat{f\star g}(\chi) = \frac{1}{n}\sum_z \frac{1}{n}\sum_{x+y=z} f(x)g(y)\overline{\chi(z)} = \frac{1}{n^2}\sum_{x,y} f(x)g(y)\overline{\chi(x+y)} = \hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi)$.

Exercice 2 : Formule de Poisson

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit l'orthogonal

$$H^\perp = \left\{\chi \in \widehat{G} : \chi(H) = 1\right\}.$$

1. Montrer que $H^\perp \simeq \widehat{G/H}$ et $\widehat{G}/H^\perp \simeq \widehat{H}$.

> Par définition, on a $1 \to H^\perp \to \widehat{G} \to \widehat{H} \to 1$, que l'on identifie à $0 \to \widehat{G/H} \to \widehat{G} \to \widehat{H} \to 0$ qui est la suite duale de $0 \to H \to G \to G/H \to 0$.

Pascal Molin, version 25 novembre 2021.

2. Montrer que $\widehat{1_H}(\chi) = \frac{\#H}{\#G} 1_{H^\perp}(\chi)$.

$\#G\widehat{1_H}(\chi) = \sum_{x\in H} \overline{\chi}(x)$ vaut $\#H$ si χ est trivial sur H, et 0 sinon.

3. En déduire la formule de Poisson $\frac{1}{\#H}\sum_{x\in H} f(x) = \sum_{\chi\in H^\perp} \hat{f}(\chi)$ pour tout $f \in L^2(G)$.

En injectant la fonction caractéristique $1_h^\perp$, le membre de droite vaut $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \hat{f}(\chi)\hat{1_H}(\chi) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \hat{f}(\chi)\hat{1_H}(-\chi) = (\hat{f}\star\hat{1_H})(0_{\widehat{G}}) = \widehat{f1_H}(0_{\widehat{G}}) = \sum_{x\in H} f(x)$.

4. Montrer plus généralement que la transformée de Fourier d'une restriction à un sous-groupe est la projection sur l'orthogonal de ce sous-groupe.

$$\widehat{f1_H}(\chi) = \frac{1}{\#H^\perp}\sum_{\psi\in H^\perp} \hat{f}(\chi+\psi)$$

.

même calcul que précédemment, on simplifie $\#H^\perp = \frac{\#H}{\#G}$.

Exercice 3 : principe d'incertitude

Soit $f \in L^2(G)$, on note $\mathrm{Supp}(f)$ son support.

1. Montrer que $\#\mathrm{Supp}(f)\#\mathrm{Supp}(\hat{f}) \geqslant \#G$.

Notons $s_f = \#\mathrm{Supp}(f)$ et $s_{\hat{f}} = \#\mathrm{Supp}(\hat{f})$. On écrit la formule d'inversion, en majorant chaque somme avec des sup : $|f(x)| = \left|\frac{1}{n}\sum_\chi \hat{f}(\chi)\chi(x)\right| \leqslant \frac{s_{\hat{f}}}{n}\max\left|\hat{f}(\chi)\right|$. On majore également $\left|\hat{f}(\chi)\right| = \left|\sum_x f(x)\chi(-x)\right| \leqslant s_f \max|f(x)|$. En prenant χ et x en lesquels le maximum est atteint, on obtient $|f(x)| \leqslant \frac{s_f s_{\hat{f}}}{n}|f(x)|$, d'où l'inégalité.
Une autre démonstration reposant sur Cauchy-Schwartz et Parseval, mettre ensemble les inégalités suivantes, où l'on note 1_f l'indicatrice du support de f :

— $\|f\|_1^2 = \left|\langle f, 1_f\rangle_G\right|^2 \leqslant \frac{s_f}{n}\|f\|_2^2$
— $\|f\|_2^2 = \left\|\hat{f}\right\|_2^2$
— $\left\|\hat{f}\right\|_2^2 \leqslant s_{\hat{f}}\left\|\hat{f}\right\|_\infty^2$
— $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1$

Exercice 4 : transformée de Fourier rapide

Soit H un sous-groupe d'indice m de G. Pour $\chi \in \widehat{G}$ on note χ_H la restriction de χ à H. Si $f \in L^2(G)$ et $g \in G$ on définit $f_g \in L^2(H)$ par $f_g(x) = f(x+g)$.

