Feuille 7 : Fourier

1 Groupes abéliens finis

Dans cette partie, G désigne un groupe abélien fini d'ordre n, muni de la mesure de comptage normalisée $\mu(G) = 1$.

Exercice 1 :

1. Vérifier que les caractères $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ forment une base orthonormée de $L^2(G)$ pour le produit scalaire hermitien $\langle f, g\rangle = \frac{1}{n}\sum_x f(x)\overline{g(x)}$ (décomposer l'indicatrice $\mathbb{1}_{\{0\}}$).

2. Montrer la formule d'inversion de Fourier $f(x) = \sum_\chi \hat{f}(\chi)\chi(x)$, la formule de Plancherel $\|f\|_{L^2(G)} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\hat{G})}$ et l'identité de Parseval $\langle f, g\rangle_{L^2(G)} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2(\hat{G})}$.

3. On munit $L^2(G)$ du produit de convolution $(f \star g)(z) = \frac{1}{n}\sum_{x+y=z} f(x)g(y)$. Vérifier que $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$.

Exercice 2 : Formule de Poisson

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit l'orthogonal

$$H^\perp = \left\{\chi \in \widehat{G} : \chi(H) = 1\right\}.$$

1. Montrer que $H^\perp \simeq \widehat{G/H}$ et $\widehat{G}/H^\perp \simeq \widehat{H}$.

2. Montrer que $\widehat{1_H}(\chi) = \frac{\#H}{\#G} 1_{H^\perp}(\chi)$.

3. En déduire la formule de Poisson $\frac{1}{\#H}\sum_{x\in H} f(x) = \sum_{\chi\in H^\perp} \hat{f}(\chi)$ pour tout $f \in L^2(G)$.

4. Montrer plus généralement que la transformée de Fourier d'une restriction à un sous-groupe est la projection sur l'orthogonal de ce sous-groupe.

$$\widehat{f1_H}(\chi) = \frac{1}{\#H^\perp}\sum_{\psi\in H^\perp} \hat{f}(\chi + \psi)$$

.

Exercice 3 : principe d'incertitude

Soit $f \in L^2(G)$, on note $\mathrm{Supp}(f)$ son support.

1. Montrer que $\#\mathrm{Supp}(f)\#\mathrm{Supp}(\hat{f}) \geqslant \#G$.

Exercice 4 : transformée de Fourier rapide

Soit H un sous-groupe d'indice m de G. Pour $\chi \in \widehat{G}$ on note χ_H la restriction de χ à H. Si $f \in L^2(G)$ et $g \in G$ on définit $f_g \in L^2(H)$ par $f_g(x) = f(x+g)$.

1. Montrer que le calcul d'une transformée de Fourier sur G se ramène au calcul de m transformées de Fourier sur H.

2. On note $C(n)$ la complexité du calcul des n coefficients de Fourier $\left(\hat{f}(\chi)\right)_{\chi\in\widehat{G}}$. En décomposant G selon H et $\widehat{G}$ selon $H^\perp$, montrer que $C(n) = mC(n/m) + n + n/mC(m)$.

2 Fonctions L de Dirichlet

Soit $q > 1$, on pose $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ et on l'identifie à son dual via l'accouplement $x, y \in G^2 \mapsto \exp(-2i\pi \frac{xy}{q}) \in \mathbb{C}$. De même on identifie $\widehat{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ via $x, y \mapsto \exp(-2i\pi xy)$.

Exercice 5 : Sommes de Gauss

Soit $q > 1$, on considère χ un caractère de Dirichlet primitif modulo q (c'est donc un caractère multiplicatif). On rappelle que χ est primitif si χ est non trivial sur $1 + q'\mathbb{Z}$ pour tout diviseur strict q' de q.

On le voit également comme un élément de $L^2(G)$, muni de la mesure de comptage, et on pose la somme de Gauss

$$\tau(\chi) = \widehat{\chi}(1).$$

1. Montrer que pour tout n, $\widehat{\chi}(n) = \overline{\chi}(n)\tau(\chi)$
2. Montrer que $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$.

Exercice 6 : Equation fonctionnelle

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de la classe de Schwartz, et soit $c \in L^2(G)$. Montrer la formule de Poisson étendue

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) f(\frac{m}{q}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{c}(-n) \hat{f}(n)$$

2. On pose $\Theta(\chi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi(m) e^{-\pi m^2 t}$, montrer l'équation fonctionnelle

$$\Theta(\chi, t) = \frac{\tau(\chi)}{q\sqrt{t}} \Theta(\chi^{-1}, \frac{1}{q^2 t})$$

(considérer $f(x) = e^{-\pi t (qx)^2}$ et utiliser l'exercice précédent).

3. On suppose de plus $\chi(-1) = 1$. Montrer que $\Lambda(\chi, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Theta(\chi, t) t^{\frac{s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ et est un prolongement holomorphe de $(\frac{q}{\pi})^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) L(\chi, s)$.

4. Montrer l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(\chi, s) = \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}} \Lambda(\chi^{-1}, 1 - s).$$

5. On suppose à présent $\chi(-1) = -1$. En considérant cette fois $\Theta(\chi, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi(n) e^{-\frac{\pi}{q} t n^2}$, montrer que

$$\Lambda(\chi, s) = (\frac{q}{\pi})^{\frac{s+1}{2}} \Gamma(\frac{s+1}{2}) L(\chi, s)$$

vérifie l'équation

$$\Lambda(\chi, s) = \frac{\tau(\chi)}{i\sqrt{q}} \Lambda(\chi^{-1}, 1 - s)$$

Pascal Molin, version 25 novembre 2021.