Feuille 8 : intégration, idèles

1 Intégration

On note $\mathrm{d}x$ la mesure de Haar sur $\mathbb{Z}_p$ normalisée par $\int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{d}x = 1$, et $|x| = p^{-v_p(x)}$ la valeur absolue p-adique.

Exercice 1 :

1. Calculer $\int_{\mathbb{Z}_p} |x|^s \,\mathrm{d}x$.

On décompose $\mathbb{Z}_p$ suivant les valeurs de la valeur absolue : $\mathbb{Z}_p = \bigcup_{k\geqslant 0}(p^k\mathbb{Z}_p \setminus p^{k+1}\mathbb{Z}_p)$, et chacun de ces ensembles est de mesure $\frac{p-1}{p^{k+1}}$ ($p-1$ translatés de $p^{k+1}\mathbb{Z}_p$ qui est de mesure $1/p^{k+1}$ puisque la mesure est normalisée).
On a donc $\int_{\mathbb{Z}_p} |x|^s \,\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 0} p^{-ks}\frac{p-1}{p^{k+1}} = \frac{p-1}{p}\sum_{k\geqslant 0} p^{-k(s+1)} = \frac{p-1}{p-p^{-s}}$ pour $\mathrm{Re}(s) > -1$.

2. Calculer $\int_{\mathbb{Z}_p} |x(1+x)|^s \,\mathrm{d}x$.

On partitionne $\mathbb{Z}_p = p\mathbb{Z}_p \cup -1 + p\mathbb{Z}_p \cup A$:
- sur $p\mathbb{Z}_p$, $|x(1+x)| = |x|$;
- sur $-1+p\mathbb{Z}_p$, on a également $|x(1+x)| = |x+1|$;
- sur $A = \bigcup_{a=1}^{p-2} a + p\mathbb{Z}_p$, $|x(1+x)| = 1$.

Chaque translaté $a + p\mathbb{Z}_p$ est de mesure $1/p$, donc l'intégrale vaut $2\int_{p\mathbb{Z}_p} |x|^s \,\mathrm{d}x + \frac{p-2}{p}$. Or $\int_{p\mathbb{Z}_p} |x|^s \,\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 1}(1-\frac{1}{p})p^{-k}p^{-ks} = (1-p^{-1})\frac{p^{-1-s}}{1-p^{-1-s}}$, donc le résultat est $(1-\frac{2}{p}) + 2\frac{1-\frac{1}{p}}{p^{1+s}-1}$.

Pour $x \in \mathbb{Q}_p$ on note $\{x\}_p$ la partie fractionnaire de x, et $e_p(x) = e^{-2i\pi\{x\}_p}$ le caractère p-adique.
$\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^\times$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{|x|=p^{-k}} e_p(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{p-1}{p}p^{-k} & \text{si } k \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Si $k \geqslant 0$, on intègre $e_p(x) = 1$ sur $p^k\mathbb{Z}_p \setminus p^{k+1}\mathbb{Z}_p$ qui est de mesure $(p-1)p^{-k-1}$, cf. question précédente.
Si $k = -\ell < 0$, on a $|x| = p^\ell$ ssi $x = \frac{a+y}{p^\ell}$ avec $a \in \{0, \dots p-1\}$ et $y \in p\mathbb{Z}_p$, donc l'intégrale vaut $\sum_{a=1}^{p-1} e(\frac{a}{p^\ell})\int_{\mathbb{Z}_p} e(\frac{y}{p^{\ell-1}})\,\mathrm{d}y$.

Si $\ell = 1$, le caractère dans l'intégrale est trivial donc cette intégrale vaut $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$ et la somme vaut $0 - 1$.
En revanche si $\ell > 1$ on intègre un caractère non trivial sur un groupe, l'intégrale et donc la somme sont nulles.

4. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\int_{\mathbb{Q}_p} e_p(x)\,|x|^s\,\mathrm{d}x = \frac{1-p^s}{1-p^{-s-1}}$.

On décompose sur $|x| = p^{-k}$, il reste $-1 \times p^s + \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{p-1}{p} p^{-k} \times p^{-ks} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-p^{-s-1}} - p^s = \frac{p-1-p^{s+1}+1}{p-p^{-s}} = \frac{1-p^s}{1-p^{-s-1}}$.

2 Idèles

On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles, et $\mathbb{A}^\times$ le groupe des idèles.

Exercice 2 : topologie

Soit K un corps de nombres, on note K_v les complétés de K et π_v des uniformisantes.

1. Montrer que la suite formée des éléments $(1, \dots, \pi_v^{-1}, 1 \dots)$ ne converge pas dans $\mathbb{A}$.

La suite converge vers $1 = (1, 1, \dots)$ pour la topologie produit. Pour la topologie des idèles, tout ouvert est de la forme $V = \displaystyle\prod_{v \in S} V_v \times \prod \mathcal{O}_v$ où S est fini et les V_s sont des ouverts de K_v. Puisque $\pi_v^{-1} \notin \mathcal{O}_v$, aucun terme de la suite n'est dans V à partir du moment où l'on a dépassé l'ensemble fini S.

