

CHAPITRE 1

ÉTUDE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Champs de vecteurs dans \mathbb{R}^2

Définition 1.1. — ⁽¹⁾ Soit U une partie de \mathbb{R}^2 . Un **champ de vecteurs** sur U est une application $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto v(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

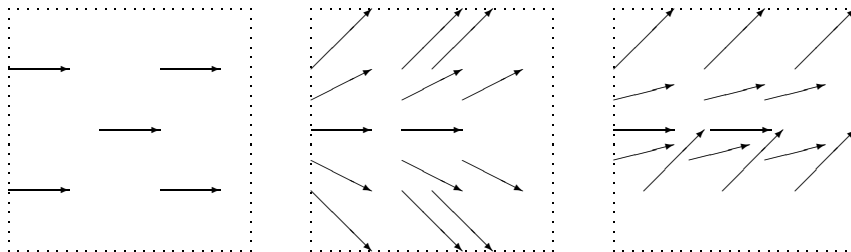
Les fonctions $v_1, v_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont appelées les composantes du champ de vecteur. Par exemple, pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, l'application

$$v_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 . Donnons ci-dessous d'autres exemples.

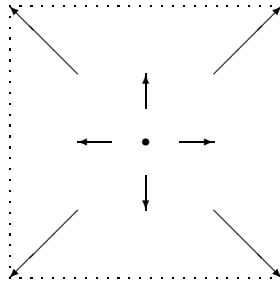
Exemples 1.2. — Prenons $U = \mathbb{R}^2$.

(1) Le champ de vecteurs constant $v_0(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et les champs de vecteurs $v_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ et $v_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 \end{pmatrix}$:

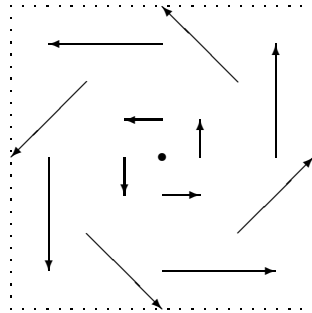


(2) Le champ de vecteurs $v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

⁽¹⁾Version du 9/5/17 : coquilles corrigées, détails ajoutés dans la preuve de 2.8 (ii), ajout à la fin sur la fonction d'Airy Ai. Le 9/5 : une coquille corrigée dans 1.5.



(3) Le champ de vecteurs $v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.



Définition 1.3 (Équation différentielle associée à un champ de vecteurs)

Soient U une partie de \mathbb{R}^2 et v un champ de vecteurs sur U . Fixant un point $u_0 = (x_0, y_0)$ de U et un réel t_0 , on lui associe l'équation différentielle $X'(t) = v(X(t))$ avec la condition initiale $X(t_0) = u_0$, c.-à-d. on cherche une fonction dérivable

$$X : I \rightarrow U, \quad t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

telle que

$$\begin{cases} X(t_0) = u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \forall t \in I, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = v(X(t)) = \begin{pmatrix} v_1(x(t), y(t)) \\ v_2(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \end{cases}$$

où I est un intervalle ouvert contenant t_0 et « aussi grand que possible ». Ceci équivaut donc au système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = v_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = v_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. Dans ce cas, on dit que l'application $I \rightarrow U, t \mapsto X(t)$ est une **courbe intégrale** du champ de vecteurs v , passant par le point u_0 au temps t_0 .

On dit que le point $u_0 \in U$ est un point **stationnaire** du champ de vecteurs v si $v(u_0) = 0$. Dans ce cas, la fonction constante $X : \mathbb{R} \rightarrow U, t \mapsto u_0$ est une courbe intégrale de v passant par u_0 .

Remarque 1.4. — Soit U une partie de \mathbb{R}^2 . On peut aussi considérer des « champs de vecteurs sur U qui dépendent du temps », c.-à-d. une application

$$(\dagger) \quad v : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, x, y) \mapsto v(t, x, y) = \begin{pmatrix} v_1(t, x, y) \\ v_2(t, x, y) \end{pmatrix}$$

et considérer l'équation différentielle

$$X'(t) = v(t, X(t))$$

c.-à-d., étant donné un réel t_0 et un point $u_0 = (x_0, y_0)$ de U , chercher des fonctions dérivables $X : I \rightarrow U$, $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ telles que

$$(\ddagger) \quad \begin{cases} X(t_0) = u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \forall t \in I, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = v(t, X(t)) = \begin{pmatrix} v_1(t, x(t), y(t)) \\ v_2(t, x(t), y(t)) \end{pmatrix} \end{cases}$$

où I est un intervalle ouvert contenant t_0 et « aussi grand que possible ». On dit alors que le champ de vecteurs et l'équation différentielle associée sont « non autonomes ».

Au contraire, les champs de vecteurs et équations différentielles considérés plus hauts sont dits « autonomes ». En fait, on peut toujours se ramener au cas autonome, en « ajoutant une dimension » : pour un champ de vecteurs non autonome $v : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$, notons Ω la partie $\mathbb{R} \times U$ de \mathbb{R}^3 et considérons le champ de vecteurs autonome $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ v_1(z, x, y) \\ v_2(z, x, y) \end{pmatrix}.$$

Soit $Z : I \rightarrow \Omega$, $t \mapsto Z(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une solution de l'équation différentielle

$$(*) \quad \begin{cases} Z(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \forall t \in I, \quad Z'(t) = \begin{pmatrix} z'(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = w(Z(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1(z(t), x(t), y(t)) \\ v_2(z(t), x(t), y(t)) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Alors $z'(t) = 1$, avec la condition initiale $z(t_0) = t_0$, donne $z(t) = t$ et l'on a donc

$$Z(t) = \begin{pmatrix} t \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

et, comme $z(t) = t$, la fonction $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ vérifie

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t, x(t), y(t)) \\ v_2(t, x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

et $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, i.e. c'est une solution de (\ddagger) . Réciproquement, toute solution de (\ddagger) est une solution de $(*)$.

Au lieu de passer ainsi de \mathbb{R}^2 à \mathbb{R}^3 , nous allons étudier le cas plus simple d'une équation différentielle scalaire (i.e. en une variable) non autonome, i.e. on a une fonction de deux variables $(t, y) \mapsto f(t, y)$ définie sur une partie U de \mathbb{R}^2 et l'on considère l'équation différentielle (non autonome)

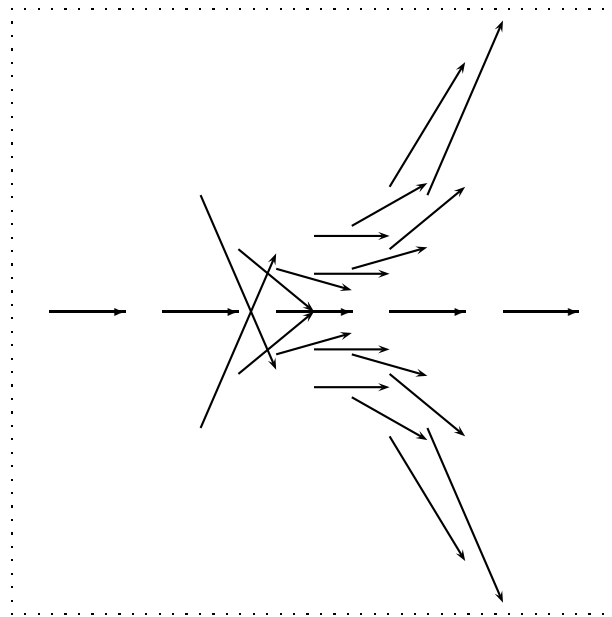
$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Par le même argument que plus haut, ceci revient à étudier sur U les solutions de l'équation différentielle définie par le champ de vecteurs autonome

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

(On pourrait aussi noter (t, y) les coordonnées sur \mathbb{R}^2 et écrire $v(t, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{pmatrix}$.) On traite un exemple ci-dessous.

