

Feuille 9: caractères de Hecke

1 DÉFINITIONS

Soit K un corps de nombres. Dans cette feuille, on appelle caractère de Hecke un caractère continu *unitaire* du groupe des classes d'idèles $C_K = \mathbb{A}^\times / K^\times$.

Caractère norme Les quasicharactères (ou grossencharacters) sont les caractères à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$: il s'écrivent comme produit d'un caractère par une puissance réelle de la norme.

On note $\mathbb{A}^1 = \ker |\cdot|$ le sous-groupe compact des idèles de norme 1, et $C_K^1 = \mathbb{A}^1 / K^\times$ le groupe des classes d'idèles de norme 1, on a également une décomposition $\widehat{C}_K = \mathbb{R} \times \widehat{C}_K^1$, où le terme $\mathbb{R}$ encode les puissances imaginaires de la norme.

Conducteur Soit v une place de K , on pose

- $U_v(0) = \{1\}$ si v est complexe;
- $U_v(0) = \{\pm 1\}$ et $U_v(1) = \{1\}$ si v est réelle;
- $U_v(0) = \mathcal{O}_v^\times$ et $U_v(k) = 1 + \mathfrak{p}^k \mathcal{O}_v$ si $v = \mathfrak{p}$ est non archimédienne.

un caractère sur K_v est défini modulo v^k s'il est trivial sur $U_v(k)$, le conducteur d'un caractère de Hecke est le produit de ses modules de définition minimaux. C'est donc un produit formel de places réelles fois un idéal entier.

2 ZOOLOGIE DES CARACTÈRES

Exercice 1 : caractères de Dirichlet

On considère $K = \mathbb{Q}$, et on note $\overline{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ le complété profini de $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_+^\times \times \overline{\mathbb{Z}}^\times$.

Pour toute idèle $x = (x_v) \in \mathbb{R}^\times \times \prod_p \mathbb{Q}_p^\times$, il existe un unique rationnel a tel qu'on ait $ax \in \mathbb{R}_+^\times \times \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ (on corrige le signe et les valuations p -adiques non nulles).

2. Soit $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère de Dirichlet, montrer que χ induit un caractère continu $\overline{\mathbb{Z}}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est un quotient de $\overline{\mathbb{Z}}^\times$, et la définition de la topologie rend la projection continue donc l'extension de χ l'est.

3. Soit $\tilde{\chi}$ le caractère de Hecke défini sur $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_+^\times \times \overline{\mathbb{Z}}^\times$ par $\tilde{\chi}(atk) = \chi(k \bmod N)$. On note χ_∞ la restriction de $\tilde{\chi}$ à la composante archimédienne $\mathbb{Q}_\infty^\times = \mathbb{R}^\times$ de $\mathbb{A}^\times$. Montrer que $\chi_\infty(x) = \text{signe}(x)^e$, où $e \in \{0, 1\}$ est la parité de χ .

Le caractère est d'ordre fini, donc il suffit de regarder l'image de $-1 \in \mathbb{Q}^\times$ pour connaître χ sur $\mathbb{R}^\times$. Or $\tilde{\chi}(-1) = 1 = \chi_\infty(-1)\chi(-1)$, donc on a bien $\chi_\infty(-1) = \chi(-1 \bmod N)$.

4. Réciproquement, montrer que tout caractère continu du groupe des classes d'idèles se décompose en produit d'une norme par un caractère de Dirichlet.

Puisque $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \mathbb{R}_+^\times \overline{\mathbb{Z}}^\times$, un caractère continu est un produit de caractère de $\mathbb{R}_+^\times$ qui est le sous-groupe des normes, fois un caractère de $\overline{\mathbb{Z}}^\times$ qui par continuité est défini modulo $1 + N\mathbb{Z}$ donc est un caractère de $\overline{\mathbb{Z}}^\times / 1 + N\overline{\mathbb{Z}} \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.

5. Quel est le conducteur, au sens idélique, d'un caractère de Dirichlet?

La définition de conducteur fini coïncide : c'est le plus petit N tel que χ soit trivial sur $1 + N\mathbb{Z}$. On rajoute une précision sur la place infinie : le conducteur contient la place réelle si et seulement si il est impair.

Exercice 2 : caractères de conducteur 1

On note $\text{Id}(\mathcal{O}_K)$ le groupe des idéaux inversibles de $\mathcal{O}_K$.

