
Semaine 10 : Géométrie affine euclidienne I. coniques

Références pour ce chapitre :

- [Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§III.3.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand
- [Du] Antoine Ducros, Géométrie affine et euclidienne, Cours de L3 à l'UPMC 2009-2012 (sections 4 et 5), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros
- [Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire (Hermann, 1997), Chap. II, VI et VIII.
- [It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§1.9 et 3.3), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg
- [Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. 6 et 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

16. Rappels sur les espaces euclidiens

Définitions 16.1. — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie).

(1) Soient ϕ une fbs sur E et Q la forme quadratique associée. On dit que Q (ou ϕ) est **définie positive** si $Q(x) > 0$ pour tout $x \in E - \{0\}$. Dans ce cas, on dit que ϕ est un **produit scalaire** et l'on note souvent $\phi(x, y) = (x | y)$.

Rappelons que dans ce cas Q est *non dégénérée* : si $x \in N(Q)$, on a en particulier $Q(x) = 0$, d'où $x = 0$.

(2) Si E est de dimension finie, on dit alors que « E , muni de $(|)$ » est un **espace euclidien**. (Pour abrégé, on écrira souvent : « Soit E un espace euclidien », sans préciser le produit scalaire $(|)$, celui-ci étant sous-entendu.)

Exemples 16.2. — (1) \mathbb{R}^n muni du produit scalaire standard : $(x | y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, la forme quadratique associée étant $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, est un

espace euclidien de dimension n . Pour ce produit scalaire, la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n est *orthonormée*, i.e. on a $(e_i | e_j) = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon.

(2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (il n'est pas de dimension finie!). Il est muni du produit scalaire $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Définition 16.3. — Soit E , muni de $(|)$, un espace euclidien.

(1) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs est dite **orthonormée** si $(e_i | e_i) = 1$ et $(e_i | e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

(2) Supposons E de dimension n . Une **base orthonormée** est une base (e_1, \dots, e_n) de E qui est une famille orthonormée, i.e. qui vérifie $(e_i | e_i) = 1$ et $(e_i | e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

(3) Toute famille orthonormée est *libre*. En particulier, si $\dim E = n$, toute famille orthonormée (f_1, \dots, f_n) de cardinal n est une base orthonormée de E .

(4) Dans la suite, on abrégé souvent « base orthonormée » en : b.o.n.

Démonstration. — Prouvons (3). Supposons qu'on ait une relation $0 = t_1e_{i_1} + \dots + t_pe_{i_p}$, avec $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Fixons un indice $r \in \{1, \dots, p\}$ et appliquons $(e_{i_r} |)$ à l'égalité précédente. Comme $(e_{i_r} | e_{i_s}) = 0$ pour $s \neq r$, on obtient $0 = t_r(e_{i_r} | e_{i_r}) = t_r$, d'où $t_r = 0$. Ceci prouve que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre. \square

Théorème 16.4. — Soit E un espace euclidien de dimension n . Alors E admet une base orthonormée.

Démonstration. — D'après le théorème d'inertie de Sylvester 14.21, il existe une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) telle que $(e_i | e_i) \in \{1, -1, 0\}$; or comme $(|)$ est défini positif on a nécessairement $(e_i | e_i) = 1$, donc (e_1, \dots, e_n) est une b.o.n. \square

Définition 16.5 (Normes et distances). — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Une **norme** $\| \cdot \|$ sur E est une application $E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, on a $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ (où $|t|$ est la valeur absolue de t).
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, pour tout $u, v \in E$.

L'inégalité précédente est nommée **inégalité triangulaire**, pour la raison suivante. Si on pose $d(x, y) = \|y - x\|$, pour tout $x, y \in E$, alors, compte tenu de (1) et (2) ci-dessus, (3) équivaut à dire (en posant $u = y - x$, $v = z - y$) que l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **distance** sur E , i.e. vérifie :

- (1') $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (2') $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3') **Inégalité triangulaire** : pour tout $x, y, z \in E$, on a : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Théorème 16.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne)

Soit $(|)$ un produit scalaire sur E et soit Q la forme quadratique associée.

(i) On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\boxed{\forall x, y \in E \quad (x | y)^2 \leq Q(x)Q(y)}$, avec égalité ssi x et y sont liés.

