UPMC Mathématiques Approfondies pour les Sciences 2016-2017

Partiel du 19 avril 2017

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce partiel est noté sur **30**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 30 seront comptées comme 30.

Exercice 1. (16 pts) On fixe un réel $c > 0$. Pour tout $b \in [0, c[$, on considère l'équation différentielle linéaire sans second membre :

$$(E_b) \qquad x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = 0.$$

Par hypothèse, $b^2 - c^2$ est < 0. On pose $\sigma = \sigma(b) = \sqrt{c^2 - b^2}$ et $P(X) = X^2 + 2bX + c^2$.

1. (1 pt) Exprimer en fonction de b et σ les racines λ et μ de l'équation $P(X) = 0$, en supposant que la partie imaginaire de λ est > 0.

   Correction. Les racines sont $\lambda = -b + i\sigma$ et $\mu = -b - i\sigma$. □

2. (2 pts) Soit $\nu \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction à valeurs complexes $e_\nu : t \mapsto e^{\nu t}$ est solution de (E_b) si et seulement si ν est racine de P.

   Correction. Si $x(t) = e^{\nu t}$ alors $x'(t) = \nu x(t)$ et $x''(t) = \nu^2 x(t)$, donc

   $$x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = (\nu^2 + 2b\nu + c^2)x(t)$$

   et ceci est nul si et seulement si $P(\nu) = 0$. □

3. (2 pts) Montrer que les fonctions u et v, définies par $u(t) = e^{-bt}\cos(\sigma t)$ et $v(t) = e^{-bt}\sin(\sigma t)$ sont solutions de (E_b).

   Correction. D'après ce qui précède, la fonction $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t} = e^{-bt}\big(\cos(\sigma t) + i\sin(\sigma t)\big)$ est solution de (E_b), de même que la fonction e_μ. Par conséquent, $u = (e_\lambda + e_\mu)/2$ et $v = (e_\lambda + e_\mu)/2i$ sont également solutions. □

   On rappelle que pour toute solution w de (E_b) à valeurs réelles, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que $w = \alpha u + \beta v$. (On ne demande pas de démontrer ceci.) On considère maintenant l'équation différentielle avec second membre :

   $$(S_b) \qquad x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = \cos(ct).$$

4. (4 pts) On suppose $b \neq 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution $f = f_b$ de (S_b) de la forme $t \mapsto A\sin(ct)$, pour une constante $A = A_b$ à préciser. Déterminer l'unique solution x_b de (S_b) telle que $x_b(0) = 0$ et $x_b'(0) = 1$.

   Correction. Cherchons une solution de (S_b) sous la forme $f(t) = A\sin(ct)$. Alors $f'(t) = Ac\cos(ct)$ et $f''(t) = -Ac^2\sin(ct)$, donc

   $$f''(t) + 2bf'(t) + c^2f(t) = 2Abc\cos(ct)$$

   et ceci égale $\cos(ct)$ si et seulement si $A = 1/2bc$. Alors, pour toute solution x de (S_b), $x - f$ est solution de l'équation sans second membre (E_b), et réciproquement. Donc pour toute solution x de (S_b) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que

   $$x(t) = \alpha e^{-bt}\cos(\sigma t) + \beta e^{-bt}\sin(\sigma t) + \frac{1}{2bc}\sin(ct)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La condition $x(0) = 0$ donne $\alpha = 0$; alors

$$x'(t) = \beta e^{-bt}\big(-b\sin(\sigma t) + \sigma\cos(\sigma t)\big) + \frac{1}{2b}\cos(ct)$$

donc la condition $x'(0) = 1$ donne $\beta\sigma = 1 - \dfrac{1}{2b}$ i.e. $\beta = \dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{2b\sigma}$. La solution cherchée est donc donnée par

$$(*) \qquad x_b(t) = \frac{1}{2bc}\sin(ct) - \frac{e^{-bt}}{2b\sigma}\sin(\sigma t) + \frac{e^{-bt}}{\sigma}\sin(\sigma t).$$

□

5. (3 pts) On suppose $b = 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution g_0 de (S_0) de la forme $t \mapsto Bt\sin(ct)$, pour une constante B à préciser. Déterminer l'unique solution x_0 de (S_0) telle que $x_0(0) = 0$ et $x_0'(0) = 1$.

