

# CHAPITRE 4

## BIRAPPORT

<sup>(1)</sup> Dans tout ce chapitre,  $k$  désigne un corps.

### 18. Birapport pour l'Agrégation

Le birapport étant la seule partie de géométrie projective à figurer explicitement dans le programme de l'Agrégation, nous en donnons ici une présentation rapide (et calculatoire), que le lecteur pourra comparer avec celle de la section suivante.

#### 18.1. Homographies, repères projectifs et birapport. —

**Notation 18.1.** — L'espace projectif  $\mathbb{P}^1(k)$  est l'ensemble des coordonnées homogènes  $[x, y]$ , où  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $[x, y] = [\lambda x, \lambda y]$  pour tout  $\lambda \in k^\times$ . En particulier, si  $y \neq 0$ , on a  $[x, y] = [x/y, 1]$ .

On identifie tout élément  $x$  de  $k$  avec le point  $[x, 1]$  de  $\mathbb{P}^1(k)$ . D'autre part, on note  $\infty$  l'unique point de  $\mathbb{P}^1(k)$  pour lequel  $y = 0$ , i.e.  $\infty = [1, 0]$  ( $= [t, 0]$  pour tout  $t \in k^\times$ ). On obtient ainsi : <sup>(2)</sup>

$$(\dagger) \quad \mathbb{P}^1(k) = k \sqcup \{\infty\} = \{[x, 1] \mid x \in k\} \sqcup \{[1, 0]\}.$$

**Définition 18.2 (Homographies).** — L'action linéaire de  $\mathrm{GL}_2(k)$  sur  $k^2$  :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

induit une action de  $\mathrm{GL}_2(k)$  sur  $\mathbb{P}(k^2) = \mathbb{P}^1(k)$ , donnée par

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [x, y] = [ax + by, cx + dy].$$

Avec l'identification  $(\dagger)$ , on obtient que  $\mathrm{GL}_2(k)$  agit sur  $k \sqcup \{\infty\}$  par homographies :

(i) Pour tout  $x \in k$ , on a :

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d} \in k \sqcup \{\infty\}$$

le terme de droite étant  $\infty$  si et seulement si  $cx + d = 0$ .

<sup>(1)</sup>Version du 18 oct. 2016.

<sup>(2)</sup>Le symbole  $\sqcup$  désigne une réunion *disjointe*.

(ii) On a :

$$(2') \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \frac{a}{c}.$$

Si  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni de sa valeur absolue,  $\frac{a}{c}$  est la limite du rapport  $\frac{ax+b}{cx+d}$  lorsque  $|x|$  tend vers  $+\infty$ . Pour un corps quelconque  $k$ , (2') s'obtient en revenant à (1) appliqué à  $\infty = [1, 0]$ .

**Définition 18.3 (Repères de  $\mathbb{P}^1(k)$ ).** — Soit  $V$  un  $k$ -ev de dimension 2. Un *repère projectif* de  $\mathbb{P}(V)$  est un triplet  $(p_0, p_1, p_2)$  de points deux à deux distincts. <sup>(3)</sup> On notera  $\text{RP}(V)$  l'ensemble de ces repères.

Lorsque  $V = k^2$ , on dira que le triplet  $(\infty, 0, 1)$ , donné par les trois points  $[1, 0]$ ,  $[0, 1]$  et  $[1, 1]$  est le repère « standard » de  $\mathbb{P}^1(k)$ .

La proposition suivante est un cas particulier du théorème 12.9.

**Proposition 18.4.** — (i)  $\text{GL}_2(k)$  agit transitivement sur  $\text{RP}(k^2)$  et le stabilisateur de chaque repère est le sous-groupe  $H$  des homothéties.

(ii) Par conséquent,  $\text{PGL}_2(k) = \text{GL}_2(k)/H$  agit de façon libre et transitive sur  $\text{RP}(k^2)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(e_1, e_2)$  la base standard de  $V = k^2$  et soit  $\mathcal{R} = ([v_1], [v_2], [v_3])$  un repère projectif de  $\mathbb{P}(V)$ . Alors  $v_1, v_2, v_3$  sont deux à deux linéairement indépendants, donc  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  est une base de  $V$  et  $v_3$  s'écrit dans cette base  $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$  avec  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ . Alors l'élément  $g$  de  $\text{GL}(V)$  défini par  $g(e_i) = \lambda_i v_i$  pour  $i = 1, 2$  envoie  $\infty = [e_1]$  sur  $v_1$ ,  $0 = [e_2]$  sur  $[v_2]$  et  $1 = [e_1 + e_2]$  sur  $[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2] = [v_3]$ . Ceci prouve que l'action est transitive.

Le stabilisateur de  $\mathcal{R}$  est formé des  $g \in \text{GL}(V)$  qui préservent les droites  $kv_1$ ,  $kv_2$  et  $kv_3$ . Les deux premières conditions entraînent que la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  est diagonale :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  et alors on voit que  $g(v_3) = \alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_2 v_2$  est colinéaire à  $v_3$  ssi  $\beta = \alpha$ , i.e. ssi  $g$  est une homothétie. Ceci prouve (i), et (ii) en découle.  $\square$

**Définition 18.5 (Birapport).** — Soient  $p_i = [x_i, y_i]$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) trois points distincts de  $\mathbb{P}^1(k)$  et  $p_4 = [x_4, y_4]$  un quatrième point. Le birapport du quadruplet  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , noté  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ , est le point suivant de  $\mathbb{P}^1(k)$  :

$$(\star) \quad [p_1, p_2, p_3, p_4] = \left[ \frac{x_4 y_2 - x_2 y_4}{x_3 y_2 - x_2 y_3}, \frac{x_4 y_1 - x_1 y_4}{x_3 y_1 - x_1 y_3} \right].$$

Il est bien défini car :

- (1) Comme  $p_3$  est distinct de  $p_1$  et  $p_2$ , les deux dénominateurs sont non nuls.
- (2) La 1ère (resp. 2ème) coordonnée est nulle ssi  $p_4 = p_2$  (resp.  $p_4 = p_1$ ) donc, comme  $p_1 \neq p_2$ , elles ne sont pas toutes les deux nulles.
- (3) Si on remplace chaque  $(x_i, y_i)$  par  $\lambda_i(x_i, y_i)$ , alors chaque coordonnée homogène du birapport est multipliée par  $\lambda_4 \lambda_3^{-1}$ , donc le birapport est inchangé.

<sup>(3)</sup>Voir 12.3 pour la définition lorsque  $\dim(V) = n + 1$ .

Si  $p_i \in k$  et si l'on écrit  $p_i = [x_i, 1]$ , l'expression devient :

$$(\star\star) \quad [p_1, p_2, p_3, p_4] = \left[ \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2}, \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} \right].$$

Dans les deux cas, on a la donnée de deux rapports, ce qui explique le nom de *birapport*.

Remarquons tout de suite que  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  est égal à 0 (resp.  $\infty$ ) ssi  $x_4y_2 - x_2y_4 = 0$  (resp.  $x_1y_4 - x_4y_1 = 0$ ), i.e. ssi  $p_4 = p_2$  (resp.  $p_4 = p_1$ ).

**Remarque 18.6.** — Si  $(p_0, p_1, p_2) = (\infty, 0, 1)$ , i.e. si  $[x_1, y_1] = [1, 0]$ ,  $[x_2, y_2] = [0, 1]$  et  $[x_3, y_3] = [1, 1]$ , alors pour tout  $p_4 = [x_4, y_4]$  on a :

$$[\infty, 0, 1, p_4] = \left[ \frac{x_4}{1}, \frac{-y_4}{-1} \right] = p_4.$$

**Rappel 18.7.** — On rappelle que  $\mathrm{GL}_2(k)$  est engendré par les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } \alpha \in k, \mu \in k^\times,$$

qui correspondent respectivement aux homographies  $x \mapsto 1/x$ ,  $x \mapsto x + \alpha$ , et  $x \mapsto \mu x$ . En effet, en conjuguant  $U(\alpha)$  resp.  $H(\mu)$  par  $S$  on obtient aussi les matrices  $U'(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$  et  $H'(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  et l'on sait que toute matrice  $A \in \mathrm{GL}_2(k)$  peut être ramenée à la matrice identité  $I_2$  par des opérations élémentaires, i.e. multiplication par une matrice d'un des types précédents.