1. Montrer qu'on a un morphisme continu surjectif $\mathbb{A}^1 \rightarrow \text{Id}(\mathcal{O}_K)$.

On a une application "diviseur" $\mathbb{A}^\times \rightarrow \text{Id}(K)$ donnée par $(x_v) \mapsto \prod_{v \nmid \infty} \mathfrak{p}_v^{\text{val}(x_v)}$, qui est continue de noyau l'ouvert $\mathbb{A}_\infty = \prod_{v \mid \infty} K_v^\times \times \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$.

L'application restreinte au sous-groupe $\mathbb{A}^1$ reste surjective (corriger la norme sur une (corriger par un élément de $K^\times$ sur les places infinie) et continue.

L'application est bien surjective, de noyau l'ouvert $K_\infty \times \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$.

Remarquons que cette suite est la généralisation de la décomposition $\overline{\mathbb{Z}}^\times \rightarrow \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{Q}^\times$ écrite ci-dessus pour $K = \mathbb{Q}$. Quand le nombre de classes est un on peut identifier les idéaux à $K^\times / \mathcal{O}_K^\times$, mais en général les idèles ne se factorisent pas simplement par $K^\times$.

2. Montrer que tout caractère du groupe $\text{Cl}(K)$ est un caractère de Hecke de conducteur 1.

En quotientant la suite précédente par $K^\times$ on a la suite $1 \rightarrow K^\times \mathbb{A}_\infty^\times \rightarrow C_K \rightarrow \text{Cl}(K) \rightarrow 1$, de sorte que les caractères du groupe des classes sont les caractères triviaux sur $K^\times \mathbb{A}_\infty^\times$: ils sont bien de conducteur 1.

3. Montrer qu'un caractère est de conducteur 1 si et seulement si on peut écrire $\chi = (\chi_\infty, \chi_f)$, où $\chi_f : \text{Id}(K) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère du groupe des idéaux fractionnaire, $\chi_\infty : (K \otimes \mathbb{R})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère continu sur les composantes archimédiennes trivial sur $\{\pm 1\}^{r_1}$ et ces caractères vérifient la condition de compatibilité $\chi_\infty(a) \chi_f((a)) = 1$ pour tout $a \in K^\times$.

En projetant sur les composantes archimédiennes et les uniformisantes, la suite précédente est un produit direct $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}_\infty^\times \times \text{Id}(K)$. Un caractère de module 1 étant trivial sur $U(1) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$, c'est en fait un caractère de $(K \otimes \mathbb{R})^\times \times \text{Id}(K)$, trivial sur $K^\times$.

Exercice 3 : Caractères de type CM

On considère $K = \mathbb{Q}(i)$. On note χ_∞ la restriction d'un caractère à la composante archimédienne $\mathbb{C}^\times$.

1. Montrer qu'il existe un caractère de Hecke de conducteur 1 tel que $\chi_\infty(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)^n$ si et seulement si $n \in 4\mathbb{Z}$.

Soit (χ_∞, χ_f) un caractère, puisque tout idéal est principal on peut définir $\chi((a)) = \chi_\infty(a)^{-1}$ si et seulement si cela ne dépend pas du générateur $a \in K$ choisi. Or deux générateurs diffèrent d'une unité, on doit donc avoir $\chi_\infty(a) = 1$ pour $a \in \mathcal{O}_K^\times = \{\pm 1, \pm i\}$, soit $4 \mid n$.

2. Montrer que dans le cas $K = \mathbb{Q}(i)$, le groupe des caractères de conducteur 1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

On a un facteur $\mathbb{R}$

3. Soit K un corps CM, c'est-à-dire une extension totalement complexe d'un corps totalement réel. On note w_K le nombre de racines de l'unité de K . Montrer que pour tout $\eta \in \mathcal{O}_K^\times$ et tout plongement archimédien $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$, $2w_K \arg(\sigma(\eta)) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

L'automorphisme d'ordre 2 induit la conjugaison complexe sur tout plongement, donc pour tout $z \in \mathcal{O}_K^\times$ le quotient $z/\bar{z}$ est un entier dont tous les plongements sont de norme 1, c'est une racine de l'unité (lemme de Kronecker).

4. En déduire un réseau de rang r_2 dans le groupe des caractères de conducteur 1.

Pour chacune des r_2 classes de plongements complexes on a un caractère d'ordre infini $z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}\right)^{wn}$.

Exercice 4 : Caractères de type Maass

Soit $K = \mathbb{Q}[x]/x^3 - x - 1$, c'est un corps cubique complexe de nombre de classes 1. On note $\eta \in \mathcal{O}_K^\times$ une unité fondamentale que l'on choisit supérieure à 1 dans le plongement réel, et on note $R = \log \eta$ le régulateur de K .