   Correction. Cherchons une solution de (S_0) sous la forme $g(t) = Bt\sin(ct)$. Alors

$$g'(t) = B\big(\sin(ct) + ct\cos(ct)\big) \qquad \text{et} \qquad g''(t) = B\big(2c\cos(ct) - c^2 t\sin(ct)\big)$$

   donc, puisque $b = 0$, on a

$$g''(t) + c^2 g(t) = 2Bc\cos(ct)$$

   et ceci égale $\cos(ct)$ si et seulement si $B = 1/2c$. Comme $b = 0$, on a $\sigma = c$ et $e^{-bt} = 1$ pour tout t ; on obtient comme précédemment que pour toute solution x de (S_0) il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$x(t) = \alpha\cos(ct) + \beta\sin(ct) + \frac{t}{2c}\sin(ct)$$

   pour tout $t \in \mathbb{R}$. La condition $x(0) = 0$ donne $\alpha = 0$; alors

$$x'(t) = \beta c\cos(ct) + \frac{1}{2c}\sin(ct) + \frac{t}{2}\cos(ct)$$

   donc la condition $x'(0) = 1$ donne $\beta c = 1$ i.e. $\beta = 1/c$. La solution cherchée est donc donnée par

$$(**) \qquad x_0(t) = \frac{t}{2c}\sin(ct) + \frac{1}{c}\sin(ct).$$

□

6. (1 pt) Soit $b \neq 0$ et soient x_b et x_0 les solutions obtenues dans les deux questions précédentes. Montrer qu'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(\star) \qquad x_b(t) - x_0(t) = \frac{k}{b}\Big(\frac{1-bt}{c}\sin(ct) - e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma}\Big) + \frac{e^{-bt}}{\sigma}\sin(\sigma t) - \frac{1}{c}\sin(ct)$$

   pour un réel k que l'on précisera. [1]

   Correction. D'après les formules $(*)$ et $(**)$ qui précèdent, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x_b(t) - x_0(t) = \frac{1}{2b}\Big(\frac{1-bt}{c}\sin(ct) - e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma}\Big) + \frac{e^{-bt}}{\sigma}\sin(\sigma t) - \frac{1}{c}\sin(ct)$$

   ce qui est la formule demandée, avec $k = 1/2$. □

1. La formule ci-dessus rectifie une erreur de l'énoncé original, où manquait le dernier terme.

On rappelle que lorsque h tend vers 0, on a $\sqrt{1-h} = 1 - \dfrac{h}{2} + O(h^2) = 1 + O(h)$, et de même $(1-h)^{-1/2} = 1 + O(h)$. Comme $\sigma = c\left(1 - \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{1/2}$ alors, lorsque b tend vers 0 on a : $\sigma = c + O(b^2)$ et $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{c} + O(b^2)$.

Fixons désormais un réel t et posons $h = \sigma t - ct$. Alors $\sigma t = ct + h$ et l'on a

$$\sin(\sigma t) = \sin(ct)\cos(h) + \cos(ct)\sin(h)$$

avec $h = O(b^2)$ lorsque $b \to 0$.

7. (3 pts) En utilisant le développement limité en 0 de cos et sin à l'ordre 1, et de exp à l'ordre 2, montrer que $\sin(\sigma t) = \sin(ct) + O(b^2)$ puis que

$$e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} = (1-bt)\frac{\sin(ct)}{c} + O(b^2).$$

Montrer alors (t étant fixé) que $\lim_{b\to 0}\big(x_b(t) - x_0(t)\big) = 0$.

