Feuille 8 : intégration, idèles

1 Intégration

On note $\mathrm{d}x$ la mesure de Haar sur $\mathbb{Z}_p$ normalisée par $\int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{d}x = 1$, et $|x| = p^{-v_p(x)}$ la valeur absolue p-adique.

Exercice 1 :

1. Calculer $\int_{\mathbb{Z}_p} |x|^s \, \mathrm{d}x$.
2. Calculer $\int_{\mathbb{Z}_p} |x(1+x)|^s \, \mathrm{d}x$.

Pour $x \in \mathbb{Q}_p$ on note $\{x\}_p$ la partie fractionnaire de x, et $e_p(x) = e^{-2i\pi\{x\}_p}$ le caractère p-adique.
$\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^\times$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{|x|=p^{-k}} e_p(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{p-1}{p} p^{-k} & \text{si } k \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
4. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $\int_{\mathbb{Q}_p} e_p(x) \, |x|^s \, \mathrm{d}x = \frac{1-p^s}{1-p^{-s-1}}$.

2 Idèles

On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles, et $\mathbb{A}^\times$ le groupe des idèles.

Exercice 2 : topologie

Soit K un corps de nombres, on note K_v les complétés de K et π_v des uniformisantes.

1. Montrer que la suite formée des éléments $(1, \dots, \pi_v^{-1}, 1 \dots)$ ne converge pas dans $\mathbb{A}$.
2. En déduire que $x \mapsto x^{-1}$ n'est pas continue sur $\mathbb{A}^\times$ pour la topologie de $\mathbb{A}$.

Exercice 3 :

Soit K un corps de nombres de signature r_1, r_2. Montrer que la composante connexe de $1 \in \mathbb{A}^\times$ est $(\mathbb{R}_+^\times)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{r_2}$ (considérer les sous-groupes ouverts).

Exercice 4 :

Soit p premier, on note $V = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_p$ un produit dénombrable de copies de $\mathbb{F}_p$, et $W = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_p \subset V$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe strict $W \subset W' \subset V$ d'indice fini dans V.
2. Montrer que ce sous-groupe n'est pas ouvert.
3. Montrer que pour tout p, le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ possède un sous-groupe d'indice 2.
4. En déduire l'existence d'un sous-groupe d'indice fini du groupe $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ des classes d'idèles de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas ouvert.

Exercice 5 : finitude du groupe des classes

On note $\mathbb{A}^1$ le sous-groupe des idèles de norme 1, et $\mathrm{Id}(K)$ le groupe des idéaux fractionnaires de K, muni de la topologie discrète. On sait que le groupe $\mathbb{A}^1/K^\times$ des classes d'idèles de norme un est compact.

1. Montrer qu'on a un morphisme continu surjectif $\mathbb{A}^1 \to \mathrm{Id}(K)$.
2. En déduire que $\mathrm{Cl}(K)$ est fini.

Pascal Molin, version 2 décembre 2021.

3 Caractères

Exercice 6 :

Soit G le produit restreint des groupes localement compacts G_i relativement aux sous-groupes ouverts H_i. On plonge G_i dans G sur la i-ième composante.

1. Montrer que $\widehat{G}$ est le produit restreint des $\widehat{G}_i$ relativement aux sous-groupes $H_i^\perp$.

2. Soit $\chi \in \widehat{G}$, en déduire que pour tout $x \in G$ on a $\chi(x) = \prod_i \chi(x_i)$.

Pascal Molin, version 2 décembre 2021.