Exemple 1.5. — Soit $u \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $x'(t) = tx(t)$ avec la condition initiale $x(0) = u$ conduit au champ de vecteurs $v(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ tx \end{pmatrix}$ sur \mathbb{R}^2 :



Résolvons cette équation différentielle. Si $u = 0$, la fonction nulle est solution. Supposons que $x(t)$ soit une solution avec $x(0) = u \neq 0$. Par continuité x reste non nulle, donc garde un signe constant $\varepsilon = \pm 1$, sur un intervalle ouvert I contenant 0, et sur cet intervalle

l'équation s'écrit $\frac{x'(t)}{x(t)} = t$ et le terme de gauche est la dérivée de la fonction $\log(\varepsilon x(t))$, d'où $\log(\varepsilon x(t)) = t^2/2 + b$ avec $b = \log(\varepsilon u)$, puis $x(t) = u \exp(t^2/2)$. Ayant ainsi trouvé cette solution, on peut montrer l'unicité comme suit : soit $z(t)$ une autre solution, alors la fonction $g(t) = z(t) \exp(-t^2/2)$ vérifie

$$g'(t) = z'(t) \exp(-t^2/2) - tz(t) \exp(-t^2/2) = tz(t) \exp(-t^2/2) - tz(t) \exp(-t^2/2) = 0$$

donc $g(t)$ est constante, de valeur $g(0) = z(0) = u$, d'où $z(t) = u \exp(t^2/2)$. Ceci montre que les courbes intégrales de v sont les applications $x(t, u) = u \exp(t^2/2)$, i.e. $x(t, u)$ est la courbe intégrale de v qui passe par le point $(0, u)$ au temps $t = 0$.

Remarque 1.6. — Le même argument que ci-dessus permet de montrer que pour une application continue $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$, $u \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $x'(t) = a(t)x(t)$ avec la condition initiale $x(t_0) = u$ admet pour unique solution l'application

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto u \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Exercice 1.7. — Déterminer les courbes intégrales des champs de vecteurs des exemples 1.2 et en tracer quelques unes.

Jusqu'à présent, on n'a pas fait d'hypothèses (de continuité ou dérivabilité) sur le champ de vecteurs v . Pour introduire les hypothèses nécessaires, commençons par les définitions suivantes.

Définition 1.8. — On « rappelle » que sur \mathbb{R}^2 la norme euclidienne est définie pour tout $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par $\|p\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et la distance euclidienne entre deux points p et q est définie par

$$d(p, q) = \|p - q\| = \|q - p\| = d(q, p).$$

On a $d(p, q) = 0$ si et seulement si $q = p$, et la distance vérifie l'identité triangulaire :

$$\forall m, p, q \in \mathbb{R}^2, \quad d(m, q) \leq d(m, p) + d(p, q).$$

Celle-ci découle du fait que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\star) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Cette inégalité est aussi appelée « inégalité triangulaire ».

Pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ on note $D(p, R)$ le disque ouvert de centre p et de rayon R , i.e.

$$D(p, R) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \|q - p\| < R\}.$$

Définition 1.9 (Ouverts de \mathbb{R}^2). — On dit qu'une partie U de \mathbb{R}^2 est un **ouvert** (ou une partie ouverte) si pour tout $p \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le disque $D(p, r)$ soit contenu dans U .

Exemples 1.10. — (1) Soient $p \in \mathbb{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Alors le disque ouvert $D(p, R)$ est un ouvert. En effet, soit $q \in D(p, R)$, alors $r = R - \|q - p\|$ est > 0 . Pour tout $u \in D(q, r)$ on a, d'après l'inégalité triangulaire (\star) :

$$\|u - p\| \leq \|u - q\| + \|q - p\| < r + \|q - p\| = R.$$

Ceci prouve que $D(q, r) \subset D(p, R)$ et donc $D(p, R)$ est ouvert.

(2) Le carré ouvert $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\}$ est ouvert (exercice!). Par contre le carré fermé $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$ n'est pas ouvert, car si p est un point du bord du carré alors aucun disque centré en p n'est entièrement contenu dans \overline{C} .

(3) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ son graphe et U le complémentaire de Γ_f dans \mathbb{R}^2 . Montrer que U est ouvert.

Les ouverts U sont les « bonnes » parties de \mathbb{R}^2 sur lesquelles on peut définir la notion d'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , voir plus bas.

Définition 1.11. — Soient A une partie de \mathbb{R}^2 et f une application $A \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) On dit f est **continu** en un point p de A si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $q \in A \cap D(p, \delta)$ on ait $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$. Autrement dit, pour tout $q \in A$ on a :

$$\|q - p\| < \delta \implies |f(q) - f(p)| < \varepsilon.$$

(Ceci est donc analogue à la définition de la continuité pour une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.)

(2) On dit f est **continu** sur A si elle l'est en tout point de A .

Exemples 1.12. — (1) Les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues.

(2) Si $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors toute combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est continue, ainsi que le produit fg . De plus, si $g(p) \neq 0$ alors f/g est continue en p .

(3) Par conséquent, toute fonction polynôme $(x, y) \mapsto P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ est continue. Si P, Q sont deux tels polynômes, la fraction rationnelle $P(x, y)/Q(x, y)$ est continue en tout point (x, y) où $Q(x, y) \neq 0$.

(4) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors $g \circ f$ l'est aussi.

(5) Si $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors l'application $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(f_1(x, y), f_2(x, y))$ est continue.

Exercice 1.13. — Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \neq 0\}$$

est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Retrouver ainsi le point (3) de 1.10.

Les ouverts U sont les « bonnes » parties de \mathbb{R}^2 sur lesquelles on peut définir la notion d'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , pour la raison suivante. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , f une application $U \rightarrow \mathbb{R}$ et $p_0 = (x_0, y_0)$ un point de U . Comme U est ouvert, il contient un disque ouvert $D(p, \delta)$, donc contient les points $(x_0 + h, y_0)$ et $(x_0, y_0 + h)$ pour tout

$h \in]-\delta, \delta[$, et donc f est définie en ces points. Par conséquent, pour un tel h non nul, on peut considérer les taux d'accroissement :

$$\Delta_1(x_0, y_0; h) = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad \Delta_2(x_0, y_0; h) = \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Définition 1.14. — Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et f une application $U \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Soit $p_0 = (x_0, y_0)$ un point de U . Si le taux d'accroissement $\Delta_1(x_0, y_0; h)$ admet une limite lorsque h tend vers 0, cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(p_0),$$

ou encore $\partial_x f(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(p_0)$, et l'on dit que f admet en p_0 une dérivée partielle $\partial f / \partial x$. De même, si $\Delta_2(x_0, y_0; h)$ admet une limite lorsque h tend vers 0, cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

ou encore $\partial_y f(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(p_0)$, et l'on dit que f admet en p_0 une dérivée partielle $\partial f / \partial y$.

