Sorbonne Université
Séries de fonctions et intégrales à paramètre (2M261)
Janvier–Mai 2019.

Examen final – 21 Mai 2019

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'examen est noté sur 50. Le total des points fait 60 et les notes $\geqslant 50$ seront considérées comme 50.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie de l'examen.

Exercice 1. (10 pts) Pour chaque $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et chaque $x > 1$ on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1 + n\log(x))}$. Montrer que $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout $x \in]1, +\infty[$ et que la fonction ainsi obtenue $F :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

Correction. Attention, $\log(1) = 0$ donc $1/\log(x)$ est « grand » pour x proche de 1 ; on ne peut pas faire comme si le facteur $1/\log(x)$ n'existait pas !

Mais pour x fixé, les termes $f_n(x)$ sont > 0 et l'on a $f_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2\log(x)}$ quand $n \to +\infty$ donc, comme la série $\sum_{n>0} 1/n^2$ converge, alors la série $\sum_{n>0} f_n(x)$ converge également. Donc F est définie sur $]1, +\infty[$. Montrons qu'elle est dérivable.

Pour tout $n > 0$, on a $f_n'(x) = -\dfrac{n/x}{n(1 + n\log(x))^2} = \dfrac{-1}{x(1 + n\log(x))^2}$ qui est continue sur $]1, +\infty[$.

Fixons $a > 1$; alors pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a : $x \geqslant a$ et $1 + n\log(x) \geqslant 1 + n\log(a)$, d'où

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{a}\frac{1}{(1 + n\log(a))^2} \leqslant \frac{1}{a\log(a)^2}\frac{1}{n^2}$$

et donc la série de fonctions $\sum_{n>0} f_n'(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Par conséquent, d'après un théorème du cours, F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Comme $a > 1$ est arbitraire, il en résulte que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ □

Exercice 2. (10 pts) Répondre aux questions suivantes.

1. (4 pts) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer le rayon de convergence ρ de $F(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, puis exprimer la fonction F comme une fonction rationnelle (=quotient de polynômes) sur $]-\rho, +\rho[$.

Correction. On peut appliquer le test de Cauchy : on a $1 \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{3}$ et $\sqrt[n]{3} \to 1$, donc le rayon de convergence est 1. On peut aussi dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$2\sum_{n\geqslant 0} x^n \leqslant \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \leqslant 3\sum_{n\geqslant 0} x^n$$

et comme $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge pour $x \in [0,1[$ et diverge pour $x \geqslant 1$, le rayon de convergence est 1. Puis, on note que

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\sum_{n\geqslant 0} x^{2n} + 3x\sum_{n\geqslant 0} x^{2n} \\ &= 2\frac{1}{1-x^2} + \frac{3x}{1-x^2} \\ &= \frac{2+3x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

□

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1+x^2)y''(x) + y(x) = 0. \tag{E}$$

(a) (3pts) En *admettant* que (E) possède comme solution une série entière $\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho > 0$, déduire une relation de récurrence entre les coefficients a_n.

Correction. On suppose que φ est une telle solution. Alors, si $\rho > 0$ est le rayon de convergence, on sait que sur $]-\rho,+\rho[$ on aura pour $x \in\,]-\rho,+\rho[$ que

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \sum_{n\geqslant 2} a_n n(n-1)x^{n-2} \\ &= \sum_{m\geqslant 0} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m \\ x^2\varphi''(x) &= \sum_{n\geqslant 2} a_n n(n-1)x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} a_n n(n-1)x^n. \end{aligned}$$

Donc, si φ est solution de (E), chaque coefficient de la série entière

$$(1+x^2)\varphi''(x) + \varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + a_n] \cdot x^n$$

est nul. Il s'ensuit que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + a_n = 0,$$

i.e.

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{n^2-n+1}{(n+2)(n+1)}a_n.}$$

□

(b) (3 pts) Soit φ comme dans la question précédente. On suppose de plus que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$. Déterminer ρ.

Correction. On note que les termes pairs sont nuls parce que $a_0 = 0$. Puis, $a_1 = 1$ et il résulte de la formule précédente que chaque a_n avec n impair est non nul, et que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{impair}}} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi = x + x \sum_{k \geqslant 1} a_{2k+1} x^{2k}$$

et si $x \neq 0$ alors

$$\left| \frac{a_{2k+1} x^{2k+1}}{a_{2k-1} x^{2k-1}} \right| \longrightarrow |x|^2;$$

donc la série converge si $|x|^2 < 1$ et diverge sinon. Par conséquent, $\rho = 1$. $\square$

Exercice 3. (14 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction de période 2π définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0, & \text{si } \pi \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

1. (6 pts) Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, déterminer le n-ième coefficient de Fourier exponentiel $c_n(f)$.