**Lemme 18.8.** — *Le birapport est invariant par l'action de  $\mathrm{GL}_2(k)$ , i.e. on a :*

$$[g(p_1), g(p_2), g(p_3), g(p_4)] = [p_1, p_2, p_3, p_4]$$

pour tout  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathrm{RP}(k^2) \times \mathbb{P}^1(k)$  et  $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ .

*Démonstration.* — D'après la définition  $(\star)$  du birapport, ceci se vérifie directement pour l'une des matrices  $S, U(\alpha)$  ou  $H(\mu)$ , d'où le résultat d'après le rappel précédent. <sup>(4)</sup>  $\square$

**Théorème 18.9.** — *Deux éléments  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  et  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  de  $\mathrm{RP}(k^2) \times \mathbb{P}^1(k)$  sont conjugués (de façon unique) par l'action de  $\mathrm{PGL}_2(k)$  ssi  $[p_1, \dots, p_4] = [q_1, \dots, q_4]$ .*

*Démonstration.* — S'il existe  $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$  tel que  $q_i = g(p_i)$  pour  $i = 1, \dots, 4$  alors  $[q_1, \dots, q_4] = [p_1, \dots, p_4]$  d'après le lemme précédent.

Réciproquement, supposons  $[q_1, \dots, q_4] = [p_1, \dots, p_4]$ . D'après la proposition 18.4, il existe  $g, h \in \mathrm{PGL}_2(k)$  (uniques) envoyant respectivement  $(p_1, p_2, p_3)$  et  $(q_1, q_2, q_3)$  sur  $(\infty, 0, 1)$ . On a donc  $h^{-1}g(p_i) = q_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  (et  $h^{-1}g$  est l'unique homographie ayant cette propriété).

D'autre part, d'après 18.6 et 18.8, on a :

$$g(p_4) = [\infty, 0, 1, g(p_4)] = [p_1, \dots, p_4] = [q_1, \dots, q_4] = [\infty, 0, 1, h(q_4)] = h(q_4),$$

d'où aussi  $h^{-1}g(p_4) = q_4$ .  $\square$

<sup>(4)</sup>Voir plus loin (19.2) pour une autre démonstration.

**Rappel 18.10.** — On note  $V_4$  le sous-groupe de  $S_4$  formé de l'identité et des trois produits de deux transpositions de supports disjoints, i.e. les éléments (13)(24), (14)(23) et (12)(34). C'est un sous-groupe distingué de  $S_4$  et son intersection avec le sous-groupe

$$S_3 = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}$$

égale  $\{\text{id}\}$ . Par conséquent, l'application de multiplication  $V_4 \times S_3 \rightarrow S_4$ ,  $(v, \sigma) \mapsto v\sigma$  est injective, et comme  $|V_4 \times S_3| = 24 = |S_4|$ , cette application est bijective. Donc  $S_4$  est le produit semi-direct de  $V_4$  par  $S_3$ .

Par conséquent, on obtient un isomorphisme  $S_4/V_4 \xrightarrow{\sim} S_3$  et l'on notera  $\pi : S_4 \rightarrow S_3$  la composée de la projection  $S_4 \rightarrow S_4/V_4$  et de cet isomorphisme.

**Notation 18.11.** — On note  $Q^\times$  l'ensemble des quadruplets de points de  $\mathbb{P}^1(k)$  deux à deux distincts et  $X(k^2) = \text{RP}(k^2) \times \mathbb{P}^1(k)$ . Alors,  $S_4$  (resp.  $S_3$ ) agit à gauche, par permutations des places, sur  $Q^\times$  (resp. sur  $\text{RP}(k^2)$  donc aussi sur  $X(k^2)$ ), voir 1.4 et 1.3. Notant  $[\cdot]$  l'application birapport :  $X(k^2) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  (ou sa restriction à  $Q^\times$ ), on peut donc considérer les applications  $[\cdot] \circ \sigma : Q^\times \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  (resp.  $[\cdot] \circ \tau : X(k^2) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ ), pour tout  $\sigma \in S_4$  (resp.  $\tau \in S_3$ ).

**Remarque 18.12.** — Soient  $\omega = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q^\times$  et  $\alpha = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ . En écrivant :

$$\alpha = \left[ (x_4 y_2 - x_2 y_4)(x_3 y_1 - x_1 y_3), (x_4 y_1 - x_1 y_4)(x_3 y_2 - x_2 y_3) \right]$$

on voit que  $\alpha$  est inchangé si l'on applique à  $\omega$  les permutations (13)(24), (14)(23) ou (12)(34). Par conséquent, pour tout  $v \in V_4$  les applications  $[\cdot]$  et  $[\cdot] \circ v$  coïncident sur  $Q^\times$ .

**Corollaire 18.13.** — Soient  $p_1, \dots, p_4$  quatre points distincts de  $\mathbb{P}^1(k)$ . Il existe une unique homographie  $h$  qui échange  $p_1$  et  $p_2$  d'une part et  $p_3$  et  $p_4$  d'autre part. De plus,  $h$  est une involution, i.e.  $h \circ h = \text{id}$ .

*Démonstration.* — D'après la remarque précédente, on a  $[p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_1, p_2, p_3, p_4]$  donc, d'après le théorème 18.9, il existe une unique homographie  $h$  envoyant  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  sur  $(p_2, p_1, p_4, p_3)$ . Alors  $h^2 = h \circ h$  fixe chaque  $p_i$  donc, d'après 18.4,  $h^2 = \text{id}$ .  $\square$

Donnons une autre démonstration de 18.12.

**Proposition 18.14.** — Soient  $V$  un  $k$ -ev de dimension 2 et  $\{A, D\}$  et  $\{B, E\}$  deux paires disjointes de points de  $\mathbb{P}(V)$ , avec  $A \neq D$ .

(i) Il existe une unique homographie  $h$  qui échange  $A$  et  $D$  d'une part, et  $B$  et  $E$  d'autre part.

(ii)  $h$  est une involution.

*Démonstration.* — Comme  $A, D, B$  sont deux à deux distincts, ils forment un repère projectif. Il existe donc une base  $(e_1, e_2)$  de  $V$  telle que  $[e_1] = A$ ,  $[e_2] = D$  et  $[e_1 + e_2] = B$ . Comme  $E$  est distinct de  $A$  et  $B$ , alors  $E = [ae_1 + be_2]$  pour certains  $a, b \in k^\times$ .

On cherche une matrice  $g \in \text{GL}_2(k)$  qui échange  $A$  et  $D$  d'une part, et  $B$  et  $E$  d'autre part. La première condition signifie que  $g$  envoie  $e_1$  sur  $\lambda e_2$  et  $e_2$  sur  $\mu e_1$ , pour certains  $\lambda, \mu \in k^\times$ , i.e. que  $g$  est de la forme  $g = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ .

Remarquons déjà que  $g^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$  est une homothétie, donc l'homographie  $h = \bar{g}$  est une involution (car  $\bar{g}^2 = \overline{g^2} = \text{id}_{\mathbb{P}(V)}$ ). Ceci prouve (ii).