(2) On dit que f est **de classe C^1** sur U si les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existent en tout point p de U et si les applications

$$\partial_x f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \partial_x f(p) \quad \text{et} \quad \partial_y f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \partial_y f(p)$$

sont **continues**. On peut montrer que ceci entraîne que f est elle-même continue.

Exemples 1.15. — (1) L'application $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est de classe C^1 : pour tout (x, y) on a $\partial_x s(x, y) = 1 = \partial_y s(x, y)$.

(2) L'application $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ est de classe C^1 : pour tout (x, y) on a $\partial_x p(x, y) = y$ et $\partial_y p(x, y) = x$.

(3) Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , toute combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ l'est aussi, ainsi que le produit fg . De plus, si g ne s'annule pas sur U alors f/g est de classe C^1 sur U .

(4) Par conséquent, toute fonction polynôme $P(x, y)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Si $Q(x, y)$ est un polynôme non nul, alors l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) \neq 0\}$$

est non vide et l'application $(x, y) \mapsto P(x, y)/Q(x, y)$ est de classe C^1 sur U .

(5) Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , alors $g \circ f$ l'est aussi.

(6) Si $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , alors l'application $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(f_1(x, y), f_2(x, y))$ l'est aussi.

Définition 1.16. — Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et f une application $U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Notons f_1, \dots, f_p les composantes de f , i.e. pour tout $(x, y) \in U$ on a

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_p(x, y) \end{pmatrix}.$$

On dit que f est de classe C^1 si et seulement si chaque f_i l'est. En particulier, un champ de vecteurs $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 si et seulement si ses deux composantes v_1 et v_2 le sont.

Remarque 1.17. — Les définitions précédentes, données pour les fonctions de deux variables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , se généralisent de façon immédiate au cas des fonctions de n variables. Il faut d'abord définir ce que qu'est un ouvert de \mathbb{R}^n : pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans \mathbb{R}^n , on définit sa norme euclidienne par

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, la **boule ouverte** $B(p, R)$ de centre p et de rayon R est définie par

$$B(p, R) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q - p\| < R\}.$$

On dit qu'une partie U de \mathbb{R}^n est un **ouvert** si pour tout $p \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule $B(p, r)$ soit contenue dans U .

Si A est une partie de \mathbb{R}^n , on dit qu'une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** si pour tout $p \in A$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $q \in A \cap B(p, \delta)$ on ait $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$. Enfin, soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et f une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur U si pour tout $i = 1, \dots, n$, f admet une dérivée partielle $\partial f / \partial x_i$ et si celle-ci est continue sur U .

On admet le théorème suivant, qui est fondamental pour pouvoir parler de **la** courbe intégrale ϕ du champ de vecteurs v passant par un point donné u_0 au temps t_0 . Le lecteur ou la lectrice intéressé(e) pourra trouver des démonstration dans [HuWe] §4.4 et [HSD] Chap. 17 (en particulier §17.4 pour le point (iii)).

Théorème 1.18 (Cauchy-Lipschitz). — Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 . On considère sur un intervalle I de \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(\star) \quad x'(t) = v(x(t))$$

pour une fonction dérivable $x : I \rightarrow U$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

(i) (Existence et unicité) Pour tout point $p = (t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times U$ il existe une unique solution $x : I_p \rightarrow U$ vérifiant $x(t_0) = u_0$ et $x'(t) = v(x(t))$ pour tout $t \in I_p$, où I_p est un intervalle ouvert contenant t_0 et aussi grand que possible^(†). De plus, x est de classe C^2 puisque $x' = v \circ x$ est de classe C^1 .

(†) Dire que I_p est « aussi grand que possible » signifie que si (J, y) est un couple formé d'un intervalle J de \mathbb{R} contenant t_0 et d'une solution $y : J \rightarrow U$ de (\star) telle que $y(t_0) = u_0$, alors $J \subset I_p$ et $y(t) = x(t)$ pour tout $t \in J$. On dit que le couple (I_p, x) est la « solution maximale passant par p ».

(ii) (Dépendance des conditions initiales) Désignons par $t \mapsto x(t) = \phi(t, t_0, u_0)$ l'application définie plus haut. Alors l'application ϕ est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2 \times U$ (contenant $\{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \times U$) et est de classe C^1 sur Ω .

(iii) (Solutions bornées) Supposons que $U = \mathbb{R}^n$, i.e. que v soit défini sur \mathbb{R}^n tout entier. Soient $p = (t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et (I_p, x) la solution maximale passant par p . S'il existe un réel $M > 0$ tel que $\|x(t)\| \leq M$ pour tout $t \in I_p$ tel que $t \geq t_0$, alors I_p contient $[t_0, +\infty[$.

En d'autres termes : si la borne supérieure de I_p est un réel b alors la solution $x(t)$ « explose » quand t tend vers b^- , c.-à-d. il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $[t_0, b[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x(t_n)\| = +\infty$. Et de même pour la borne inférieure de I_p .

Remarque 1.19. — Pour simplifier, on n'a énoncé le théorème que dans le cas « autonome », mais il couvre aussi le cas « non autonome » en passant en dimension $n + 1$, comme expliqué en 1.4.

Exemples 1.20. — On prend $U = \mathbb{R}$ et l'on considère les champs de vecteurs $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivants.

(1) Pour le champ constant $v(x) = a \neq 0$, on obtient l'équation différentielle $x'(t) = a$. Si la condition initiale est $x(t_0) = u_0$, la solution est $\phi(t, t_0, u_0) = a(t - t_0) + u_0$, qui est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 .

(2) Pour $v(x) = ax$, où $a \neq 0$, on obtient l'équation différentielle $x'(t) = ax(t)$. Si la condition initiale est $x(t_0) = u_0$, on sait que la solution est

$$\phi(t, t_0, u_0) = u_0 e^{a(t-t_0)},$$

qui est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 .

(3) Pour $v(x) = x^2$, on obtient l'équation différentielle $x'(t) = x(t)^2$, avec la condition initiale $x(t_0) = u_0$. Si $u_0 = 0$, la solution est la fonction nulle. Supposons que $u_0 \neq 0$ et notons $x(t)$ la solution telle que $x(t_0) = u_0$. Par continuité, x reste non nulle, donc de signe constant $\varepsilon = \pm 1$, sur un intervalle ouvert I contenant t_0 , et sur cet intervalle l'équation s'écrit $\frac{-x'(t)}{x(t)^2} = -1$ et le terme de gauche est la dérivée de la fonction $1/x(t)$, d'où

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x(t_0)} - (t - t_0) = \frac{1 - u_0(t - t_0)}{u_0}.$$

On obtient donc la solution

$$x(t) = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}$$

qui est définie sur le plus grand intervalle ouvert $I(t_0, u_0)$ contenant t_0 mais pas $t_0 + \frac{1}{u_0}$. Celui-ci est défini par le fait que $1 - u_0(t - t_0)$ ne s'annule pas, donc garde le même signe que pour $t = t_0$, c.-à-d. par la condition :

$$(*) \quad 1 - u_0(t - t_0) > 0.$$

Ainsi, on a

$$I(t_0, u_0) = \begin{cases}]-\infty, t_0 + \frac{1}{u_0}[& \text{si } u_0 > 0; \\]t_0 + \frac{1}{u_0}, +\infty[& \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$

Enfin, tenant compte de (*) ci-dessus, on voit que la fonction

$$\phi(t, t_0, u_0) = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}.$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \{(t, t_0, u_0) \in \mathbb{R}^3 \mid u_0(t - t_0) < 1\}$ de \mathbb{R}^3 . (Exercice : montrer que l'application $(t, t_0, u_0) \mapsto u_0(t - t_0)$ est continue, puis que Ω est bien un ouvert de \mathbb{R}^3 .)