   Correction. On a $2\pi c_n(f) = \int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt = \int_0^{\pi} te^{-int}\,dt$, la 2ème égalité résultant du fait que f est nulle sur $[\pi, 2\pi]$. Pour $n \neq 0$, calculons cette intégrale en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} te^{-int}\,dt &= \left[t\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-int}}{-in}\,dt \\ &= \frac{\pi i(-1)^n}{n} - \left[\frac{e^{-int}}{-n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi i(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

   Donc,

$$\boxed{c_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2} + i\frac{(-1)^n}{2n}.}$$

   Puis on a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

   $\square$

2. (8 pts) En utilisant la question précédente et l'égalité $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déterminer explicitement la valeur de la série

$$\sigma = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^4}.$$

   Correction. On applique l'égalité de Parseval $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = |c_0|^2 + \sum_{n>0} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$. On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

   L'égalité de Parseval donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \frac{\pi^2}{16} + 2 \sum_{n \geqslant 1} \frac{[(-1)^n - 1]^2}{4\pi^2 n^4} + \frac{1}{4n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{[(-1)^n - 1]^2}{2\pi^2 n^4} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{\pi^2}\sigma + \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Donc $\sigma = \dfrac{\pi^4}{2}\Big(\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{16}\Big) = \dfrac{\pi^4}{2\times 48} = \dfrac{\pi^4}{96}$. □

Exercice 4. (14 pts) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t+\cos^2(t))}\, dt$.

1. (2 pts) Montrer que l'intégrale $F(x)$ converge pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   Correction. Pour $t \to +\infty$, on a $t^x(1+t+\cos^2(t)) \sim t^{x+1}$ et les deux termes sont de même signe > 0. Comme $1+x > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+x}}$ converge (et vaut $[-t^{-x}/x]_1^{+\infty} = 1/x$). Il s'ensuit que l'intégrale $F(x)$ converge pour tout $x > 0$.

   □

2. (12 pts) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de $F'(x)$ comme intégrale dépendant d'un paramètre.

   Correction. Soit $f(t,x) = \dfrac{1}{t^x(1+t+\cos^2(t))}$. Comme $1/t^x = t^{-x} = e^{-x\log(t)}$, on a $\partial_x f(t,x) = -\dfrac{\log(t)}{t^x(1+t+\cos^2(t))}$. Fixons $a > 0$ et montrons que les intégrales

$$G(x) = \int_1^{\infty} \frac{\log(t)}{t^x(1+t+\cos^2(t))}\, dt$$

   convergent normalement pour $x \in [a,+\infty[$. Pour $t \geqslant 1$ et $x \geqslant a$ on a :

$$\left|\frac{\log(t)}{t^x(1+t+\cos^2(t))}\right| = \frac{\log(t)}{t^x(1+t+\cos^2(t))} \leqslant \frac{\log(t)}{t^{1+x}} \leqslant \frac{\log(t)}{t^{1+a}}.$$

   De plus, comme $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\log(t)}{t^{a/2}} = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\log(t) \leqslant C\, t^{a/2}$ pour tout $t \geqslant 1$. Pour $t \geqslant 1$ et $x \geqslant a$ on a donc :

$$\left|\frac{\log(t)}{t^x(1+t+\cos^2(t))}\right| \leqslant \frac{C}{t^{1+a/2}}$$

   et comme $1+a/2 > 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+a/2}}$ converge. Ceci prouve que les intégrales $G(x)$ convergent normalement pour $x \geqslant a$. D'après un théorème du cours, F est donc de classe C^1 sur $[a,+\infty[$. Comme $a > 0$ est arbitraire, il en résulte que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. □

Exercice 5. (12 pts) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}_\alpha$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $C \geqslant 0$ tel que $|\psi(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}$ pour tout t. Dans la suite, $\mathcal{L}$ désigne la transformée de Laplace.

1. (2 pts) Soit $f \in \mathcal{E}_\alpha$ telle que f est dérivable et $f' \in \mathcal{E}_\alpha$. Montrer que pour $s \in]\alpha,+\infty[$ on a $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

   Correction. Voir le cours. En appliquant la même formule à f' au lieu de f, on obtient :

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s\big(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)\big) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).$$

   □

2. (10 pts) En utilisant la transformée de Laplace, trouver une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y' - 20y = 0 \tag{E}$$

telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$. (À toutes fins utiles : $\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \dfrac{1}{s-k}$, $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ et $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$.)

Correction. On note F la transformée de Laplace de f. Alors

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - s - 2$$

et

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - 1.$$

Comme la transformation de Laplace est linéaire, on obtient $s^2F(s) - s - 2 + sF(s) - 1 - 20F(s) = 0$, d'où

$$\boxed{F(s) = \frac{s+3}{s^2+s-20}.}$$

En faisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$\boxed{F(s) = \frac{7/9}{s-4} + \frac{2/9}{s+5}}.$$

Ceci est la transformée de Laplace de la fonction

$$g(t) = \frac{7}{9}e^{4t} + \frac{2}{9}e^{-5t}$$

et comme la transformée de Laplace est injective, il s'ensuit que $f(t) = g(t)$ est la solution cherchée. $\square$