(ii) L'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E , appelée la **norme euclidienne** associée à $(|)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit comme suit (où dans le terme de gauche $| \cdot |$ désigne la valeur absolue dans \mathbb{R}) :

$$(CS) \quad \boxed{\forall x, y \in E \quad |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| .}$$

Démonstration. — (i) Si x ou y est nul, les deux membres sont nuls. Supposons donc x et y non nuls. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq Q(tx + y) = t^2 Q(x) + 2t(x | y) + Q(y).$$

Comme le polynôme de degré 2 en t ci-dessus ne change pas de signe, alors son discriminant réduit $\Delta' = (x | y)^2 - Q(x)Q(y)$ ⁽¹⁾ est ≤ 0 , ce qui prouve l'inégalité voulue. De plus, on a égalité ssi $\Delta' = 0$, ce qui équivaut à ce que le trinôme ci-dessus ait une racine double $t_0 = -(x | y)/Q(x)$; dans ce cas, l'égalité $Q(t_0x + y) = 0$ équivaut, puisque Q est définie positive, à $t_0x + y = 0$ i.e. à $y = \frac{(x | y)}{(x | x)}x$. Ceci prouve (i).

(ii) Prouvons que $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E . Comme $(|)$ est défini positif, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $|t| = \sqrt{t^2}$ et donc

$$\|tx\| = \sqrt{(tx | tx)} = \sqrt{t^2(x | x)} = |t| \cdot \|x\|.$$

Enfin, soient $x, y \in E$. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut (en prenant la racine carrée) à :

$$|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| ;$$

alors, multipliant par 2 et ajoutant $\|x\|^2 + \|y\|^2$ aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x | y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

Prenant la racine carrée, ceci entraîne (et équivaut à) l'inégalité triangulaire. Le théorème est démontré. \square

⁽¹⁾Pour un trinôme $aX^2 + 2bX + c$ dont le coefficient de X est écrit sous la forme $2b$, il est commode de considérer le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$ (au lieu du discriminant usuel $\Delta = (2b)^2 - 4ac = 4\Delta'$).

Récrivons certaines conséquences de l'égalité $(x + y | x + y) = (x | x) + (y | y) + 2(x | y)$ en utilisant la norme $\| \cdot \|$ (ou plutôt son carré) :

Proposition 16.7 (Pythagore, parallélogramme et médiane, polarisation)

Soient E un espace euclidien et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. On a les égalités suivantes :

$$\text{(Pythagore)} \quad \|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 \quad \text{si } x_1, \dots, x_n \text{ sont orthogonaux}$$

$$\text{(Parallélogramme/Médiane)} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\text{(Polarisation)} \quad 4(x | y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Démonstration. — L'égalité de Pythagore est immédiate si $n = 2$, et dans ce cas on a même la réciproque : si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ alors $(x_1 | x_2) = 0$. L'égalité pour n vecteurs orthogonaux s'obtient par récurrence sur n . On prendra garde que la réciproque est fautive pour $n \geq 3$: prendre par exemple dans \mathbb{R}^2 euclidien les vecteurs $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (1, 1)$, $x_3 = (-1, 1)$.

Les deux autres égalités s'obtiennent en ajoutant (resp. soustrayant) les égalités :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y | x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y), \\ \|x - y\|^2 &= (x - y | x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x | y). \end{aligned}$$

□

Remarques 16.8. — La deuxième égalité s'appelle « *identité du parallélogramme* », car elle exprime que dans le parallélogramme construit sur les vecteurs x et y , la somme des carrés des longueurs des quatre côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales (qui sont $x + y$ et $x - y$). Elle s'appelle aussi « *identité de la médiane* », car dans le triangle construit sur les vecteurs 0 , x et y , la médiane joignant 0 au milieu du côté $[x, y]$ est $(x + y)/2$, et l'on a donc une formule exprimant (le carré de) la longueur de la médiane en fonction de la longueur des côtés :

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x - y\|^2}{4}.$$

Enfin, la dernière égalité est appelée « *identité de polarisation* », car elle exprime en fonction de la forme quadratique $Q(x) = \|x\|^2$ le produit scalaire, qui est la forme polaire de Q .

Définition et proposition 16.9 (Isométries vectorielles). — Soient E, F deux espaces euclidiens de même dimension n , notons $(|)_E$ et $\| \cdot \|_E$ (resp. $(|)_F$ et $\| \cdot \|_F$) le produit scalaire et la norme euclidienne sur E (resp. F). Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f préserve la norme : $\boxed{\forall x \in E, \quad \|x\|_E = \|f(x)\|_F}$

(b) f préserve le produit scalaire : $\boxed{\forall x, y \in E, \quad (x | y)_E = (f(x) | f(y))_F}$

(c) Pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n. de F .