Remarque 1.21. — Dans les deux premiers exemples ci-dessus, chaque solution est définie sur \mathbb{R} tout entier, i.e. on a $I_p = \mathbb{R}$ pour tout $p = (t_0, u_0)$. Mais l'exemple (3) montre que ceci n'est pas toujours le cas en général.

2. Barrières, entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans tous les exemples traités précédemment, on n'a considéré que des équations différentielles très simples, qu'on peut résoudre explicitement. Ceci n'est pas toujours possible en général. Aussi on va introduire dans cette section des concepts et méthodes permettant d'étudier le comportement qualitatif des solutions d'une équation différentielle :

$$(*) \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 . En particulier, on étudiera en détail le cas où $f(x, y) = y^2 - x$. Comme expliqué plus haut, on introduit le champ de vecteurs v sur \mathbb{R}^2 défini par

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

et l'on considère l'équation différentielle autonome

$$(**) \quad X'(t) = v(X(t)) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Comme f est de classe C^1 , on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour tous $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, considérons le point $p = (t_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 ; d'après Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $X(t)$ de (**) telle que

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

et l'on dira que c'est la solution passant par $p = (t_0, y_0)$. Il résulte alors de la discussion faite en 1.4 que l'on a

$$X(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}$$

où $y(t)$ est l'unique solution de (*) telle que $y(t_0) = y_0$. Si l'on veut faire apparaître les « conditions initiales » (t_0, y_0) , on écrira $y(t, t_0, y_0)$ et $X(t, t_0, y_0)$.

Définition 2.1 (Barrières). — Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 .

(a) On dit que α est une **barrière inférieure** forte (resp. barrière inférieure faible) sur I pour l'équation différentielle (*) si, pour tout $t \in I$, on a :

$$\alpha'(t) < f(t, \alpha(t)) \quad \text{resp.} \quad \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)).$$

(b) De même, on dit que β est une **barrière supérieure** forte (resp. barrière supérieure faible) sur I pour l'équation différentielle (*), si pour tout $t \in I$ on a :

$$\beta'(t) > f(t, \beta(t)) \quad \text{resp.} \quad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t)).$$

Proposition 2.2. — Soient α (resp. β) une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour (*) sur un intervalle I . Soit u une solution de (*) définie sur I et soit $t_0 \in I$.

(a) On suppose que $u(t_0) = \alpha(t_0)$. Alors on a $u(t) > \alpha(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t > t_0$ et $u(t) < \alpha(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$.

(b) De même, si $u(t_0) = \beta(t_0)$ on a $u(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t > t_0$ et $u(t) > \beta(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$.

(c) Si $u(t_0) \geq \alpha(t_0)$ (resp. $u(t_0) \leq \beta(t_0)$) alors $u(t) \geq \alpha(t)$ (resp. $u(t) \leq \beta(t)$) pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$.

Démonstration. — Supposons $u(t_0) = \alpha(t_0)$. Alors on a

$$u'(t_0) = f(t_0, u(t_0)) = f(t_0, \alpha(t_0)) > \alpha'(t_0)$$

donc $(u' - \alpha')(t_0)$ est > 0 et, par continuité, $u' - \alpha'$ reste > 0 sur un intervalle $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$. Par conséquent, $u - \alpha$ est strictement croissante sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ et donc :

$$\forall h \in]0, \delta[, \quad (u - \alpha)(t_0 + h) > (u - \alpha)(t_0) = 0 > (u - \alpha)(t_0 - h).$$

Posons $t_1 = t_0 + \delta$ et montrons que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_1$ on a $u(t) > \alpha(t)$. Raisonnons par l'absurde en supposant l'ensemble

$$A = \{t \in I \mid t \geq t_1, \quad u(t) \leq \alpha(t)\}$$

non vide. Soit t_2 sa borne inférieure. Alors t_2 est la limite d'une suite décroissante d'éléments de A et donc, comme $u - \alpha$ est continue, on a $u(t_2) \leq \alpha(t_2)$. D'autre part, pour tout $t \in [t_1, t_2[$ on a $(u - \alpha)(t) > 0$ et donc $u(t_2) \geq \alpha(t_2)$. Par conséquent, on a $u(t_2) = \alpha(t_2)$, et donc

$$u'(t_2) = f(t_2, u(t_2)) = f(t_2, \alpha(t_2)) > \alpha'(t_2)$$

d'où $(u' - \alpha')(t_2) > 0$. Par le même argument que plus haut, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $u - \alpha$ soit strictement croissante sur $[t_2 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, d'où

$$(u - \alpha)(t_2 - \varepsilon) < (u - \alpha)(t_0) = 0.$$

Mais ceci contredit le fait que $u(t) > \alpha(t)$ pour tout $t \in [t_1, t_2[$. Ceci montre donc que $u(t) > \alpha(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t > t_0$.

On montre de même que $u(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t > t_0$. Enfin, les assertions pour $t < t_0$ s'obtiennent « en renversant le sens du temps » : soit $J = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid t_0 - t \in I\}$; pour tout $t \in J$, posons $v(t) = u(t_0 - t)$ et $\gamma(t) = \alpha(t_0 - t)$. Alors on a pour tout $t \in J$

$$(\dagger) \quad v'(t) = -u'(t_0 - t) = -f(t_0 - t, u(t_0 - t)) = -f(t_0 - t, v(t))$$

et

$$\gamma'(t) = -\alpha'(t_0 - t) > -f(t_0 - t, \alpha(t_0 - t)) = -f(t_0 - t, \gamma(t)).$$

Par conséquent, γ est une barrière supérieure forte sur J pour l'équation différentielle (\dagger) . D'après ce qui précède, on a donc $v(s) < \gamma(s)$ pour tout $s \in J$ tel que $s > 0$, d'où $u(t) < \alpha(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$. On obtient de même que $u(t) > \beta(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$. Ceci prouve (a) et (b).

Enfin, supposons simplement $u(t_0) \geq \alpha(t_0)$. S'il existait $t_1 \in I$ tel que $t_1 > t_0$ et $u(t) < \alpha(t)$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $t_2 \in [t_0, t_1[$ tel que $u(t_2) = \alpha(t_2)$. Mais alors, d'après (i) on aurait $u(t) \geq \alpha(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_2$, en particulier pour $t = t_1$, une contradiction. On montre de même que si $u(t) \leq \beta(t_0)$ alors $u(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$. \square

De façon imagée, la proposition précédente peut se retenir en disant qu'une courbe intégrale de l'équation différentielle $(*)$ ne peut traverser une barrière inférieure (resp. supérieure) que « du bas vers le haut » (resp. « du haut vers le bas ») dans le sens des t croissants.

Remarque 2.3. — La proposition précédente reste vraie pour les barrières faibles, en mettant dans la conclusion des inégalités larges, mais la démonstration est plus difficile (elle utilise le lemme de Gronwall), voir [HuWe], §4.7, Th. 4.8.

