Université de Paris **25 novembre 2020**
M2 – Théorie des nombres

Feuille 9: caractères de Hecke

1 Définitions

Soit K un corps de nombres. Dans cette feuille, on appelle caractère de Hecke un caractère continu *unitaire* du groupe des classes d'idèles $C_K = \mathbb{A}^\times / K^\times$.

Caractère norme Les quasicaractères (ou grossencharacters) sont les caractères à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$: il s'écrivent comme produit d'un caractère par une puissance réelle de la norme.
On note $\mathbb{A}^1 = \ker|\cdot|$ le sous-groupe compact des idèles de norme 1, et $C_K^1 = \mathbb{A}^1/K^\times$ le groupe des classes d'idèles de norme 1, on a également une décomposition $\widehat{C}_K = \mathbb{R} \times \widehat{C_K^1}$, où le terme $\mathbb{R}$ encode les puissances imaginaires de la norme.

Conducteur Soit v une place de K, on pose
— $U_v(0) = \{1\}$ si v est complexe ;
— $U_v(0) = \{\pm 1\}$ et $U_v(1) = \{1\}$ si v est réelle ;
— $U_v(0) = \mathcal{O}_v^\times$ et $U_v(k) = 1 + \mathfrak{p}^k\mathcal{O}_v$ si $v = \mathfrak{p}$ est non archimédienne.
un caractère sur K_v est défini modulo v^k s'il est trivial sur $U_v(k)$, le conducteur d'un caractère de Hecke est le produit de ses modules de définition minimaux. C'est donc un produit formel de places réelles fois un idéal entier.

2 Zoologie des caractères

Exercice 1 : caractères de Dirichlet

On considère $K = \mathbb{Q}$, et on note $\overline{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ le complété profini de $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_+^\times \times \overline{\mathbb{Z}}^\times$.

2. Soit $\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère de Dirichlet, montrer que χ induit un caractère continu $\overline{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

3. Soit $\tilde{\chi}$ le caractère de Hecke défini sur $\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_+^\times \times \overline{\mathbb{Z}}^\times$ par $\tilde{\chi}(\alpha t k) = \chi(k \bmod N)$. On note χ_∞ la restriction de $\tilde{\chi}$ à la composante archimédienne $\mathbb{Q}_\infty^\times = \mathbb{R}^\times$ de $\mathbb{A}^\times$. Montrer que $\chi_\infty(x) = \operatorname{signe}(x)^e$, où $e \in \{0, 1\}$ est la parité de χ.

4. Réciproquement, montrer que tout caractère continu du groupe des classes d'idèles se décompose en produit d'une norme par un caractère de Dirichlet.

5. Quel est le conducteur, au sens idélique, d'un caractère de Dirichlet ?

Exercice 2 : caractères de conducteur 1

On note $\mathrm{Id}(\mathcal{O}_K)$ le groupe des idéaux inversibles de $\mathcal{O}_K$.

1. Montrer qu'on a un morphisme continu surjectif $\mathbb{A}^1 \to \mathrm{Id}(\mathcal{O}_K)$.

2. Montrer que tout caractère du groupe $\mathrm{Cl}(K)$ est un caractère de Hecke de conducteur 1.

3. Montrer qu'un caractère est de conducteur 1 si et seulement si on peut écrire $\chi = (\chi_\infty, \chi_f)$, où $\chi_f : \mathrm{Id}(K) \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère du groupe des idéaux fractionnaire, $\chi_\infty : (K \otimes \mathbb{R})^\times \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère continu sur les composantes archimédiennes trivial sur $\{\pm 1\}^{r_1}$ et ces caractères vérifient la condition de compatibilité $\chi_\infty(a)\chi_f((a)) = 1$ pour tout $a \in K^\times$.

Exercice 3 : Caractères de type CM

Pascal Molin, version 25 novembre 2020.

On considère $K = \mathbb{Q}(i)$. On note χ_∞ la restriction d'un caractère à la composante archimédienne $\mathbb{C}^\times$.

1. Montrer qu'il existe un caractère de Hecke de conducteur 1 tel que $\chi_\infty(x) = (\frac{x}{|x|})^n$ si et seulement si $n \in 4\mathbb{Z}$.

2. Montrer que dans le cas $K = \mathbb{Q}(i)$, le groupe des caractères de conducteur 1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

3. Soit K un corps CM, c'est-à-dire une extension totalement complexe d'un corps totalement réel. On note w_K le nombre de racines de l'unité de K. Montrer que pour tout $\eta \in \mathcal{O}_K^\times$ et tout plongement archimédien $\sigma : K \to \mathbb{C}$, $2w_K \arg(\sigma(\eta)) \equiv 0 \bmod 2\pi$.

4. En déduire un réseau de rang r_2 dans le groupe des caractères de conducteur 1.

Exercice 4 : Caractères de type Maass

Soit $K = \mathbb{Q}[x]/x^3 - x - 1$, c'est un corps cubique complexe de nombre de classes 1. On note $\eta \in \mathcal{O}_K^\times$ une unité fondamentale que l'on choisit supérieure à 1 dans le plongement réel, et on note $R = \log \eta$ le régulateur de K.

1. Montrer que les caractères de conducteur 1 sur $\mathbb{A}^1$ sont de la forme $\chi_\infty(x,y) = |x|^{iu} |y|^{iv} (\frac{y}{|y|})^k$, pour $u, v \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $u + 2v = 0$.

2. Montrer que les caractères de Hecke de conducteur 1 forment le réseau $(u,v,k) \in (\frac{4\pi}{3R}, -\frac{2\pi}{3R}, 0)\mathbb{Z} + (\frac{4\alpha}{3R}, -\frac{2\alpha}{3R}, 2)\mathbb{Z}$, où $\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{R}}$ est le plongement complexe de η.

Exercice 5 : Type à l'infini

Soit K un corps de nombres, on note $K_\infty^{\times\circ} = \prod_{v|\mathbb{R}} \mathbb{R}_+^\times \prod_{v|\mathbb{C}} \mathbb{C}^\times$ la composante neutre de $\mathbb{A}^\times$, et $\mathbb{A}_f^\times$ le groupe des idèles finies de sorte que $\mathbb{A}^\times = K_\infty^{\times\circ} \times \mathbb{A}_f^\times$.
Si χ est un caractère de Hecke, on appelle *type à l'infini* de χ, et on note χ_∞ la restriction de χ à $K_\infty^{\times\circ}$.

1. Montrer que deux caractères ont même type à l'infini si et seulement si ils diffèrent d'un caractère d'ordre fini.

2. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de $\mathcal{O}_K$, on note $U(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{A}_f$ le sous-groupe $\{\pm 1\}^{r_1} \prod_{\mathfrak{p}} (1 + \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m})} \mathcal{O}_\mathfrak{p})$. Montrer que $K^\times \cap U(\mathfrak{m})$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{O}_K^\times$.

3. Soit χ_∞ un caractère sur $K_\infty^{\times\circ}$. Montrer qu'il se prolonge en un caractère de Hecke χ si et seulement si $\chi_\infty(\mathcal{O}_K^\times)$ est fini.

Pascal Molin, version 25 novembre 2020.