2. En déduire que $x \mapsto x^{-1}$ n'est pas continue sur $\mathbb{A}^\times$ pour la topologie de $\mathbb{A}$.

Regardons la suite des inverses : $\pi \in \mathcal{O}_v$ pour tout v, donc pour tout ouvert V contenant 1 la suite des inverses est dans V à partir du moment où $v \notin S$: elle converge vers 1. On a donc une suite convergente dont l'inverse ne converge pas.

Exercice 3 :

Soit K un corps de nombres de signature r_1, r_2. Montrer que la composante connexe de $1 \in \mathbb{A}^\times$ est $(\mathbb{R}_+^\times)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{r_2}$ (considérer les sous-groupes ouverts).

Un sous-groupe ouvert est également fermé, donc il contient cette composante neutre. En chaque place finie l'intersection des sous-groupes ouverts est réduite à 1, sur les places infinies $\mathbb{R}_+^\times$ et $\mathbb{C}^\times$ sont les composantes neutres.
La composante neutre est donc le produit des composantes neutres locales.
Attention, la composante neutre du groupe des classes d'idèles est nettement moins sympathique : c'est $\mathbb{R} \times \S^{r_1+r_2-1} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{r_2}$ où $\S = \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \simeq \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ est le solénoïde infini (un cercle indéfiniment enroulé sur lui-même).

Exercice 4 :

Soit p premier, on note $V = \displaystyle\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_p$ un produit dénombrable de copies de $\mathbb{F}_p$, et $W = \displaystyle\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_p \subset V$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe strict $W \subset W' \subset V$ d'indice fini dans V.

V est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, on peut prendre un hyperplan contenant W.

2. Montrer que ce sous-groupe n'est pas ouvert.

Notons ϕ une forme linéaire dont W' est le noyau : si W' est ouvert, elle est continue. Impossible car elle est nulle sur W dense dans V (remarque : pour la topologie produit, les ensembles $\prod_i U_i$ où $u_i = \mathbb{F}_p$ pour presque tout i forment une base d'ouverts).

3. Montrer que pour tout p, le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ possède un sous-groupe d'indice 2.

Le sous-groupe des carrés convient, il est d'indice 2 pour chaque p (pour p impair il est formé des entiers congrus à un carré modulo p, et pour $p = 2$ des entiers congrus à $\pm 1 \bmod 8$).

4. En déduire l'existence d'un sous-groupe d'indice fini du groupe $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ des classes d'idèles de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas ouvert.

Grâce à la question précédente, on a un quotient de la forme $V = \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$, sur lequel on peut appliquer le raisonnement de la première question.
Concrètement, on écrit $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \simeq \mathbb{R}_+^\times \times \prod \mathbb{Z}_p^\times$ (cf. exercice suivant), donc en notant H le produit des carrés dans $\mathbb{Z}_p^\times$ on a $1 \to \mathbb{R}_+^\times H \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to V \to 0$, l'image réciproque d'un sous-groupe non ouvert d'indice 2 est un sous-groupe non ouvert d'indice 2.

Exercice 5 : finitude du groupe des classes

On note $\mathbb{A}^1$ le sous-groupe des idèles de norme 1, et $\mathrm{Id}(K)$ le groupe des idéaux fractionnaires de K, muni de la topologie discrète. On sait que le groupe $\mathbb{A}^1/K^\times$ des classes d'idèles de norme un est compact.

1. Montrer qu'on a un morphisme continu surjectif $\mathbb{A}^1 \to \mathrm{Id}(K)$.

On pose $(x_v) \mapsto \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})}$, c'est un morphisme continu $\mathbb{A}^\times \to \mathrm{Id}(K)$, de noyau le sous-groupe ouvert $\prod \mathcal{O}_v^\times$, et surjectif sur le sous-groupe fermé $\mathbb{A}^1$ en se ramenant à une norme 1 sur les places archimédiennes.

2. En déduire que $\mathrm{Cl}(K)$ est fini.

L'application passe au quotient par le sous-groupe fermé cocompact $K^\times$, son image $\mathrm{Cl}(K)$ est donc discrète et compacte, donc finie.

3 Caractères

Exercice 6 :

Soit G le produit restreint des groupes localement compacts G_i relativement aux sous-groupes ouverts H_i. On plonge G_i dans G sur la i-ième composante.

1. Montrer que $\widehat{G}$ est le produit restreint des $\widehat{G}_i$ relativement aux sous-groupes $H_i^\perp$.

Un caractère est continu si et seulement si son noyau est ouvert, donc contient un ensemble de la forme $\prod_i V_i$ où V_i est un ouvert, avec $V_i = H_i$ presque partout. C'est donc un caractère dont les composantes sont dans $H_i^\perp$ presque partout.

2. Soit $\chi \in \widehat{G}$, en déduire que pour tout $x \in G$ on a $\chi(x) = \prod_i \chi(x_i)$.

Il suffit de vérifier que le produit est fini, ce qui est le cas puisque $x_i \in H_i$ presque partout, donc $\chi(x_i) = 1$ presque partout.
On ne demande pas ici de prouver que l'on a un homéomorphisme : cela se vérifie sans trop de problème en montrant que les images directes et réciproques de voisinages de l'unité contiennent des voisinages.