Définition 2.4. — Soient α (resp. β) une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur un intervalle I . Si l'on a $\alpha(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in I$ alors la région

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

s'appelle un **entonnoir**.

On déduit de la proposition 2.2 et du point (iii) du théorème 1.18 le théorème suivant.

Théorème 2.5 (de l'entonnoir). — Soit E un entonnoir pour $(*)$ sur un intervalle $I = [a, b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, et soit (J, u) la solution maximale de $(*)$ passant en un point (t_0, u_0) de E . Alors u est définie sur $[t_0, b[$ et l'on a $(t, u(t)) \in E$ pour tout $t \in [t_0, b[$.

Démonstration. — Fixons $s \in [t_0, b[$. Comme α et β sont continues sur l'intervalle $[t_0, s]$ elles y sont bornées : il existe donc un réel $M_s > 0$ tel que

$$-M_s \leq \beta(t) < \alpha(t) \leq M_s$$

pour tout $t \in [a, s]$. Comme $u(t_0) = u_0$ est compris entre $\alpha(t_0)$ et $\beta(t_0)$ alors, d'après le point (c) de la proposition 2.2, on a pour tout $t \in J \cap [t_0, s]$:

$$-M_s \leq \beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t) \leq M_s$$

et donc $u(t)$ reste borné pour tout $t \in J \cap [t_0, s]$. Donc, d'après le point (iii) du théorème 1.18, J contient $[t_0, s]$. Comme s est arbitraire dans $[t_0, b[$, il en résulte que J contient $[t_0, b[$ et que pour tout $t \in [t_0, b[$ on a

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t),$$

d'où $(t, u(t)) \in E$ pour tout $t \in [t_0, b[$. □

Définition 2.6. — Soient α (resp. β) une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur un intervalle I . Si l'on a $\alpha(t) > \beta(t)$ pour tout $t \in I$ alors la région

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, \quad \beta(x) \leq y \leq \alpha(x)\}$$

s'appelle un **anti-entonnoir**.

Terminologie 2.7. — On dit qu'un entonnoir ou anti-entonnoir sur un intervalle $I = [a, b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *resserré*, si $\lim_{t \rightarrow b} |\alpha(t) - \beta(t)| = 0$.

Démontrons maintenant le théorème suivant.

Théorème 2.8 (de l'anti-entonnoir). — Soit A un anti-entonnoir pour $(*)$ sur un intervalle $[a, b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

(i) Il existe au moins une solution u de $(*)$ telle que $(t, u(t)) \in A$ pour tout $t \in [a, b[$.

(ii) De plus, si A est resserré et si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in A$, une telle solution est **unique**.

Démonstration. — Pour tout $s \in [a, b[$, soit (I_s, ν_s) (resp. (J_s, η_s)) la solution maximale de $(*)$ vérifiant $\nu_s(s) = \alpha(s)$ (resp. $\eta_s(s) = \beta(s)$). Alors

$$\nu_s(s) = \alpha(s) > \beta(s) = \eta_s(s)$$

et comme $\nu_s - \eta_s$ ne peut s'annuler (car sinon, par unicité on aurait $\nu_s = \eta_s$), on a $\nu_s(t) > \eta_s(t)$ pour tout $t \in I_s \cap J_s$. De plus, d'après la proposition 2.2 on a :

$$(1) \quad \begin{cases} \forall t \in I_s \cap [a, s], & \beta(t) \leq \nu_s(t) \leq \alpha(t) \\ \forall t \in J_s \cap [a, s], & \beta(t) \leq \eta_s(t) \leq \alpha(t) \end{cases}$$

(En effet, en renversant le sens du temps comme dans la démonstration de 2.2, la courbe $t \mapsto \beta(s-t)$ (resp. $t \mapsto \alpha(s-t)$) devient une barrière inférieure (resp. supérieure) sur l'intervalle $[0, s-a]$, i.e. A devient un entonnoir pour le temps décroissant.) Comme α et β sont continues sur l'intervalle $[a, s]$ elles y sont bornées : il existe donc un réel $M_s > 0$ tel que

$$(2) \quad -M_s \leq \beta(t) < \alpha(t) \leq M_s$$

pour tout $t \in [a, s]$. Alors, (1) et (2) montrent que ν_s (resp. η_s) reste bornée pour tout $t \in [a, s]$. Par conséquent, d'après le point (iii) du théorème 1.18, I_s et J_s contiennent $[a, s]$. On a donc :

$$(3) \quad \forall s \in [a, b], \quad \forall t \in [a, s], \quad \beta(t) \leq \eta_s(t) < \nu_s(t) \leq \alpha(t).$$

Pour tout $s \in [a, b[$, notons K_s l'intervalle fermé $[\eta_s(a), \nu_s(a)]$.

Ces intervalles sont emboîtés, i.e. on a $K_{s_2} \subset K_{s_1}$ si $s_2 > s_1$. En effet, d'après la proposition 2.2, on a $\nu_{s_2}(s_1) < \alpha(s_1) = \nu_{s_1}(s_1)$ et donc, comme $\nu_{s_2} - \nu_{s_1}$ ne peut s'annuler, on a $\nu_{s_2}(t) < \nu_{s_1}(t)$ pour tout $t \in [a, s_1]$, en particulier pour $t = a$. On montre de même que $\eta_{s_2}(a) > \eta_{s_1}(a)$.⁽²⁾

Par conséquent, pour tous $s_2 > s_1$ dans $[a, b[$ on a :

$$\eta_{s_1}(a) < \eta_{s_2}(a) < \nu_{s_2}(a) < \nu_{s_1}(a).$$

Fixant s_1 et faisant tendre s_2 vers b , on obtient que

$$\eta = \sup_{s \in [a, b[} \eta_s(a)$$

est $< \nu_{s_1}(a)$, puis, faisant tendre s_1 vers b on obtient que $\nu = \inf_{s \in [a, b[} \nu_s(a)$ est $\geq \eta$. On obtient donc que l'intersection pour $s \in [a, b[$ des K_s est l'intervalle non vide $[\eta, \nu]$, et pour tout $s \in [a, b[$ on a

$$\eta_s(a) < \eta \leq \nu < \nu_s(a).$$

(En effet, si on avait $\eta_s(a) = \eta$ on aurait $\eta_{s'}(a) > \eta$ pour tout $s' > s$, une contradiction.)

Soient alors $y_0 \in [\eta, \nu]$ et (I, u) la solution maximale de (*) vérifiant $u(a) = y_0$. Comme $\nu_s - u$ et $u - \eta_s$ ne peuvent s'annuler, on a :

$$\forall t \in I \cap [a, s], \quad -M_s \leq \beta(t) \leq \eta_s(t) < u(t) < \nu_s(t) \leq \alpha(t) \leq M_s.$$

Donc, d'après le point (iii) du théorème 1.18, I contient $[a, s]$ pour tout $s \in [a, b[$. Par conséquent, I contient $[a, b[$ et pour tout $t \in [a, b[$ on a

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$$

i.e. on a $(t, u(t)) \in A$ pour tout $t \in [a, b[$. Ceci prouve (i).