1. Montrer que les caractères de conducteur 1 sur $\mathbb{A}^1$ sont de la forme $\chi_\infty(x, y) = |x|^{iu} |y|^{iv} \left(\frac{y}{|y|}\right)^k$, pour $u, v \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $u + 2v = 0$.

En décomposant $\mathbb{R}^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et Ici $K \otimes \mathbb{R} \simeq \pm 1 \times \mathbb{R}_+^\times \times S \times \mathbb{R}_+^\times$, donc les caractères ont la forme voulue, et ils sont définis sur $\mathbb{A}^1$ s'ils sont triviaux sur le sous-groupe des normes, d'où la restriction $u + 2v = 0$.

2. Montrer que les caractères de Hecke de conducteur 1 forment le réseau $(u, v, k) \in \left(\frac{4\pi}{3R}, -\frac{2\pi}{3R}, 0\right)\mathbb{Z} + \left(\frac{4\alpha}{3R}, -\frac{2\alpha}{3R}, 2\right)\mathbb{Z}$, où $\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{R}}$ est le plongement complexe de η .

Le groupe des unités est $\pm 1 \times e^{\mathbb{Z}}$, la condition de compatibilité est $\chi_\infty(-1) = \chi(\epsilon) = 1$. Sachant que l'unité fondamentale satisfait $\log |\epsilon_1| + 2 \log |\epsilon_2| = 0$, on obtient en résolvant les conditions annoncées.

Exercice 5 : Type à l'infini

Soit K un corps de nombres, on note $K_\infty^{\times\circ} = \prod_{v|\mathbb{R}} \mathbb{R}_+^\times \prod_{v|\mathbb{C}} \mathbb{C}^\times$ la composante neutre de $\mathbb{A}^\times$, et $\mathbb{A}_f^\times$ le groupe des idèles finies de sorte que $\mathbb{A}^\times = K_\infty^{\times\circ} \times \mathbb{A}_f^\times$.

Si χ est un caractère de Hecke, on appelle *type à l'infini* de χ , et on note χ_∞ la restriction de χ à $K_\infty^{\times\circ}$.

1. Montrer que deux caractères ont même type à l'infini si et seulement si ils diffèrent d'un caractère d'ordre fini.

Cela revient à dire que les caractères de $K_\infty^{\times\circ}$ sont d'ordre infini, tandis que ceux de $\mathbb{A}_f^\times$ sont d'ordre fini : pour le premier point $K_\infty^{\times\circ} \simeq \mathbb{R}^{r_1+r_2} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{r_2}$ donc son dual est isomorphe à $\mathbb{R}^{r_1+r_2} \times \mathbb{Z}^{r_2}$ qui est bien sans torsion. Pour le second point, par continuité un caractère est trivial sur un ouvert $U(\mathfrak{m})$ qui est d'indice fini dans $\mathbb{A}_f^\times$.

Le même raisonnement montre que le dual de Pontryagin d'un groupe profini est de torsion, tandis que le premier point vient aussi directement du fait que le dual d'un connexe est sans torsion.

2. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de $\mathcal{O}_K$, on note $U(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{A}_f^\times$ le sous-groupe $\{\pm 1\}^{r_1} \prod_{\mathfrak{p}} (1 + \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. Montrer que $K^\times \cap U(\mathfrak{m})$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{O}_K^\times$.

Puisque $U(\mathfrak{m}) \subset \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$, les éléments de $K \cap U(\mathfrak{m})$ sont des unités. De plus $U(\mathfrak{m})$ est d'indice fini dans $\mathbb{A}_f^\times$, donc dans $\mathcal{O}_K^\times$.

3. Soit χ_∞ un caractère sur $K_\infty^{\times\circ}$. Montrer qu'il se prolonge en un caractère de Hecke χ si et seulement si $\chi_\infty(\mathcal{O}_K^\times)$ est fini.

Dans le sens direct, un prolongement est d'ordre fini sur les idèles finies, donc χ_∞ est d'ordre fini sur $K^\times$.

Réciproquement, si χ est d'ordre fini sur $\mathcal{O}_K^\times$ il existe un module $\mathfrak{m}$ tel que χ soit trivial sur $\mathcal{O}_K^\times \cap U(\mathfrak{m})$ (puisque $\mathbb{C}^\times$ n'a pas de petit sous-groupe tandis que les $U(\mathfrak{m})$ sont une base de voisinages du neutre).

Ainsi, on a un prolongement de χ_∞ à $K_\infty^{\times\circ} \times U(\mathfrak{m})$ trivial sur $K^\times$. Puisque que c'est un sous-groupe d'indice fini de C_K on peut le prolonger à C_K tout entier.