D'autre part, on veut que  $g(e_1 + e_2) = \mu e_1 + \lambda e_2$  soit colinéaire à  $ae_1 + be_2$ , ce qui équivaut à  $b\mu = a\lambda$ . Posant  $\nu = \lambda/b = \mu/a$ , on a donc  $\lambda = b\nu$  et  $\mu = a\nu$ , d'où :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & a\nu \\ b\nu & 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que  $h = \bar{g}$  est l'unique homographie échangeant  $A$  et  $D$  et envoyant  $B$  sur  $E$ . Comme  $h^2 = \text{id}$ , on a donc aussi  $h(E) = B$ , d'où (i). La proposition est démontrée.  $\square$

**Théorème 18.15.** — (i) L'action à gauche de  $S_3$  sur  $\text{RP}(k^2)$  induit un morphisme de groupes  $\phi : S_3 \rightarrow \text{PGL}_2(k)$  tel que, pour tout  $x = (p_1, p_2, p_3) \in \text{RP}(k^2)$ ,  $p_4 \in \mathbb{P}^1(k)$  et  $\sigma \in S_3$ , on ait :

$$\phi(\sigma)([p_1, p_2, p_3, p_4]) = [\sigma \cdot x, p_4] = [p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_4].$$

(ii)  $\phi$  est un isomorphisme de  $S_3$  sur le sous-groupe  $\mathcal{G}$  de  $\text{PGL}_2(k)$  formé de  $\text{id}$  et des homographies suivantes :

$$\begin{aligned} \phi((12))(t) &= \frac{1}{t}, & \phi((23))(t) &= 1 - t, & \phi((13))(t) &= \frac{t}{t-1}, \\ \phi(c)(t) &= \frac{1}{1-t}, & \phi(c^{-1})(t) &= 1 - \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

où  $c = (123) = (12)(23)$ .

(iii) De plus, pour tout  $\omega = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q^\times$  et  $\sigma \in S_4$ , on a :

$$\phi(\pi(\sigma))([p_1, p_2, p_3, p_4]) = [\sigma \cdot \omega] = [p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_{\sigma^{-1}(4)}].$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que pour tout  $x = (p_1, p_2, p_3) \in \text{RP}(k^2)$ ,  $p_4 \in \mathbb{P}^1(k)$  et  $\sigma \in S_3$ ,  $[\sigma \cdot x, p_4]$  ne dépend que du birapport  $t = [x, p_4]$ .

En effet, supposons que  $[x, p_4] = [y, q_4]$ , avec  $y = (q_1, q_2, q_3) \in \text{RP}(k^2)$  et  $q_4 \in \mathbb{P}^1(k)$ . Alors il existe  $h \in \text{PGL}_2(k)$  tel que  $q_i = h(p_i)$  pour tout  $i$  et l'on a :

$$[\sigma \cdot y, q_4] = [h(p_{\sigma^{-1}(1)}), h(p_{\sigma^{-1}(2)}), h(p_{\sigma^{-1}(3)}), h(p_4)] = [p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_4] = [\sigma \cdot x, p_4].$$

Donc il existe une application  $R_\sigma : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  vérifiant  $R_\sigma \circ [\cdot] = [\cdot] \circ \sigma$ , et  $R_\sigma$  est unique car tout élément  $t$  de  $\mathbb{P}^1(k)$  est un birapport, puisque  $t = [\infty, 0, 1, t]$ .

Pour tout  $\sigma, \tau \in S_3$ , on a alors :

$$R_\sigma \circ R_\tau \circ [\cdot] = R_\sigma \circ [\cdot] \circ \tau = [\cdot] \circ \sigma \circ \tau = [\cdot] \circ (\sigma\tau) = R_{\sigma\tau} \circ [\cdot]$$

d'où, par unicité,  $R_{\sigma\tau} = R_\sigma \circ R_\tau$ .

Il est clair que  $R_{\text{id}} = \text{id}$ . En utilisant que  $t = [\infty, 0, 1, t]$  et la formule  $(\star)$  on obtient que

$$R_{(12)}(t) = R_{(12)}([\infty, 0, 1, t]) = [0, \infty, 1, t] = \left[ \frac{t \cdot 0 - 1}{t \cdot 0 - 1}, \frac{t - 0}{1 - 0} \right] = [1, t] = \frac{1}{t}$$

$$R_{(23)}(t) = R_{(23)}([\infty, 0, 1, t]) = [\infty, 1, 0, t] = \left[ \frac{t \cdot 1 - 1}{0 - 1}, \frac{0 - 1}{0 - 1} \right] = [1 - t, 1] = 1 - t.$$

Ce sont des homographies, i.e. des éléments de  $\text{PGL}_2(k)$ , et comme (12) et (23) engendrent  $S_3$  ceci, combiné avec  $R_{\sigma\tau} = R_\sigma \circ R_\tau$ , entraîne que  $\phi : \sigma \mapsto R_\sigma$  est un morphisme de groupes de  $S_3$  vers  $\text{PGL}_2(k)$ . De plus,  $\phi$  est injectif car sinon  $\text{Ker}(\phi)$  contiendrait le sous-groupe distingué  $A_3 = \{\text{id}, c, c^2\}$  et l'on aurait  $R_{(12)} = R_{(23)}$ , ce qui n'est pas le cas.

Enfin, comme  $c = (12)(23)$ ,  $c^{-1} = (23)(12)$  et  $(13) = (12)(23)(12)$  on obtient :

$$R_c(t) = \frac{1}{1-t}, \quad R_{c^{-1}}(t) = 1 - \frac{1}{t}, \quad R_{(13)}(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Ceci prouve (i) et (ii).

Enfin, tout  $\sigma \in S_4$  s'écrit de façon unique  $\sigma = v\pi(\sigma)$  avec  $v \in V_4$ . Alors, pour tout  $\omega \in Q^\times$  on a, d'après (i) et 18.12 ou 18.14 :

$$[\sigma \cdot \omega] = [v\pi(\sigma) \cdot \omega] = [\pi(\sigma) \cdot \omega] = R_{\pi(\sigma)}([\omega]).$$

Ceci prouve (iii). □

**Remarque 18.16.** — Comme  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$  n'a que trois éléments :  $0, 1, \infty$ , il découle de la démonstration précédente que  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ .

**18.2. Divisions harmoniques ou équi-harmoniques.** — Commençons par la proposition suivante.

**Proposition 18.17.** — Soient  $V$  un  $k$ -ev de dimension 2,  $p = [v_1]$  un point de  $\mathbb{P}(V)$  et  $G_p$  son stabilisateur dans  $\text{PGL}(V)$ . Alors  $G_p$  agit sur la droite affine  $\mathcal{D} = \mathbb{P}(V) - \{p\}$  par automorphismes affines, et tout élément de  $\text{GA}(\mathcal{D})$  est ainsi obtenu.

*Démonstration.* — Complétons  $v_1$  en une base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  de  $V$  et identifions  $\text{GL}(V)$  à  $\text{GL}_2(k)$  au moyen de cette base. Alors le stabilisateur de  $[v_1]$  dans  $\text{GL}(V)$  est le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures, qui est isomorphe au produit direct du groupe  $H$  des homothéties par le groupe

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in k^\times, b \in k \right\}.$$

Il en résulte que la projection  $\pi : \text{GL}(V) \rightarrow \text{PGL}(V)$  induit un isomorphisme  $\phi$  de  $G_1$  sur  $G_p$ . D'autre part, notant  $(v_1^*, v_2^*)$  la base duale de  $\mathcal{B}$ , l'ouvert affine  $U = \mathbb{P}(V) - \{p\}$  s'identifie à la droite affine

$$\mathcal{D} = \{v \in V \mid v_2^*(v) = 1\} = v_2 + \{xv_1 \mid x \in k\}$$

et pour tout  $g = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dans  $G_1$  et tout  $v = v_2 + xv_1$ , on a :

$$\phi(g) \cdot [v] = [g(v)] = [v_2 + bv_1 + \alpha xv_1] = [v_2 + (\alpha x + b)v_1].$$

Ceci montre que  $G_p$  agit sur  $\mathcal{D} \cong k$  par les automorphismes affines  $x \mapsto \alpha x + b$ , et tout élément de  $\text{GA}(\mathcal{D})$  est ainsi obtenu. □

Fixons maintenant  $x = (p_1, \dots, p_4) \in Q^\times$  et notons  $O(x) = \{[\sigma \cdot x] \mid \sigma \in S_4\}$  l'ensemble des valeurs prises sur  $x$  par les « birapports permutés »  $[\cdot] \circ \sigma$ . On déduit du théorème 18.15 le lemme suivant :

**Lemme 18.18.** —  $O(x)$  est l'orbite de  $t = [p_1, p_2, p_3, p_4]$  sous l'action de  $\mathcal{G}$  et de  $S_4$  définie en 18.15 (iii), et le stabilisateur  $\Gamma_x$  de  $x$  dans  $S_4$  est l'image inverse dans  $S_4$  du stabilisateur  $\mathcal{G}_t$ , i.e. on a  $\Gamma_x/V_4 \simeq \mathcal{G}_t$ .