De plus, le même raisonnement montre que s'il existe $t_0 \geq a$ et une solution u définie sur $[t_0, b[$ telle que $(t, u(t)) \in A$ pour tout $t \in [a, b[$, alors u est défini sur $[a, b[$; on a donc $u(a) \in [\beta(a), \alpha(a)]$. De plus, on a nécessairement $u(a) \in [\eta, \nu]$ car si on avait, par exemple, $u(a) > \nu$ alors il existerait $s \in [a, b[$ tel que $\nu_s(a) < u(a)$ et donc on aurait $u(t) > \nu_s(t)$ pour tout $t \in [a, b[$; en particulier $u(s) > \nu_s(s) = \alpha(s)$ donc u sortirait de l'anti-entonnoir avant le temps s . Ceci montre que les solutions qui « restent » dans A pour tout $t \in [a, b[$ sont exactement les solutions u pour lesquelles $u(a) \in [\eta, \nu]$.

⁽²⁾Pour suivre ces arguments, le lecteur/la lectrice est invité(e) à faire une figure, ou à regarder les figures 4.17 et 4.18 (pp. 152-153) de [HuWe].

Prouvons maintenant (ii) en raisonnant par l'absurde. Supposons $\nu > \eta$ et notons u_1 (resp. u_2) la solution telle que $u_1(a) = \nu$ (resp. $= \eta$). Alors, pour tout $t \in [a, b[$ on a $\alpha(t) \geq u_1(t) > u_2(t) \geq \beta(t)$ et

$$(u'_1 - u'_2)(t) = f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) = \int_{u_2(t)}^{u_1(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dy.$$

Par hypothèse, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \geq 0$ pour tout $(t, y) \in A$ et donc l'intégrale ci-dessus est ≥ 0 .

Par conséquent la fonction $u_1 - u_2$ est croissante et donc pour tout $t \in [a, b[$ on a

$$\beta(t) - \alpha(t) \geq u_1(t) - u_2(t) \geq u_1(a) - u_2(a) = \nu - \eta > 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse que $\lim_{t \rightarrow b} |\beta(t) - \alpha(t)| = 0$. □

Donnons tout de suite un exemple de barrières.

Exemple 2.9 (de barrières). — Soient $a < b$ et $c < d$ dans \mathbb{R} , soit \mathcal{R} le rectangle $]a, b[\times]c, d[$, soit $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que

$$g(x, y) > f(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$. Considérons le champ de vecteurs w sur $U = \mathcal{R}$ défini par $w(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ et l'équation différentielle associée :

$$(\dagger) \quad y'(t) = g(t, y(t)),$$

où y est une fonction définie sur un sous-intervalle de $]a, b[$ et à valeurs dans $]c, d[$. Soit $p = (t_0, y_0) \in \mathcal{R}$ et soit (J_p, β) la solution maximale de (\dagger) passant par p . Alors β est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur J_p . En effet pour tout $t \in J_p$ on a $(t, \beta(t)) \in \mathcal{R}$ et $\beta'(t) = g(t, \beta(t)) > f(t, \beta(t))$.

Terminons cette section avec la définition des isoclines.

Définition 2.10. — Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'**isocline** I_k du champ de vecteurs $v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ est la courbe formée des points en lesquels la pente de v est égale à k , c.-à-d. :

$$I_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\}.$$

Des portions d'isoclines peuvent fournir des barrières :

Remarque 2.11. — Supposons qu'une portion de l'isocline I_k admette une paramétrisation donnée par $t \mapsto (t, h(t))$, où h est une fonction de classe C^1 sur un intervalle J . Si pour tout $t \in J$ on a $h'(t) < k$ alors h est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur J . En effet, pour tout $t \in J$ on a par hypothèse $(t, h(t)) \in I_k$ et $h'(t) < k = f(t, h(t))$.

3. Étude d'un exemple : $y'(t) = y(t)^2 - t$

Terminologie. — Dans cette section, nous ne considérerons que des barrières fortes et, pour abrégé, nous écrirons simplement « barrière » au lieu de « barrière forte ».

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2 - x$. Elle donne lieu au champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 :

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 - x \end{pmatrix}$$

et à l'équation différentielle :

$$(*) \quad y'(t) = y(t)^2 - t.$$

Les isoclines sont données par $I_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = k\}$, i.e.

$$I_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - k\}$$

est une parabole d'axe Ox et de sommet $(-k, 0)$. Posons

$$I_k^{>0} = \{(x, y) \in I_k \mid y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -k, \quad y = \sqrt{x+k}\},$$

i.e. $I_k^{>0}$ est le graphe de la fonction

$$(\dagger) \quad m_k :]-k, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x+k}.$$

De même, $I_k^{<0}$ est le graphe de $-m_k$. Pour tout $x > -k$ on a

$$(\ddagger) \quad m'_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0.$$

Par conséquent, $I_0^{<0}$ (resp. $I_0^{>0}$) est une barrière inférieure (resp. supérieure) pour (*). Notons \mathcal{P}_0 la partie « intérieure » de cette parabole, i.e.

$$\mathcal{P}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq \sqrt{x}\}$$

et posons $\mathcal{P}_0^* = \mathcal{P}_0 - \{(0, 0)\}$. D'après ce qui précède, \mathcal{P}_0^* est un entonnoir. Montrons que \mathcal{P}_0 en est un aussi.

Notons u_0 la solution maximale passant par $(0, 0)$. Comme $u'_0(0) = 0 = u_0(0)$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)/t = 0$ donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, \delta[, \quad |u(t)| < |t|.$$

Pour tout $t > 0$ tel que $t < \min(\delta, 1)$, on a donc

$$|u(t)| < t < \sqrt{t}$$

i.e. le point $(t, u(t))$ appartient à \mathcal{P}_0^* . Ceci montre que la solution u_0 rentre, pour $t > 0$, dans \mathcal{P}_0^* et donc \mathcal{P}_0 est bien un entonnoir.

Pour tout point $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}_0^*$ et tout $\mu < 0$, la droite de pente μ passant par p a pour équation $y - y_0 = \mu(x - x_0)$, c.-à-d.

$$y = \mu x + y_0 - \mu x_0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\mu x + \sqrt{x}) = -\infty$, cette droite traverse $I_0^{<0}$ pour x assez grand. On en déduit que pour toute solution $u(t)$ contenue dans \mathcal{P}_0 , $u'(t)$, qui est < 0 , ne peut rester inférieur à un réel $\mu < 0$ fixé, car sinon $u(t)$ resterait en dessous d'une droite de pente μ et devrait sortir de \mathcal{P}_0 . Donc, pour tout $\mu < 0$ et tout $A > 0$ il existe $t_\mu > A$ que $0 > u'(t_\mu) > \mu$.

Or, avec la notation (\dagger) plus haut, $m'_\mu(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\mu}}$ et donc pour $\mu < 0$ on a :

$$0 > -m'_\mu(x) > \mu \iff \frac{1}{4(x+\mu)} < \mu^2 \iff x > \frac{1}{4\mu^2} - \mu = A_\mu.$$

Comme $\mu = f(x, -m_\mu(x))$, ceci montre que $-m_\mu$ est une barrière supérieure pour (*) sur l'intervalle $]A_\mu, +\infty[$.