Correction. On a $\cos(h) = 1 + o(h) = 1 + o(b^2)$ et $\sin(h) = h + o(h) = O(b^2)$, d'où $\sin(\sigma t) = \sin(ct) + O(b^2)$. On a aussi

$$e^{-bt} = 1 - bt + \frac{b^2t^2}{2} + o(b^2) = 1 - bt + O(b^2).$$

On a vu plus haut que $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{c} + O(b^2)$; on obtient donc que

$$e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} = \big(1 - bt + O(b^2)\big)\Big(\frac{1}{c} + O(b^2)\Big)\big(\sin(ct) + O(b^2)\big) = (1-bt)\frac{\sin(ct)}{c} + O(b^2).$$

Lorsque b tend vers 0, $\sigma = \sigma(b)$ tend c et $\dfrac{e^{-bt}}{\sigma}\sin(\sigma t)$ tend vers $\dfrac{1}{c}\sin(ct)$ donc le 2ème terme du membre de droite de $(\star)$ tend vers 0. D'après ce qui précède, le 1er terme est de la forme

$$\frac{1}{2b}O(b^2) = O(b)$$

donc tend également vers 0. On obtient donc (t étant fixé) que $\lim_{b\to 0}\big(x_b(t) - x_0(t)\big) = 0$. $\square$

Exercice 2. (21 pts) On rappelle que la fonction th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ est de classe C^1, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et vérifie $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \mathrm{th}(y) - \dfrac{1}{x}$. On considère l'équation différentielle :

$$(*) \qquad y'(t) = \mathrm{th}(y(t)) - \frac{1}{t}.$$

avec la condition initiale $y(1) = b$, où b est un réel.

1. (2 pts) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Sont-elles continues sur U ?

Correction. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{th}'(y) = 1 - \mathrm{th}(y)^2$. Ces deux fonctions sont continues sur U. $\square$

2. (2 pts) Citer un théorème du cours qui assure qu'il existe une unique solution maximale (J_b, y_b) vérifiant $y_b(1) = b$, où J_b est un intervalle ouvert contenant 1.

   Correction. Comme f est de classe C^1 sur U, l'existence et l'unicité d'une solution maximale (J_b, y_b) telle que $y_b(1) = b$ résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. $\square$

3. (4 pts) Soient B, S les fonctions $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $B(t) = b-2(t-1)$ et $S(t) = b+t-1$. Montrer que B (resp. S) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité supérieure de J_b est $+\infty$.

   Correction. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $|\mathrm{th}(y)| < 1$ donc pour tout $t \geq 1$ on a

   $$B'(t) = -2 < f\big(t, B(t)\big) \qquad \text{resp.} \qquad f\big(t, S(t)\big) < 1 = S'(t)$$

   donc B (resp. S) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte sur $[1, +\infty[$ pour $(*)$. Comme $B(1) = y_b(1) = S(1)$, alors pour $t \geq 1$ la solution y_b reste dans l'entonnoir défini par B et S. Donc, d'après le théorème de l'entonnoir, J_b contient $[1, +\infty[$. $\square$

4. (4 pts) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\beta(t) = b - t + 1 - \log(t)$ et $\gamma(t) = b + t - 1 - \log(t)$. Montrer que β (resp. γ) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que $\gamma(t) < y_b(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in J_b$ tel que $t < 1$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité inférieure de J_b est 0 et que $\lim_{t\to 0^+} y_b(t) = +\infty$. (On pourra utiliser le théorème de l'entonnoir pour les temps décroissants.)

   Correction. Comme $|\mathrm{th}(y)| < 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors β (resp. γ) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\beta(1) = y_b(1) = \gamma(1)$, on a donc

   $$\gamma(t) < y_b(t) < \beta(t)$$

   pour tout $t \in J_b$ tel que $t < 1$. D'après le théorème de l'entonnoir pour les temps décroissants$^{(\star)}$, on en déduit que J_b contient $]0, 1]$. Comme γ a pour limite $+\infty$ quand $t \to 0^+$, il en est de même pour y_b et donc l'extrémité inférieure de J_b est 0. Par conséquent, pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a $J_b =]0, +\infty[$.