**Terminologie 18.19.** — On dira que la configuration de points  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q^\times$  (resp. la valeur du birapport  $t = [p_1, p_2, p_3, p_4] \in k - \{0, 1\}$ ) est « particulière » si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

a) Il existe  $\sigma \in S_3 - \{\text{id}\}$  tel que  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_4]$ . D'après le théorème 18.9, ceci équivaut à dire qu'il existe une homographie  $h \in \text{PGL}_2(k)$  (nécessairement unique) qui fixe  $p_4$  et envoie  $p_i$  sur  $p_{\sigma^{-1}(i)}$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

b) Le stabilisateur  $\mathcal{G}_t$  de  $t$  dans  $\mathcal{G}$  contient  $R_\sigma$ , donc est un sous-groupe non trivial de  $\mathcal{G}$ .

Identifions  $\mathcal{G}$  à  $S_3$ ; alors ses sous-groupes non triviaux sont les trois sous-groupes  $\{\text{id}, \tau\}$ , où  $\tau$  est une transposition, le groupe alterné  $A_3 = \{\text{id}, c, c^{-1}\}$  formé des 3-cycles (en notant par exemple  $c$  le 3-cycle (123)), et  $\mathcal{G}$  tout entier. (On va voir que le cas  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}$  ne peut pas se produire, sauf si  $\text{car}(k) = 3$  et  $t = -1$ .)

On décrit plus bas les différents cas, en supposant pour simplifier que  $\text{car}(k) > 3$ . (On laisse aux lecteurs intéressés la discussion des cas particuliers en caractéristique 2 ou 3.)

**Divison harmonique et variantes 18.20.** — Avec les notations du théorème 18.15, supposons que  $\mathcal{G}_t = \{\text{id}, R_\tau\}$  pour une transposition  $\tau$ . Dans ce cas, selon que  $\tau$  égale (12), (23) ou (13), on obtient que  $t$  vérifie  $t^2 = 1$ , resp.  $2t = 1$ , resp.  $t(t-1) = t$ , et comme  $t \neq 0, 1$  ceci entraîne que  $t$  vaut  $-1$ , resp.  $1/2$ , resp.  $2$ . D'autre part, notons  $h$  l'unique homographie qui fixe  $p_4$  et envoie  $p_i$  sur  $p_{\tau^{-1}(i)}$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Attention, cette homographie  $h$  dépend de  $\tau$  et de  $p_1, p_2, p_3, p_4$  donc en général n'est pas égale à l'homographie  $R_\tau$  (cf. ci-dessous).

Dans tous les cas, prenant le point fixe  $p_4$  comme point à l'infini, la restriction de  $h$  à la droite affine  $\mathcal{D} = \mathbb{P}^1(k) - \{p_4\}$  est une involution affine qui fixe un point  $p_i$  et échange les deux autres  $p_j$  et  $p_\ell$ , donc c'est la symétrie de centre le milieu  $O$  de  $[p_j, p_\ell]$ , d'où  $p_i = O$ . Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, la symétrie centrale précédente définit une homographie qui fixe  $p_4$  et  $p_i$  et échange  $p_j$  et  $p_\ell$ .

En résumé, ceci se produit ssi en plaçant l'un des points à l'infini, alors l'un des trois points restants est le milieu des deux autres dans la droite affine  $\mathbb{P}^1(k) - \{p_\infty\}$ . Plus précisément :

a) Si  $\tau = (12)$  alors le birapport vaut  $-1$ . Dans ce cas, on dit que les points  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  sont en **division harmonique**. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire qu'il existe une homographie  $h$  qui fixe  $p_3$  et  $p_4$  et échange  $p_1, p_2$ .<sup>(5)</sup> Voici deux exemples :

a1)  $(-1, 1, 0, \infty)$  est une division harmonique, car le 4ème point est à l'infini et dans la droite affine  $k$ , le point 0 est le milieu (isobarycentre) des points 1 et  $-1$  (ici on utilise que  $\text{car}(k) \neq 2$ ). L'homographie qui fixe 0 et  $\infty$  et échange 1 et  $-1$  est  $x \mapsto -x$ , c.-à-d.  $[x : y] \mapsto [-x : y]$ . (Ce n'est pas l'homographie  $R_{(12)}$ , qui envoie  $[x : y]$  sur  $[y : x]$ .)

a2)  $(\infty, 0, 1, -1)$  est une division harmonique, car son birapport vaut  $-1$ . Dans ce cas, l'homographie  $R_{(12)} : t \mapsto 1/t$  fixe  $p_3$  et  $p_4$  et échange  $p_1 = \infty$  et  $p_2 = 0$ . Bien sûr, elle ne préserve pas l'ouvert affine  $k = \{[x : 1] \mid x \in k\}$  (puisqu'elle envoie le point  $0 \in k$  sur le point  $\infty$ ) mais c'est un exercice intéressant d'écrire l'ouvert affine  $U = \mathbb{P}^1(k) - \{-1\}$  et d'écrire la transformation affine de  $U$  induite par  $R_{(12)}$ .

b) Si  $\tau = (23)$  alors le birapport vaut  $1/2$ . Une configuration  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  vérifie cette condition ssi il existe une homographie qui fixe  $p_1$  et  $p_4$  et échange  $p_2, p_3$ . Ceci équivaut aussi à dire que  $(p_3, p_2, p_1, p_4)$  est une division harmonique. Des exemples de telles configurations sont  $(1/2, 1, 0, \infty)$  ou  $(\infty, 0, 1, 1/2)$ .

<sup>(5)</sup>Il y a de nombreuses autres caractérisations géométriques des divisions harmoniques, voir les TD.

c) Si  $\tau = (13)$  alors le birapport vaut 2. Une configuration  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  vérifie cette condition ssi il existe une homographie qui fixe  $p_2$  et  $p_4$  et échange  $p_1, p_3$ . Ceci équivaut aussi à dire que  $(p_1, p_3, p_2, p_4)$  est une division harmonique. Des exemples de telles configurations sont  $(2, 1, 0, \infty)$  ou  $(\infty, 0, 1, 2)$ .

**Remarque 18.21.** — Dans la littérature, l'accent est mis uniquement sur les « divisions harmoniques », i.e. le cas où le birapport vaut  $-1$ . Mais les trois cas ci-dessus sont des « variantes » de la configuration de division harmonique, puisqu'ils s'en déduisent en permutant la numérotation des points. D'autre part, d'après le théorème 18.15, on voit que l'orbite sous le groupe  $\mathcal{G}$  du birapport  $t = -1$  est formé des trois éléments  $-1, 2, 1/2$  (qui sont deux à deux distincts, sauf si  $\text{car}(k) = 3$ ).