1. Montrer que le calcul d'une transformée de Fourier sur G se ramène au calcul de m transformées de Fourier sur H.

> On note $G = \bigcup_{i=1}^{m} g_i + H$ une partition de G en translatés de H. Alors $\hat{f}(\chi) = \sum_{x\in G} f(x)\overline{\chi}(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in H} f(x+g_i)\overline{\chi}(x+g_i) = \sum_{i=1}^{m}\overline{\chi}(g_i)\hat{f_{g_i}}(\chi_{|H})$

2. On note $C(n)$ la complexité du calcul des n coefficients de Fourier $(\hat{f}(\chi))_{\chi\in\widehat{G}}$. En décomposant G selon H et $\widehat{G}$ selon $H^\perp$, montrer que $C(n) = mC(n/m) + n + n/mC(m)$.

> On calcule d'abord les transformées de Fourier des f_{g_i} sur H en complexité $mC(n/m)$.
> Puis on écrit de même une partition $\widehat{G} = \bigcup \chi_j H^\perp$ pour des caractères $\chi_1, \dots \chi_m$ distincts sur H, de sorte que pour tout $\chi \in H^\perp$ $\hat{f}(\chi_j\chi) = \sum_{i=1}^{m}\chi^{-1}(g_i)\chi_j^{-1}(g_i)\hat{f}_i(\chi_j)$
> Mais $\chi \in H^\perp$ est trivial sur H, donc on peut le voir comme un caractère du groupe G/H, et on a $\hat{f}(\chi_j\chi) = \sum_{g_i\in G/H}\chi^{-1}(g_i)h_j(g_i)$ où on note $h_j(g_i) = \chi_j^{-1}(g_i)\hat{f}_i(\chi_j)$.
> Ainsi on calcule l'ensemble des $h_j(g_i)$ en n opérations, puis les transformées de Fourier avec $n/mC(m)$ opérations.

2 Fonctions L de Dirichlet

Soit $q > 1$, on pose $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ et on l'identifie à son dual via l'accouplement $x, y \in G^2 \mapsto \exp(-2i\pi\frac{xy}{q}) \in \mathbb{C}$. De même on identifie $\widehat{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ via $x, y \mapsto \exp(-2i\pi xy)$.

Exercice 5 : Sommes de Gauss

Soit $q > 1$, on considère χ un caractère de Dirichlet primitif modulo q (c'est donc un caractère multiplicatif). On rappelle que χ est primitif si χ est non trivial sur $1 + q'\mathbb{Z}$ pour tout diviseur strict q' de q.
On le voit également comme un élément de $L^2(G)$, muni de la mesure de comptage, et on pose la somme de Gauss

$$\tau(\chi) = \widehat{\chi}(1).$$

1. Montrer que pour tout n, $\widehat{\chi}(n) = \overline{\chi}(n)\tau(\chi)$

> La formule $\widehat{\chi}(b) = \sum_a \chi(a)e^{2i\pi\frac{ab}{q}} = \chi^{-1}(b)\tau(\chi)$ est valable pour tout b premier à q.
> Montrons donc que $\widehat{\chi}(b) = 0$ si χ est primitif et b n'est pas premier à q.
> Dans ce cas, notons $q' = q/d$, on a $\widehat{\chi}(b) = \sum_{a' \bmod q'}\sum_{a\equiv a' \bmod q'}\chi(a)e^{2i\pi\frac{ab}{q}} = \sum_{a' \bmod q'} e^{2i\pi\frac{a'b}{q}}\sum_{a\equiv a' \bmod q'}\chi(a)$. Si $\mathrm{pgcd}(a', q') > 1$ la somme interne est nulle, sinon elle vaut $\chi(a')\sum_{a\equiv 1 \bmod q'}\chi(a)$. C'est une somme sur le sous-groupe $H = 1 \bmod q'$, donc elle est nulle sauf si χ est trivial sur ce sous-groupe, auquel cas χ ne serait pas primitif. Ainsi la somme est nulle..