On déduit de ce qui précède que toute courbe intégrale $u(t)$ contenue dans \mathcal{P}_0 rentre, pour tout $\mu < 0$, dans l'entonnoir délimité par $-m_0$ et $-m_\mu$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe T_ε tel que pour tout $t \geq T_\varepsilon$ on ait

$$-\sqrt{t} < u(t) < -\sqrt{t-\varepsilon}.$$

En particulier, $u(t)$ est asymptote à $-\sqrt{t}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque 3.1. — Plus précisément, on peut montrer que dans ce cas l'on a, lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$u(t) = -\sqrt{t} + \frac{1}{4t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ce qui précède règle l'étude quand $t \rightarrow +\infty$ des solutions qui rencontrent la parabole I_0 et qui se retrouvent donc « piégées » dans \mathcal{P}_0 .

Pour étudier les autres courbes intégrales, il est utile de partitionner le plan suivant le signe de la dérivée seconde d'une solution u de (*). Comme $u''(t) = u(t)^2 - t$ on a :

$$u''(t) = 2u(t)u'(t) - 1 = 2u(t)(u(t)^2 - t) - 1.$$

Ceci conduit à introduire la fonction $g(x, y) = 2y(y^2 - x) - 1$ et à étudier la courbe Γ définie par l'équation $g(x, y) = 0$, i.e. $2y(y^2 - x) = 1$. Ceci équivaut à $y \neq 0$ et

$$x = h(y) = y^2 - \frac{1}{2y}.$$

On a $h'(y) = 2y + \frac{1}{2y^2}$ et ceci s'annule pour $\gamma_0 = -4^{-1/3}$. La dérivée est < 0 pour $y < \gamma_0$ et est > 0 sur $]\gamma_0, 0[$ et sur \mathbb{R}_+^* . Lorsque y tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, la courbe $x = h(y)$ est asymptote à la parabole $x = y^2$, et lorsque y tend vers 0^- (resp. 0^+), $h(y)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), voir le fichier de figures ou [ArGau], Chap. 2, Planche II.

Notons Γ_1 (resp. Γ_2) la partie $y > 0$ (resp. $y < 0$) de Γ . Pour tout point (x, y) de Γ , un vecteur directeur de la tangente à Γ est

$$\begin{pmatrix} h'(y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4y^3 + 1}{2y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et pour $y \neq \gamma_0$, ce vecteur est proportionnel à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2y^2}{4y^3 + 1} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, comme $x = y^2 - \frac{1}{2y}$, on a $f(x, y) = y^2 - x = \frac{1}{2y}$. Comme

$$\frac{2y^2}{4y^3 + 1} < \frac{1}{2y}$$

si y et $4y^3 + 1$ sont de même signe, c.-à-d. si $y > 0$ ou si $y < \gamma_0$, on voit que Γ_1 et la partie $y < \gamma_0$ de Γ_2 sont des barrières inférieures pour (*). (Et que la partie $y > \gamma_0$ de Γ_2 est une barrière supérieure.)

Alors le plan est subdivisé en les trois régions suivantes :

- (1) \mathcal{D}_0 , qui contient Γ_2 .
- (2) La région \mathcal{D} , à gauche de I_0 et en-dessous de Γ_1 .
- (3) La région \mathcal{S} , au-dessus de Γ_1 .

Étudions maintenant le comportement quand $t \rightarrow -\infty$ des solutions qui passent par un point $p = (x, y)$ du quart de plan $x < 0$ et $y < 0$. Dans ce quadrant, notons-le Q , les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$y'(t) = y(t)^2$$

i.e. les courbes $y(t) = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}$, sont des barrières inférieures pour (*) puisque $y^2 < y^2 - x$ pour $x < 0$. Donc pour tout point $p = (t_0, u_0)$ du quadrant Q , la solution maximale (J_p, u_p) passant par p vérifie :

$$\forall t \in J \cap] -\infty, t_0[, \quad u_p(t) < \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}$$

et par conséquent J_p ne peut pas contenir $t_p = t_0 + \frac{1}{u_0}$, puisque le terme de droite tend vers $-\infty$ quand $t \rightarrow t_p^+$. Ceci montre que la borne inférieure de J_p est un réel $T_p \in [t_p, t_0]$, i.e. toutes les solutions dans le quadrant Q ont à gauche une asymptote verticale.

Soit maintenant $p = (t_0, u_0)$ un point quelconque de \mathcal{D} et (J_p, u_p) la solution maximale de (*) passant par p . Dans \mathcal{D} , on a $u' > 0$ et $u'' < 0$ donc $t \mapsto u'_p(t)$ est décroissante et $t \mapsto u_p(t)$ croissante, tant que $u_p(t)$ reste dans \mathcal{D} . Or u_p ne peut sortir de \mathcal{D} que de trois façons :

- (a) En rentrant dans \mathcal{P}_0 .
- (b) En rencontrant Γ_1 .
- (c) En rentrant dans l'anti-entonnoir délimité pour $x > 0$ par $I_0^{>0}$ et Γ_1 .

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y > 0$ dans cet anti-entonnoir, il résulte du théorème 2.8 qu'il existe une unique solution de type (3), qu'on notera \hat{u} .

Pour tout $p = (x_0, y_0) \in \Gamma_1$, comme $u'' < 0$ en-dessous de Γ_1 , alors la solution maximale passant par p reste en-dessous, pour $t < x_0$, de la droite passant par p de pente $f(p) = 1/2y_0$. Comme $x_0 = y_0^2 - 1/2y_0$, cette droite a pour équation :

$$y - y_0 = \frac{1}{2y_0} \left(x - y_0^2 + \frac{1}{2y_0} \right)$$

donc coupe la droite $y = 0$ au point $x_1 = -y_0^2 - \frac{1}{2y_0} < 0$. Par conséquent, en allant dans le sens décroissant du temps, u_p arrive dans le quadrant Q ; en d'autres termes toute solution coupant Γ_1 provient de Q .

D'autre part, dans \mathcal{S} on a $u' > 0$ et $u'' > 0$ donc $u'_p(t)$ et $u_p(t)$ tendent vers $+\infty$ lorsque t tend vers la borne supérieure de J_p . On peut montrer que pour tout $p = (x_0, u_0) \in \mathcal{S}$ tel que $x_0 \geq 0$, la solution u_p « explose » en un temps fini, i.e. la borne supérieure de J_p est un réel $b_p > 0$ et $\lim_{t \rightarrow b_p^-} u_p(t) = +\infty$.

Ceci entraîne que pour **tout** $p \in \mathcal{S}$, la borne supérieure b_p de J_p est finie : en effet $u_p(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend b_p , et b_p ne peut pas être $+\infty$ car sinon la courbe $u_p(t)$ devrait couper les courbes intégrales situées dans la partie $x > 0$ de \mathcal{S} , puisque celles-ci ont une asymptote verticale.

De même, dans la région $\mathcal{D}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y^2\}$, on a $u' > 0$ et $u'' < 0$ donc la solution maximale (J_p, u_p) de (*) passant par un point $p = (t_0, y_0)$ de \mathcal{D}' vérifie

$$u'_p(t) > u'_p(t_0)$$

pour tout $t \in J_p$ tel que $t < t_0$ et donc $u_p(t)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers la borne inférieure a_p de J_p . Cette borne inférieure ne peut pas être $-\infty$ car sinon la courbe $u_p(t)$ devrait couper les courbes intégrales situées dans le quadrant Q , puisque celles-ci ont une asymptote verticale.

D'autre part, comme $u' > 0$ dans \mathcal{D}_+ alors la fonction $t \mapsto u_p(t)$ est croissante tant que $u(t)$ reste dans \mathcal{D}_+ . Comme le bord supérieur de \mathcal{D}_+ est le bas de la parabole I_0 on en déduit, en tenant compte du point (c) du théorème 1.18, que $u_p(t)$ doit rentrer dans \mathcal{P}_0 .