**Divison équi-anharmonique 18.22.** — D'autre part,  $\mathcal{G}_t$  égale le sous-groupe distingué  $\{\text{id}, R_c, R_c^2\}$  ssi  $t$  vérifie  $t^2 - t + 1 = 0$ . En utilisant l'hypothèse  $\text{car}(k) \neq 3$  et la factorisation ci-dessous, on voit que ceci équivaut à dire que  $t$  est une racine primitive 6-ième de l'unité :  
(6)

$$X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)$$

(i.e.  $t = \exp(\pm i\pi/3)$  si  $k = \mathbb{C}$ ). Ceci équivaut aussi à dire qu'il existe une homographie  $h$  qui fixe  $p_4$  et qui permute cycliquement les points  $p_1, p_2, p_3$ , disons qui envoie  $p_1$  sur  $p_2$ ,  $p_2$  sur  $p_3$  et  $p_3$  sur  $p_1$ . Dans ce cas, on dit que les points forment une division **équi-anharmonique**.<sup>(7)</sup>

Prenons par exemple  $k = \mathbb{C}$ .<sup>(8)</sup> Posons  $\xi = \exp(i\pi/3)$  et remarquons que  $\bar{\xi} = \xi^{-1} = 1 - \xi$ . Alors :

(i) Le quadruplet  $(\infty, 0, 1, \xi)$  (et de même  $(\infty, 0, 1, \bar{\xi})$ ) est en division équi-anharmonique, puisque son birapport est  $\xi$  (resp.  $\bar{\xi}$ ). Dans ce cas, le birapport est inchangé par permutation cyclique des trois premiers points, donc on a aussi  $\xi = [0, 1, \infty, \xi]$  et donc le quadruplet  $(0, 1, \infty, \xi)$  est aussi en division équi-anharmonique (et idem pour  $\bar{\xi}$ ).

(ii) D'après la remarque 18.12, les permutations du sous-groupe  $V_4$  de  $S_4$  ne changent pas le birapport, donc  $\xi = [1, 0, \xi, \infty]$  et, en échangeant les deux premiers points, on obtient, d'après le théorème 18.15,

$$[0, 1, \xi, \infty] = \xi^{-1}$$

donc le quadruplet  $(0, 1, \xi, \infty)$  est en division équi-anharmonique (et idem pour  $\bar{\xi}$ ).

(iii) Ceci se voit « géométriquement » de la façon suivante. Montrons qu'il existe une application affine  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , donc de la forme  $z \mapsto az + b$ , telle que  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = \xi$  et  $f(\xi) = 0$ . Les deux premières conditions donnent  $b = 1$  et  $a = \xi - 1 = \xi^2$  et alors on a bien  $f(\xi) = \xi^3 + 1 = 0$ .

Si l'on identifie  $\mathbb{C}$  au plan euclidien alors les points  $0, 1, \xi$  forment un triangle équilatéral et, notant  $I$  son isobarycentre,  $f$  est la rotation de centre  $I$  et d'angle  $2\pi/3$ . Ceci se vérifie par un calcul direct : d'une part,  $\xi = (1 + i\sqrt{3})/2$  donc  $I$  a pour affixe  $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}$ . D'autre part, la rotation de centre  $c \in \mathbb{C}$  et d'angle  $2\pi/3$  est donnée par  $z - c \mapsto \xi^2(z - c)$

<sup>(6)</sup>On utilise que  $\text{car}(k) \neq 3$  pour dire que les polynômes  $X^2 \pm X + 1$  sont irréductibles; si  $\text{car}(k) = 3$  ils sont égaux respectivement à  $(X \mp 1)^2$ .

<sup>(7)</sup>L'auteur aurait envie de dire simplement « équiharmonique », mais « équi-anharmonique », bien que difficile à prononcer, est la terminologie standard.

<sup>(8)</sup>Dans le cas général, il faut supposer que le corps  $k$  contient une racine primitive 6-ème de l'unité, donc on ne peut pas prendre  $k = \mathbb{R}$ . Mais on pourrait prendre le corps  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - X + 1)$ .



i.e.  $z \mapsto \xi^2 z + (1 - \xi^2)c$ , et l'on vérifie que  $z_0 = (1 - \xi^2)^{-1}$  donc  $f$  est bien la rotation de centre  $I$  et d'angle  $2\pi/3$ . La discussion est analogue en remplaçant  $\xi$  par  $\bar{\xi}$ .

### 19. $(n + 1)$ -rapport de $n + 3$ points dans $\mathbb{P}(V)$ , où $\dim(V) = n + 1$

Soit  $V$  un  $k$ -ev de dimension  $n + 1$ . Notons  $\text{RP}(V)$  l'ensemble des repères projectifs de  $\mathbb{P}(V)$  (cf. 12.3) et posons  $X = \text{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$ . Pour chaque  $x = (\mathcal{R}, q) \in X$ , notant  $h$  l'unique homographie  $\mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  telle que  $h(\mathcal{R}_0) = \mathcal{R}$ , on pose  $\phi(x) = h^{-1}(q)$ . Ceci définit une application  $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ .

**Théorème 19.1** (« du  $(n + 1)$ -rapport »). — <sup>(9)</sup> Soient  $X = \text{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$  et  $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  comme ci-dessus.

(i)  $\phi$  est constante sur chaque orbite de  $G$  dans  $X$  et induit une application  $\bar{\phi} : X/G \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ .

(ii) L'application  $\bar{\phi}$  est **bijective**.

(iii) Pour tout  $x = (q_0, \dots, q_{n+2}) \in X$ , écrivons  $q_i = [v_i]$  pour  $i = 0, \dots, n + 2$ . Alors, pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $V$ , les coordonnées homogènes  $\xi_i$  de  $\phi(x) \in \mathbb{P}^n(k)$  sont données par :

$$(\star) \quad \forall i = 0, \dots, n \quad \xi_i = \frac{\overset{i\text{-ème place}}{\downarrow} \det_{\mathcal{B}}(v_0, \dots, v_{n+2}, \dots, v_n)}{\underset{i\text{-ème place}}{\uparrow} \det_{\mathcal{B}}(v_0, \dots, v_{n+1}, \dots, v_n)}.$$

Cette application  $\phi : \text{RP}(V) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  est appelée le «  $(n + 1)$ -rapport », et le **birapport** lorsque  $n = 1$ .

*Démonstration.* — (i) Soient  $x = (\mathcal{R}, q) \in X$  et  $g \in G$ , posons  $x' = gx = (\mathcal{R}', q')$ , où  $\mathcal{R}' = g(\mathcal{R})$  et  $q' = g(q)$ . Soit  $h$  l'unique homographie de  $\mathbb{P}^n(k)$  sur  $\mathbb{P}(V)$  telle que  $h(\mathcal{R}_0) = \mathcal{R}$ ; par définition on a  $\phi(x) = h^{-1}(q)$ . D'autre part, l'homographie  $gh$  envoie  $\mathcal{R}_0$  sur  $g(\mathcal{R}_0) = \mathcal{R}'$ , donc par définition aussi, on a  $\phi(x') = (gh)^{-1}(q') = h^{-1}g^{-1}(g(q)) = h^{-1}(q)$ , d'où  $\phi(x') = \phi(x)$ . Ceci montre que  $\phi$  est constante sur les  $G$ -orbites. Elle induit donc une application  $\bar{\phi} : X/G \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ ,  $Gx \mapsto \phi(x)$ .

(ii) Remarquons que pour tout  $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$ , l'ensemble

$$\theta(\alpha) = \left\{ (h(\mathcal{R}_0), h(\alpha)) \mid h \in \text{Homog}(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)) \right\}$$

est une orbite sous  $G$ . En effet, pour toute homographie  $h : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  fixée, on a :  $\text{Homog}(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)) = \{gh \mid g \in G\}$  et donc  $\theta(\alpha)$  est la  $G$ -orbite du point  $(h(\mathcal{R}_0), h(\alpha))$  de  $X$ . De plus, par définition de  $\phi$ , on a  $\phi(h(\mathcal{R}_0), h(\alpha)) = h^{-1}h(\alpha) = \alpha$ , d'où  $\bar{\phi}(\theta(\alpha)) = \alpha$ . Donc  $\theta$  est une application  $\mathbb{P}^n(k) \rightarrow X/G$  telle que  $(\bar{\phi} \circ \theta)(\alpha) = \alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$ .