2. Montrer que $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$.

On écrit l'égalité de Parseval $q\sum_n |\chi(n)|^2 = \sum_n |\hat\chi(n)|^2$ (attention à la normalisation, ici on a la mesure de comptage partout), d'où $q\varphi(q) = |\tau(\chi)|^2 \varphi(q)$.

Exercice 6 : Equation fonctionnelle

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de la classe de Schwartz, et soit $c \in L^2(G)$. Montrer la formule de Poisson étendue

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m) f(\frac{m}{q}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat c(-n)\hat f(n)$$

On regroupe par classe modulo q et on applique la formule de Poisson $\sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)f(\frac{m}{q}) = \sum_{a \bmod q} c(a) \sum_m \in \mathbb{Z} f(\frac{a}{q}+m) = \sum_{a \bmod q} c(a) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{t_{\frac{a}{q}} f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{a \bmod q} c(a) e^{-2i\pi\frac{a}{q}m} \widehat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f(n)\hat c(-n)$

2. On pose $\Theta(\chi, t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi(m) e^{-\pi m^2 t}$, montrer l'équation fonctionnelle

$$\Theta(\chi, t) = \frac{\tau(\chi)}{q\sqrt{t}} \Theta(\chi^{-1}, \frac{1}{q^2 t})$$

(considérer $f(x) = e^{-\pi t (qx)^2}$ et utiliser l'exercice précédent).

On a $\Theta(\chi, t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi(m) f(\frac{m}{q})$, donc en utilisant la formule de Poisson étendue $\Theta(\chi, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat\chi(-n)\hat f(n)$.
Or $\hat\chi(-n) = \chi^{-1}(-n)\tau(\chi) = \chi(-1)\tau(\chi)\chi^{-1}(n)$.
D'autre part $\hat f(y) = \frac{1}{q\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi}{u}(\frac{n}{q})^2}$, donc $\Theta(\chi, t) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{q\sqrt{t}} \Theta(\chi^{-1}, \frac{1}{q^2 t})$. comme souhaité.

3. On suppose de plus $\chi(-1) = 1$. Montrer que $\Lambda(\chi, s) = \frac12 \int_0^\infty \Theta(\chi, t) t^{\frac{s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ et est un prolongement holomorphe de $(\frac{q}{\pi})^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) L(\chi, s)$.

Si $\chi(-1) = 1$, on a $\Theta(\chi, t) = 2\sum_{n\geqslant 1} \chi(n) e^{-\frac{\pi t}{q} n^2}$. avec $\Theta(\chi, t) = O(e^{-\pi t})$, donc la transformée de Mellin est bien définie pour tout $s \in \mathbb{C}$.
Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a bien l'égalité avec la fonction complétée en intervertissant les sommes.

4. Montrer l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(\chi, s) = \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}} \Lambda(\chi^{-1}, 1-s).$$

On applique l'équation fonctionnelle de la fonction θ.

5. On suppose à présent $\chi(-1) = -1$. En considérant cette fois $\Theta(\chi, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\chi(n)e^{-\frac{\pi}{q}tn^2}$, montrer que

$$\Lambda(\chi, s) = (\frac{q}{\pi})^{\frac{s+1}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})L(\chi, s)$$

vérifie l'équation

$$\Lambda(\chi, s) = \frac{\tau(\chi)}{i\sqrt{q}}\Lambda(\chi^{-1}, 1-s)$$