   $(\star)$ De façon détaillée, considérons une équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, avec f de classe C^1, soit (J, y) la solution maximale telle que $y(t_0) = u_0$ et soit β (resp. γ) une barrière inférieure (resp. supérieure) forte sur un intervalle $I =]a, t_0]$. On suppose que $\beta(t_0) = y(t_0) = \gamma(t_0)$ et $\beta(t) > \gamma(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$. Posons $\widetilde{I} = \{s \in \mathbb{R}_+ \mid t_0 - s \in I\}$, considérons la fonction $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto y(t_0 - s)$ et définissons de même $\widetilde{\beta}$ et $\widetilde{\gamma}$. Alors $\widetilde{y}$ est solution de l'équation différentielle

   $$z'(s) = -f\big(t_0 - s, z(s)\big) \tag{$\dagger$}$$

   et $\widetilde{\beta}$ (resp. $\widetilde{\gamma}$) est une barrière supérieure (resp. inférieure) forte pour $(\dagger)$ sur $\widetilde{I}$. D'après le théorème de l'entonnoir, $\widetilde{y}$ est définie sur $\widetilde{I}$ et reste dans l'entonnoir défini par $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\beta}$. Par conséquent, y est définie sur I et pour tout $t \in I$ on a $\gamma(t) < y(t) < \beta(t)$. $\square$

On note $\mathrm{arcth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de th. On rappelle que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $\mathrm{arcth}'(x) = 1/(1 - x^2)$.

5. (3 pts) Soit $\mathcal{C}_0$ l'isocline de pente 0, i.e. $\mathcal{C}_0 = \{(t, y) \in U \mid f(t, y) = 0\}$. Déterminer $\mathcal{C}_0$ et montrer que c'est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur $]1, +\infty[$. Montrer également que la fonction nulle est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction. Pour $(t,y) \in U$, on a $\mathrm{th}(y) = 1/t$ si et seulement si $t > 1$ et $y = \mathrm{arcth}(1/t)$. Posons $I =]1, +\infty[$ et $g(t) = \mathrm{arcth}(1/t)$ pour tout $t \in I$. Alors, pour tout $t \in I$, on a

$$g'(t) = \frac{1}{1-(1/t)^2}\frac{-1}{t^2} = \frac{-1}{t^2-1} < 0 = f\big(t, g(t)\big)$$

donc g est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur I. Et comme $\mathrm{th}(0) = 0$, on a $f(t,0) = -1/t < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc la fonction nulle est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. □

6. (2 pts) On pose $A = \{(x,y) \in U \mid x > 1,\ 0 \leq y \leq \mathrm{arcth}(1/t)\}$. Montrer qu'il existe un unique $\overline{b} \in \mathbb{R}$ tel que $(t, y_{\overline{b}}(t)) \in A$ pour tout $t > 1$.

   Correction. D'après la question précédente, A est un anti-entonnoir pour $(*)$. Et, comme $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{arcth}(1/t) = 0$, cet entonnoir est resserré en $+\infty$. De plus, pour tout $(x,y) \in A$, on a :

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \mathrm{th}(y)^2 > 0.$$

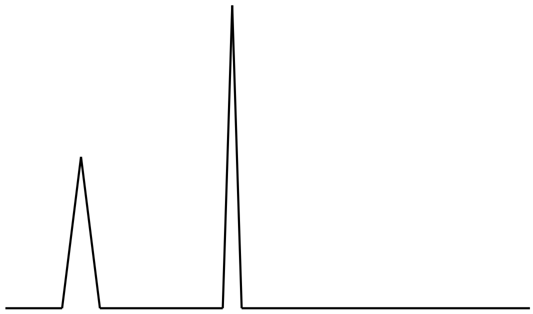
   Donc, d'après le théorème de l'anti-entonnoir, il existe un unique $\overline{b} \in \mathbb{R}$ tel que la solution $\overline{y} = y_{\overline{b}}$ soit dans A pour tout $t > 1$. □