D'autre part, soient  $(\mathcal{R}, q) \in X$ ,  $\mathcal{O}$  sa  $G$ -orbite,  $h$  l'unique homographie  $\mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  telle que  $h(\mathcal{R}_0) = \mathcal{R}$ , et  $\alpha = h^{-1}(q)$ . Par définition, on a  $\bar{\phi}(\mathcal{O}) = \phi(\mathcal{R}, q) = \alpha$  et donc  $(\mathcal{R}, q) = (h(\mathcal{R}_0), h(\alpha))$  appartient à  $\theta(\alpha)$ , d'où  $\mathcal{O} = \theta(\bar{\phi}(\mathcal{O}))$ . Ceci montre que  $\theta$  et  $\bar{\phi}$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre, ce qui prouve (ii).

<sup>(9)</sup>Cette terminologie est due à l'auteur, donc n'est peut-être pas standard.

(iii) Choisissons arbitrairement des vecteurs  $v_0, \dots, v_{n+2}$  tels que  $[v_i] = q_i$  pour tout  $i$ . Alors  $\mathcal{C} = (v_0, \dots, v_n)$  est une base de  $V$  donc on peut écrire de façon unique

$$(*) \quad v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n, \quad v_{n+2} = \mu_0 v_0 + \dots + \mu_n v_n$$

et l'on a  $\lambda_i \neq 0$  pour tout  $i$  puisque  $\mathcal{R} = (q_0, \dots, q_{n+1})$  est un repère de  $V$ . Pour tout  $i = 0, \dots, n$ , notons  $f_i : V \rightarrow k$  la forme linéaire définie par  $f_i(u) = \det_{\mathcal{C}}(v_0, \dots, u, \dots, v_n)$ , où  $u$  se trouve à la  $i$ -ème place (à la place de  $v_i$ ). Alors il résulte de (\*) et des propriétés du déterminant que l'on a :

$$(**) \quad f_i(v_{n+1}) = \lambda_i, \quad f_i(v_{n+2}) = \mu_i.$$

Soit  $g$  l'application linéaire  $V \rightarrow k^{n+1}$  envoyant  $\lambda_i v_i$  sur  $e_i$  pour  $i = 0, \dots, n$ ; alors  $g(v_{n+1}) = e_0 + \dots + e_n$  donc l'homographie  $h : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  définie par  $g$  envoie  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{R}_0$ , d'où  $\phi(x) = h(q_{n+2}) = [g(v_{n+2})]$ . De plus, comme  $v_{n+2} = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$ , on a :

$$g(v_{n+2}) = \sum_{i=0}^n \mu_i g(v_i) = \sum_{i=0}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i} e_i$$

et donc, pour tout  $i = 0, \dots, n$ , sa  $i$ -ème coordonnée homogène est :

$$\xi = \frac{\mu_i}{\lambda_i} = \frac{\det_{\mathcal{C}}(v_0, \dots, \overset{i\text{-ème place}}{\downarrow} v_{n+2}, \dots, v_n)}{\det_{\mathcal{C}}(v_0, \dots, v_{n+1}, \dots, v_n)}.$$

Enfin, si on remplace  $\mathcal{C}$  par une base arbitraire  $\mathcal{B}$  de  $V$ , on a  $\det_{\mathcal{B}}(\cdot) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(\cdot)$ , donc le numérateur et le dénominateur dans la formule ci-dessus sont tous deux multipliés par le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$  donc le quotient est inchangé. Ceci prouve la formule (\*).  $\square$

Il résulte immédiatement de cette définition du  $(n+1)$ -rapport qu'il est préservé par toute homographie, i.e. on a le :

**Corollaire 19.2.** — Soient  $\mathbb{P}(V)$  et  $\mathbb{P}(V')$  deux espaces projectifs de même dimension  $n$  et soit  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  une homographie. Alors «  $f$  préserve le  $(n+1)$ -rapport », i.e. pour tout  $(q_0, \dots, q_{n+2}) \in X(V) = \mathbb{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$ , on a :

$$[f(q_0), \dots, f(q_{n+2})] = [q_0, \dots, q_{n+2}].$$

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{R}_0$  le repère standard de  $\mathbb{P}^n(k)$  et soit  $(q_0, \dots, q_{n+2}) = (\mathcal{R}, q_{n+2})$  un élément de  $X(V)$ .

D'après 12.7 (iv),  $\mathcal{R}' = f(\mathcal{R})$  est un repère projectif de  $\mathbb{P}(V')$ ; soit  $h'$  l'unique homographie  $\mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  telle que  $h'(\mathcal{R}') = \mathcal{R}_0$ . Alors  $h = h' \circ f$  est l'unique homographie  $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  telle que  $h(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_0$ . Donc, par définition du  $(n+1)$ -rapport dans  $\mathbb{P}(V')$  et  $\mathbb{P}(V)$ , on a :

$$[f(q_0), \dots, f(q_{n+1}), f(q_{n+2})] = h'(f(q_{n+2})) = (h' \circ f)(q_{n+2}) = [q_0, \dots, q_{n+1}, q_{n+2}].$$

$\square$

Le corollaire précédent admet la « réciproque » suivante :

**Proposition 19.3.** — Soient  $\mathbb{P}(V)$  et  $\mathbb{P}(V')$  deux espaces projectifs de même dimension  $n$  et soit  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  une application bijective. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un repère projectif  $\mathcal{R} = (q_0, \dots, q_{n+1})$  de  $\mathbb{P}(V)$  tel que  $(f(q_0), \dots, f(q_{n+1}))$  soit un repère projectif  $\mathcal{R}'$  de  $\mathbb{P}(V')$ , et pour tout  $x \in \mathbb{P}(V)$  on a :

$$[q_0, \dots, q_{n+1}, x] = [f(q_0), \dots, f(q_{n+1}), f(x)].$$

(ii) L'assertion précédente est vérifiée pour tout repère projectif  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{P}(V)$ .

(iii)  $f$  est une homographie.

On peut résumer ceci en disant que : «  $f$  est une homographie ssi elle préserve le  $(n + 1)$ -rapport ».

*Démonstration.* — On a déjà vu (iii)  $\Rightarrow$  (ii) et (ii)  $\Rightarrow$  (i) est évident. Supposons (i) vérifié. Soit  $h$  (resp.  $h'$ ) l'unique homographie de  $\mathbb{P}(V)$  (resp.  $\mathbb{P}(V')$ ) sur  $\mathbb{P}^n(k)$  telle  $h(\mathcal{R})$  (resp.  $h'(\mathcal{R}')$ ) égale  $\mathcal{R}_0$ . Par définition du  $(n + 1)$ -rapport dans  $\mathbb{P}(V')$  et  $\mathbb{P}(V)$ , on a :

$$[f(q_0), \dots, f(q_{n+1}), f(x)] = h'(f(x)) \quad \text{et} \quad [q_0, \dots, q_{n+1}, x] = h(x)$$

et l'égalité de ces deux quantités entraîne  $f(x) = h'^{-1}(h(x))$ , pour tout  $x \in \mathbb{P}(V)$ . On a donc  $f = h'^{-1} \circ h$ , ce qui prouve que  $f$  est une homographie.  $\square$

À la lumière de ce qui précède, revenons sur le birapport. Soit  $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$  une droite projective (i.e.  $\dim(W) = 2$ ). Dans ce cas, trois points  $p_1, p_2, p_3$  de  $\mathbf{D}$  forment un repère projectif ssi ils sont deux à deux distincts. Soit  $\mathcal{B} = (e_0, e_1)$  une base de  $W$  et notons  $[x, y]$  les coordonnées homogènes correspondantes.

