

TD3. Applications différentiables

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1 (Cours). Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , f une application $U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- 1) Rappeler la définition de : « f est différentiable en a ».
- 2) Montrer que si f est différentiable en a , alors f est continue en a .
- 3) On suppose f différentiable en a et l'on note $Df(a)$ sa différentielle en a . Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, exprimez $Df(a)(h)$ en fonction des h_i et $(\partial f / \partial x_i)(a)$ pour $i = 1, \dots, n$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminez son domaine de définition, ses dérivées partielles, et si f est différentiable.

$$f_1 : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x+y+1) ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sin(x-y)} .$$

Exercice 3 (Cours). 1) Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que f est différentiable en a et que g l'est en $f(a)$. Rappelez la formule donnant la différentielle $D(g \circ f)(a)$ de $g \circ f$ en a .

- 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - a) On suppose f différentiable en a . Montrer alors que f est dérivable en a et exprimer sa différentielle $Df(a)$ en fonction de $f'(a)$.
 - b) Réciproquement, on suppose f dérivable en a . Montrer alors que f est différentiable en a et exprimer sa différentielle $Df(a)$ en fonction de $f'(a)$.
- 3) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$. Pour tout $x \in U$, on pose $g(x) = 1/f(x)$.
 - a) Montrer que U est un ouvert de \mathbb{R}^n .
 - b) Pour tout $a \in U$, montrer que g est différentiable en a , de différentielle $Dg(a) = \frac{-1}{f(a)^2} Df(a)$.

Exercice 4. On considère les applications $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(0, 0) = 0 = g(0, 0)$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} ; \quad g(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} .$$

- 1) Montrer que f et g sont différentiables sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Indication : on pourra soit calculer les dérivées partielles de f et g , soit utiliser l'exercice 3 et le fait que les applications somme et produit, de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} , sont différentiables.
- 2) (*) On pose $a = (0, 0)$. Montrer que $(\partial f / \partial x)(a)$ et $(\partial f / \partial y)(a)$ existent. Si f était différentiable, que serait $Df(a)$? Montrer que f n'est pas différentiable en a . Montrer que f est continue en a . Est-ce que $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ le sont? Montrer que f admet en a des dérivées partielles selon tout vecteur v . Qu'en conclut-on?
- 3) Montrer que g est différentiable en $a = (0, 0)$.

Exercice 5 (Cours). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et soient f_1, \dots, f_p les composantes de f . Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

existe dans \mathbb{R}^p . Dans ce cas, elle est notée $f'(a)$ et l'on dit que c'est le vecteur dérivé de f en a .

- 1) Montrer que f est dérivable en a si et seulement si chaque f_i l'est.
- 2) Montrer que f dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a et exprimer alors la différentielle $Df(a)$ en fonction de $f'(a)$.
- 3) Soit $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application différentiable. On suppose f dérivable en a . Montrer alors que $g \circ f$ est dérivable en a et déterminer le vecteur dérivé $(g \circ f)'(a)$. Indication : on pourra utiliser la question précédente et l'exercice 3.

Exercice 6. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Pour chacune des fonctions f suivantes, exprimez $\partial_x f$ et $\partial_y f$ en fonction des dérivées partielles de h :

$$f_1(x, y) = h(x - y, x + y), \quad f_2(x, y) = h(x^2 + y^2, xy).$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Exprimez $\partial g / \partial r$ et $\partial g / \partial \theta$ en fonction des dérivées partielles de f .

Exercice 8. Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3, -2x_1 - x_1 x_2 x_3, 2x_1 x_3 + x_2^2)$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (e^{y_1 + y_2 + y_3}, \cos(y_1))$. Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$, écrire la matrice jacobienne en x de $h = g \circ f$.

Exercice 9. Soit $P(x, y)$ un polynôme homogène de degré n en deux variables x, y , c.-à-d. $P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$ pour certains réels a_n, \dots, a_0 .

- 1) Montrer que $x \partial_x P(x, y) + y \partial_y P(x, y) = n P(x, y)$.
- 2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$.

Plus généralement, soit $s \in \mathbb{R}^*$. On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est *homogène de degré s* si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $f(tx, ty) = t^s f(x, y)$.

- 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogène de degré $s \neq 0$ et de classe C^1 .
 - a) Montrer que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont homogènes de degré $s - 1$.
 - b) (*) Montrer que f vérifie l'équation d'Euler en degré s , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \partial_x f(x, y) + y \partial_y f(x, y) = s f(x, y).$$

- 2) (**) Réciproquement, on suppose que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie l'équation d'Euler ci-dessus. Montrer alors que f est homogène de degré s . Indication : pour (x, y) fixé, considérer l'application $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(tx, ty)/t^s$.

Exercice 10 (Segments et parties convexes (*)). Soient $x \neq y$ dans \mathbb{R}^n . Le vecteur joignant x à y est $y - x$ et l'on définit le **segment** $[x, y]$ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^n$ qui sont entre x et y sur la droite (xy) , c.-à-d. :

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}.$$

On dit qu'une partie C de \mathbb{R}^n est **convexe** si pour tout $x \neq y$ dans C , le segment $[x, y]$ est contenu dans C .

- 1) Montrer que $[x, y]$ est égal à $[y, x] = \{y + s(x - y) \mid s \in [0, 1]\} = \{(1 - s)y + sx \mid s \in [0, 1]\}$.
- 2) Quelles sont les parties convexes de \mathbb{R} ?
- 3) Soit N une norme sur \mathbb{R}^n . Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que les boules $B_N(a, R)$ et $\overline{B}_N(a, R)$ sont convexes.