On a ainsi obtenu une description qualitative des solutions de (*) :

- (1) Il existe une solution « spéciale » \hat{u} , définie sur $]\hat{a}, +\infty[$ pour un certain réel $\hat{a} < 0$, avec $\lim_{t \rightarrow \hat{a}} \hat{u}(t) = -\infty$, qui est asymptote en $+\infty$ à \sqrt{t} et qui « partage en deux » les autres solutions.

(2) Chaque solution u « au-dessus » de \hat{u} est définie sur un intervalle borné $]a, b[$, strictement croissante, et tend vers $-\infty$ et $+\infty$ en ses bornes. De plus, $a < 0$ et l'on sait que $b > 0$ si u passe dans le demi-plan $x > 0$.

(3) Chaque solution u « en-dessous » de \hat{u} est définie sur un intervalle $]a, +\infty[$, asymptote en $+\infty$ à $-\sqrt{t}$, possède un unique maximum (son point d'intersection avec I_0) et tend vers $-\infty$ quand t tend vers a . On sait de plus que $a < 0$ si u rencontre le demi-plan $x < 0$.

Ceci suscite les questions suivantes.

Questions 3.2. — (1) Que peut-on dire au sujet de \hat{u} ? Peut-on déterminer exactement la position \hat{a} de son asymptote? Sa valeur en 0? La valeur \hat{t}_0 telle que $\hat{u}(\hat{t}_0) = 0$? En donner des valeurs approchées? (Des calculs en Python/Sage montrent que $0,729011 < \hat{u}(0) < 0,729012$, que $\hat{t}_0 \simeq -1$ et que $-3 < \hat{a} < -2$.)

(2) Est-ce que toute solution rencontre le demi-plan $x > 0$? Et le demi-plan $x < 0$?

Remarque 3.3. — ⁽³⁾ On peut répondre à la question (2), par la négative, comme suit. Dans le quart de plan $x < 0 < y$, soit v_p la solution maximale de l'équation différentielle $v'(t) = v(t)^2$ passant par un point $p = (t_0, u_0)$. Cette solution a pour asymptote verticale la droite d'équation

$$x_p = t_0 + \frac{1}{u_0}$$

donc reste dans le demi-plan $x < 0$ si $x_p \leq 0$, i.e. si $t_0 u_0 \leq -1$, i.e. si p est au-dessus de la branche d'hyperbole définie par $xy = -1$ et $x < 0$. Pour un tel point p , soit (J_p, u_p) la solution maximale passant par p . Pour tout $t \in [t_0, 0[$, on a :

$$v'_p(t) = v_p(t)^2 < v_p(t)^2 - t = f(t, v_p(t))$$

donc v_p est une barrière inférieure pour (*) sur l'intervalle $[t_0, 0[$ et donc $u_p(t) > v_p(t)$ pour tout $t \in]t_0, 0[\cap J_p$. Comme v_p tend vers $+\infty$ quand t tend vers x_p , il en résulte que la borne supérieure de J_p est un réel $b_p \leq x_p \leq 0$, et donc u_p n'est pas définie au temps $t = 0$.

De même, fixons $\delta \in]0, 1[$ et considérons la parabole \mathcal{C}_δ d'équation $x = (1 - \delta)y^2$, de sommet $(0, 0)$. Sa partie inférieure est le graphe de la fonction $\alpha : x \mapsto c\sqrt{x}$, où $c = -(1 - \delta)^{-1/2} < 0$. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x, \alpha(x)) = \frac{1}{1 - \delta} x - x = \frac{\delta}{1 - \delta} x > 0 > \frac{c}{\sqrt{x}} = \alpha'(x)$$

donc α est une barrière inférieure pour (*) sur \mathbb{R}_+^* . Soit $p = (t_0, u_0)$ un point en-dessous de \mathcal{C}_δ , i.e. tel que $u_0 < \alpha(t_0)$, et soit (J_p, u_p) la solution maximale de (*) passant par p . Alors, pour tout $t \in]0, t_0[\cap J_p$, $u_p(t)$ est strictement en-dessous de \mathcal{C}_δ et l'on a donc $t < (1 - \delta)u_p(t)^2$, d'où

$$(1) \quad u'_p(t) = u_p(t)^2 - t > \delta u_p(t)^2.$$

⁽³⁾Ce qui suit a été ajouté le 14/3/17.

Soit v_p la solution maximale de l'équation différentielle

$$(2) \quad v'(t) = \delta v(t)^2$$

passant par p . Alors, d'après (1), u_p est une barrière supérieure pour (2), donc d'après la proposition 2.2 on a :

$$(3) \quad \forall t \in]0, t_0[\cap J_p, \quad v_p(t) > u_p(t).$$

Or, en écrivant (2) sous la forme $\delta = \frac{v'(t)}{v(t)^2}$, on obtient facilement que

$$v(t) = \frac{u_0}{1 - \delta u_0(t - t_0)}$$

pour tout $t \geq T_p = \frac{1}{\delta u_0} + t_0$, et v_p tend vers $-\infty$ quand t tend vers T_p , donc la borne inférieure de J_p est un réel $a_p \geq T_p$. Enfin, on a $T_p \geq 0$ si et seulement si $t_0 u_0 \leq -1/\delta$, i.e. si et seulement si $p = (t_0, u_0)$ est en-dessous de l'hyperbole d'équation $xy = -1/\delta$. Par conséquent, si l'on pose

$$\mathcal{D}_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < (1 - \delta)y^2, \quad xy \leq -1/\delta\},$$

alors pour tout $p \in \mathcal{D}_\delta$ la solution maximale u_p de (*) passant par p n'est pas définie au temps $t = 0$.

Remarque 3.4 (Fonction d'Airy Ai). — ⁽⁴⁾ L'équation d'Airy est l'équation différentielle $y''(t) = ty(t)$. On peut montrer qu'elle possède une unique solution qui tend vers 0 en $+\infty$; cette fonction est usuellement appelée la (première) fonction d'Airy et est notée Ai. Nous la noterons A . On peut montrer que $\hat{u} = -A'/A$. Tous les zéros de A et A' sont < 0 ; on les compte de droite à gauche, i.e. le « premier » zéro est celui de plus petite valeur absolue. Alors l'asymptote \hat{a} de \hat{u} est donnée par le premier zéro de A , dont une valeur approchée est :

$$-2.338107410459767038489$$

De même, \hat{t}_0 est le premier zéro de A' , dont une valeur approchée est :

$$-1.018792971647471089017$$

Enfin, on a

$$\hat{u}(0) = \frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \simeq 0.729011132947227$$

⁽⁴⁾Ce qui suit a été ajouté le 20 mars 2017.

BIBLIOGRAPHIE

- [ArGau] Michèle Artigue et Véronique Gautheron, Systèmes différentiels : étude graphique, CEDIC, 1983.
- [HSD] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos (3rd ed.), Elsevier, 2013.
- [HuWe] John Hubbard et Beverly West, Équations différentielles et systèmes dynamiques (trad. V. Gautheron), Cassini, 1999.
- [Sage] Calcul mathématique avec Sage, par Paul Zimmermann et al., disponible en ligne : sagebook.gforge.inria.fr/