**Proposition 19.4.** — Soient  $p_1, p_2, p_3, p_4$  quatre points de  $\mathbf{D}$ , avec  $p_1, p_2, p_3$  deux à deux distincts. Notant  $[x_i, y_i]$  les coordonnées homogènes de  $p_i$ , le birapport  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  est égal à :

$$\left[ \frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}} \right] = \left[ \frac{x_4 y_2 - x_2 y_4}{x_3 y_2 - x_2 y_3}, \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} \right] = \left[ \frac{x_4 y_2 - x_2 y_4}{x_3 y_2 - x_2 y_3}, \frac{x_4 y_1 - x_1 y_4}{x_3 y_1 - x_1 y_3} \right]$$

(dans la 2ème égalité, on a changé le signe du numérateur et du dénominateur du 2ème rapport).

*Démonstration.* — Ceci est la formule  $(\star)$  du théorème 19.1 dans le cas  $n = 1$ .  $\square$

La définition 19.1 du birapport permet de déterminer sans calcul les birapports « permutés »  $[\cdot] \circ \tau$  pour  $\tau = (12)$  ou  $(23)$  puis, par composition, pour tout  $\tau \in S_3$  (cf. 18.15) :

**Proposition 19.5.** — Soient  $(p_1, p_2, p_3)$  trois points distincts de  $\mathbf{D}$  et  $q$  un quatrième point. Posons  $[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda \in k \cup \{\infty\}$ . Alors :

$$\boxed{[p_2, p_1, p_3, q] = \frac{1}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \boxed{[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda}$$

(avec  $1/0 = \infty$  et  $1/\infty = 0$  et  $1 - \infty = \infty$ ). Par conséquent, on a l'hexagone suivant : <sup>(10)</sup>

$$\begin{array}{ccc}
 & [p_1, p_2, p_3, q] = \lambda & \\
 (12) \swarrow & & \searrow (23) \\
 [p_2, p_1, p_3, q] = \frac{1}{\lambda} & & [p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda \\
 (23) \downarrow & & \downarrow (12) \\
 [p_2, p_3, p_1, q] = 1 - \frac{1}{\lambda} & & [p_3, p_1, p_2, q] = \frac{1}{1 - \lambda} \\
 (12) \searrow & & \swarrow (23) \\
 & [p_3, p_2, p_1, q] = \frac{\lambda}{\lambda - 1} &
 \end{array}$$

*Démonstration.* — Soit  $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{P}^1$  l'unique homographie envoyant le triplet  $(p_1, p_2, p_3)$  sur le triplet standard  $(\infty, 0, 1)$ , alors  $h(q) = \lambda$ .

D'autre part,  $h$  envoie le triplet  $(p_2, p_1, p_3)$  sur le triplet  $(0, \infty, 1)$ ; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie  $\sigma$  qui échange 0 et  $\infty$  et fixe 1. Celle-ci est donnée par  $\sigma([x, y]) = [y, x]$ , i.e.  $\sigma$  échange  $0 = [0, 1]$  et  $\infty = [1, 0]$  et, pour tout  $t \in k^*$ , on a :

$$\sigma(t) = \sigma([t, 1]) = [1, t] = \left[\frac{1}{t}, 1\right] = \frac{1}{t}.$$

Ainsi,  $\sigma \circ h$  envoie  $(p_2, p_1, p_3)$  sur  $(\infty, 0, 1)$  et donc  $[p_2, p_1, p_3, q] = \sigma(h(q)) = \sigma(\lambda)$ . Ceci prouve la première égalité (y compris les cas particuliers  $1/0 = \sigma(0) = \infty$  et  $1/\infty = \sigma(\infty) = 0$ ).

La deuxième s'obtient de façon analogue :  $h$  envoie  $(p_1, p_3, p_2)$  sur le triplet  $(\infty, 1, 0)$ ; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie  $\tau$  qui échange 0 et 1 et fixe  $\infty$ . Celle-ci est donnée par  $\tau([x, y]) = [y - x, y]$ , i.e.  $\tau(\infty) = \infty$  et, pour tout  $t \in k$ , on a :

$$\tau(t) = \tau([t, 1]) = [1 - t, 1] = 1 - t.$$

Ainsi,  $\tau \circ h$  envoie  $(p_1, p_3, p_2)$  sur  $(\infty, 0, 1)$  et donc  $[p_1, p_3, p_2, q] = \tau(h(q)) = \tau(\lambda)$ . Ceci prouve la seconde égalité (y compris le cas particulier  $1 - \infty = \tau(\infty) = \infty$ ).

Enfin, comme les transpositions (12) et (23) engendrent  $S_3$ , l'hexagone s'obtient en procédant de façon répétée à des échanges des places 1, 2 ou 2, 3.  $\square$

## 20. Théorème de Thalès projectif

Commençons par le cas d'un plan projectif  $\mathbb{P}(V)$ , où  $\dim(V) = 3$ .

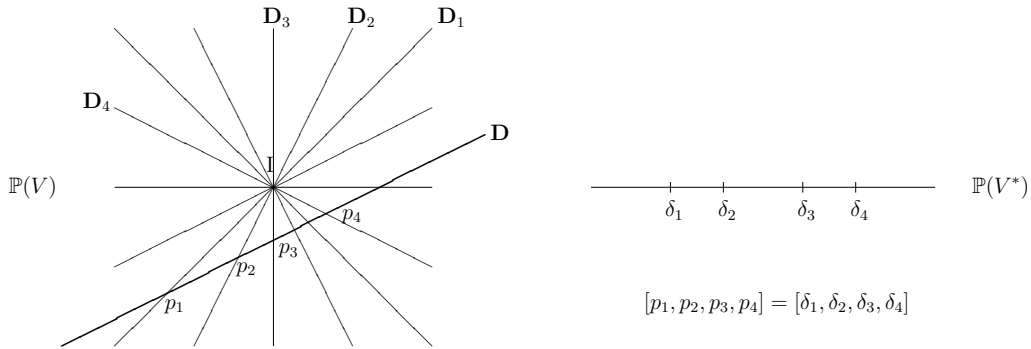
### **Proposition 20.1** (Birapport de quatre droites concourantes d'un plan)

Soient  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4$  quatre droites distinctes du plan projectif  $\mathbb{P}(V)$ , concourantes en un point  $I$ . Soit  $\mathbf{D}$  une droite ne passant pas par  $I$ , elle coupe alors les  $\mathbf{D}_i$  en quatre points  $p_i$  deux à deux distincts. Alors :

- (i) Le birapport  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  est indépendant de la droite  $\mathbf{D}$ .

<sup>(10)</sup> **Attention !** À chaque étape ce sont les places (1, 2 ou 3) des  $p_i$  que l'on échange, et non leurs indices.

(ii) Plus précisément, c'est le birapport des quatre points  $\delta_i$  de la droite projective  $\Delta \subset \mathbb{P}(V^*)$  correspondant au pinceau des droites passant par  $I$ .



*Démonstration.* — On a  $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E)$ , où  $E$  est un plan de  $V$ . Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$  et  $e_3$  un générateur de la droite vectorielle correspondant à  $I$ . Comme  $I \notin \mathbf{D}$  alors  $e_3 \notin E$ , donc  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $V$ . Notons  $(x, y, z)$  les coordonnées dans cette base. On obtient ainsi des coordonnées homogènes  $[x, y, z]$  sur  $\mathbb{P}(V)$  telles que  $\mathbf{D}$  soit donnée par l'équation  $z = 0$  et que  $I = [0, 0, 1]$ . Ceci munit  $\mathbb{P}(V^*)$  de coordonnées homogènes « duales »  $[a, b, c]$ , i.e. le point  $[a, b, c]$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  correspond à la droite de  $\mathbb{P}(V)$  d'équation  $ax + by + cz = 0$ .