7. (4 pts) Montrer que si $b > \overline{b}$, il existe $T > 1$ tel que $y_b(t) > \mathrm{arcth}(1/t)$ et $y_b'(t) > 0$ pour tout $t > T$. En déduire que y_b tend en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, puis montrer que $L = +\infty$. (Raisonner par l'absurde en supposant L finie pour obtenir une contradiction.)

   Correction. Soit $b > \overline{b}$. Par l'unicité de la solution dans l'anti-entonnoir A, il existe $T > 1$ tel que le point $p(T) = (T, y_b(T))$ soit hors de A. Comme y_b ne peut pas croiser $y_{\overline{b}}$, alors $p(T)$ est strictement au-dessus de la barrière inférieure $\mathcal{C}_0$.
   Alors pour tout $t > T$ on a $y_b'(t) > 0$ et $y_b(t) > y_b(T) > 0$; par conséquent y_b est strictement croissante sur $[T, +\infty[$ et tend donc en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Supposons L finie. Alors $f(t, y_b(t))$ tend vers $a = \mathrm{th}(L) > 0$ quand $t \to +\infty$ donc il existe $T_1 \geq T$ tel que $y_b'(t) > a/2$ pour $t > T_1$, et donc $y_b(t) > y_b(T_1) + (a/2)(t - T_1)$ pour $t > T_1$. Comme le membre de droite tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, ceci contredit l'hypothèse $L < +\infty$. On a donc $L = +\infty$.

   Remarque. On montre de même que si $b < \overline{b}$ alors $\lim_{t\to+\infty} y_b(t) = -\infty$. En effet, avec les notations précédentes, $p(T)$ est en-dessous de la droite $y = 0$ et pour tout $t > T$ on a $y_b'(t) < 0$ et $y_b(t) < y_b(T) < 0$. Il en résulte que y_b est strictement décroissante sur $[T, +\infty[$ et tend en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$. Supposons L finie. Alors $f(t, y_b(t))$ tend vers $a = \mathrm{th}(L) < 0$ quand $t \to +\infty$ donc il existe $T_1 \geq T$ tel que $y_b'(t) < a/2$ pour $t > T_1$, et donc $y_b(t) < y_b(T_1) + (a/2)(t - T_1)$ pour $t > T_1$. Comme le membre de droite tend vers $-\infty$ quand $t \to +\infty$, ceci contredit l'hypothèse $L > -\infty$. On a donc $L = -\infty$.

   Remarque. Lors du corrigé en TD s'est posée la question suivante. Soit f une fonction dérivable strictement croissante, qui tend en $+\infty$ vers une limite finie L ; est-il vrai que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$? La réponse est non. En effet, posons $I = [1, +\infty[$ et considérons la fonction continue $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, affine par morceaux, dont le graphe est donné par des « pointes »qui joignent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le point $(2^n, 2^n)$ aux points $(2^n - 4^{-n}, 0)$ et $(2^n + 4^{-n}, 0)$, g valant 0 ailleurs, cf. la figure suivante :



L'aire de chaque triangle vaut $1/2^n$ donc si on pose $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ alors G est croissante et $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \sum_{n\geq 1}(1/2^n) = 1$. Par contre, pour tout $x \in I$ on a $G'(x) = g(x)$ et ceci vaut 2^n lorsque $x = 2^n$. Ceci est presque le contre-exemple voulu, sauf que G n'est pas strictement croissante. Considérons alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = G(x) + 1 - (1/x)$. Pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = g(x) + (1/x^2) > 0$ donc f est strictement croissante. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ mais $f'(2^n) = 2^n - 2^{-n}$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. $\square$