Alors, pour tout point  $p = [x_0, y_0, 0]$  de  $\mathbf{D}$ , la droite  $(Ip)$  a pour équation  $y_0x - x_0y = 0$  donc correspond au point  $[y_0, -x_0, 0]$  de  $\Delta$ . Comme l'application

$$\mathbf{D} \rightarrow \Delta, \quad [x, y, 0] \mapsto [y, -x, 0]$$

est une homographie, donnée par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit que  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$ . (On pourrait aussi vérifier ceci par un calcul direct en utilisant la formule explicite du birapport.) □

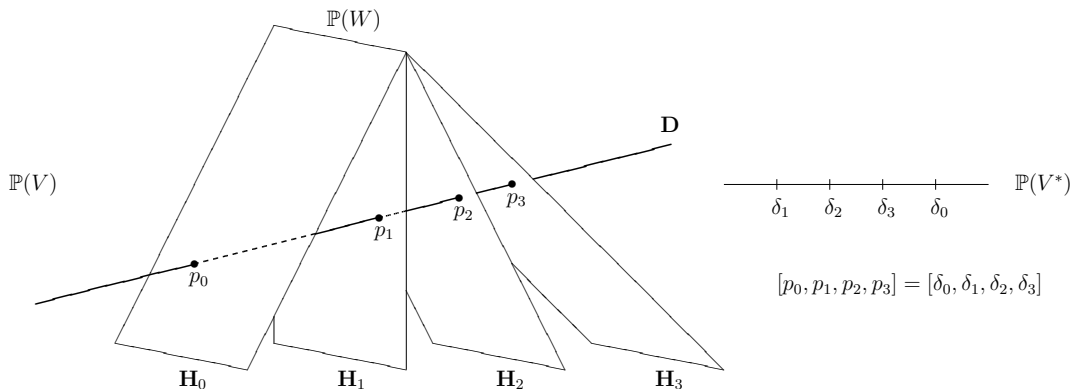
Plus généralement, on a la :

**Proposition 20.2 (Birapport de quatre hyperplans d'un pinceau)**

Dans  $\mathbb{P}(V)$ , soient  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$  quatre éléments distincts d'un pinceau d'hyperplans de centre  $\mathbb{P}(W)$ . Soit  $\mathbf{D}$  une droite ne rencontrant pas  $\mathbb{P}(W)$ , elle coupe alors les  $\mathbf{H}_i$  en quatre points  $p_i$  deux à deux distincts. Alors :

(i) Le birapport  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  est indépendant de la droite  $\mathbf{D}$ .

(ii) Plus précisément, c'est le birapport des quatre points  $\delta_i$  de la droite projective  $\Delta \subset \mathbb{P}(V^*)$  correspondant au pinceau.



*Démonstration.* — Elle est analogue à la précédente. On a  $\mathbf{D} = \mathbb{P}(F)$  pour un certain sev  $F$  de  $V$  de dimension 2 tel que  $F \cap W = \{0\}$  et donc  $V = F \oplus W$ . Soit  $(e_0, e_1)$  une base de  $F$ , complétons-la en une base  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $V$ , d'où des coordonnées homogènes  $[x_0, \dots, x_n]$  sur  $\mathbb{P}(V)$  telles que  $\mathbb{P}(W)$  (resp.  $\mathbf{D}$ ) soit donné par les équations  $x_0 = 0 = x_1$  (resp.  $x_2 = 0 = \dots = x_n$ ) et donc

$$\mathbf{D} = \{[x_0, x_1, 0, \dots, 0] \mid (x_0, x_1) \in k^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

La base duale  $(e_0^*, \dots, e_n^*)$  de  $V^*$  munit  $\mathbb{P}(V^*)$  de coordonnées homogènes  $[a_0, \dots, a_n]$ , pour lesquelles la droite  $\Delta = \mathbb{P}(W^0)$  a pour équations  $a_2 = 0 = \dots = a_n$ , i.e.

$$\Delta = \{[a_0, a_1, 0, \dots, 0] \mid (a_0, a_1) \in k^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

Pour tout point  $p = [a, b, 0, \dots, 0]$  de  $\mathbf{D}$ , le sous-espace projectif engendré par  $p$  et  $\mathbb{P}(W)$  est égal à  $\mathbb{P}(H_p)$ , où  $H_p$  est l'hyperplan vectoriel engendré par  $W$  et la droite vectorielle  $k(ae_0 + be_1)$ . On voit que  $H_p$  a pour équation  $bx_0 - ax_1 = 0$ , donc  $\mathbb{P}(H_p)$  correspond au point  $[b, -a, 0, \dots, 0]$  de  $\Delta$ . Comme l'application  $\mathbf{D} \rightarrow \Delta$ ,  $[a, b, 0] \mapsto [b, -a, 0]$  est une homographie, donnée par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit que  $[p_0, p_1, p_2, p_3] = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3]$ .  $\square$

**Remarque 20.3.** — La proposition précédente peut être appelée **théorème de Thalès projectif**. En effet, posons  $E = H_{p_0}$  et prenons  $\mathbf{H}_0 = \mathbb{P}(E)$  comme hyperplan à l'infini  $\mathbf{H}_\infty$  de  $\mathbb{P}(V)$ , et donc  $p_0$  comme point à l'infini sur la droite  $\mathbf{D}$ . D'une part, dans l'espace affine  $\mathcal{E} = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}_0$  (de direction  $E$ ), les hyperplans affines  $\mathcal{H}_i = \mathcal{E} \cap \mathbf{H}_i$  sont parallèles, pour  $i = 1, 2, 3$  (car  $\mathbf{H}_i \cap \mathbf{H}_j = \mathbb{P}(W) \subset \mathbf{H}_\infty$ ).<sup>(11)</sup> D'autre part, le birapport  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  est égal à  $[\lambda, 1]$ , où le scalaire  $\lambda$  est :

$$(\dagger) \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{p_1 p_3}}{\overrightarrow{p_1 p_2}}.$$

Ceci peut se voir en utilisant la formule explicite du birapport ou, mieux, en la retrouvant directement dans ce cas particulier. Soit  $h$  l'homographie  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui envoie  $(p_0, p_1, p_2)$  sur  $(\infty, 0, 1)$ ; elle induit, par restriction, une application affine de la droite affine  $\mathcal{D} = \mathbf{D} - \{p_0\}$  sur la droite affine  $k = \mathbb{P}^1(k) - \{\infty\}$ , qui envoie  $p_1$  sur 0 et  $p_2$  sur 1. Ceci revient à prendre  $(p_1, p_2)$  comme repère affine de  $\mathcal{D}$  et alors le birapport  $[p_0, p_1, p_2, p_3] = h(p_3)$  n'est autre que le scalaire  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{p_1 p_3} = \lambda \overrightarrow{p_1 p_2}$ . Ceci prouve la formule  $(\dagger)$ .

On voit donc que la proposition précédente contient comme cas particulier (en mettant  $\mathbf{H}_0$  à l'infini) le théorème de Thalès, i.e. que si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont deux droites affines coupant les  $\mathcal{H}_i$  en  $A_1, A_2, A_3$  et  $B_1, B_2, B_3$  respectivement, alors on a

$$\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \frac{\overrightarrow{B_1 B_3}}{\overrightarrow{B_1 B_2}}. \quad (12)$$

### Références pour ce chapitre :

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire, Hermann, 1997. (§VII.8)

[Ti] Claude Tisseron, Géométries affine, projective et euclidienne, Hermann, 1988.

<sup>(11)</sup>Et, d'après la Prop. 11.15, la direction de chaque  $\mathcal{H}_i$  est  $H_{p_i} \cap E = W$ .

<sup>(12)</sup>Et ce scalaire est le birapport des hyperplans projectifs  $\mathbf{H}_\infty = \mathbb{P}(E)$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_1)$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_2)$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_3)$  de  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(V)$ , qui appartiennent au pinceau de centre  $\mathbb{P}(W)$ , où  $W \subset E$  est la direction commune des  $\mathcal{H}_i$ .