(d) Il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une b.o.n. de F .

(2) Sous ces conditions, on dit que f est une **isométrie** vectorielle de E sur F

(3) Dans ce cas, f est bijective, et son inverse f^{-1} est aussi une isométrie.

Démonstration. — Supposons que f préserve la norme, et soient $x, y \in E$. Alors $\|x + y\|_E^2 = \|f(x + y)\|_F^2 = \|f(x) + f(y)\|_F^2$, et le premier (resp. dernier) membre égale :

$$\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2(x | y)_E, \quad \text{resp.} \quad \|f(x)\|_F^2 + \|f(y)\|_F^2 + 2(f(x) | f(y))_F$$

et comme $\|x\|_E^2 = \|f(x)\|_F^2$ et $\|y\|_E^2 = \|f(y)\|_F^2$, on obtient que $(x | y)_E = (f(x) | f(y))_F$. Ceci prouve que (a) \Rightarrow (b).

Les implications (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) sont évidentes, montrons que (d) \Rightarrow (a). Supposons (d) vérifiée. Pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ dans E , on a $f(x) = \sum_i x_i f(e_i)$ et, comme (e_1, \dots, e_n) et $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ sont des b.o.n., on obtient

$$\|x\|_E^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|f(x)\|_F^2$$

donc (a) est vérifiée. Ceci prouve l'assertion (1).

Prouvons (3). Soit $f : E \rightarrow F$ une isométrie, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Comme $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. (donc une base) de F , alors f est bijective. Son inverse f^{-1} envoie la b.o.n. $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ de F sur la b.o.n. \mathcal{B} de E , donc f^{-1} est une isométrie. Ceci prouve (3). La proposition est démontrée. \square

Définition 16.10. — On dit qu'un espace affine réel (\mathcal{E}, E) est **euclidien** si E est de dimension finie et est muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Dans ce cas, \mathcal{E} est muni de la **distance euclidienne**, définie par $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{(\overrightarrow{xy} | \overrightarrow{xy})}$.

Si (\mathcal{E}, E) est un espace euclidien, alors tout sous-espace affine (\mathcal{F}, F) est euclidien, car la restriction à F du produit scalaire de E est un produit scalaire sur F .

Définition 16.11 (Isométries affines). — Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien. Une **isométrie affine** de \mathcal{E} est une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances, i.e. telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{E}$. On notera $\text{Is}(\mathcal{E})$ l'ensemble de ces isométries. ⁽²⁾

Rassemblons quelques propriétés des isométries affines, dont on laisse la démonstration au lecteur.

Proposition 16.12. — Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine euclidien.

(i) Une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une isométrie ssi sa partie linéaire \overrightarrow{f} est une isométrie vectorielle de E . Dans ce cas, \overrightarrow{f} et f sont bijectives.

(ii) En particulier, toute translation $f = t_{\vec{u}}$ est une isométrie affine de \mathcal{E} .

(iii) Si $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ sont des isométries affines alors $g \circ f$ en est une aussi.

Définition 16.13 (Repères orthonormés). — Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine euclidien. Un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de \mathcal{E} est dit **orthonormé** si \mathcal{B} est une base orthonormée de E .

Donnons quelques exemples d'isométries affines.

Définition 16.14 (Symétries orthogonales). — Soient F un sev de E et \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction F . La **symétrie orthogonale** s par rapport à \mathcal{F} est la symétrie par rapport à \mathcal{F} de direction F^\perp , i.e. $s(M)$ est l'unique point P vérifiant : $\overrightarrow{MP} \in F^\perp$ et le milieu du segment $[M, P]$ appartient à \mathcal{F} .

En effet, soit $p(M)$ le projeté orthogonal de M sur \mathcal{F} , i.e. le point d'intersection de $M + F^\perp$ avec \mathcal{F} . Alors, par définition on a $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$ (cf. 3.12, semaine 1) d'où $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$ et le milieu de $[M, s(M)]$ est $p(M)$, qui appartient bien à \mathcal{F} . Réciproquement, si un point P vérifie les conditions précédentes alors le milieu I de $[M, P]$ appartient à \mathcal{F} et $\overrightarrow{MI} = (1/2)\overrightarrow{MP}$ appartient à F^\perp , d'où $I = p(M)$, et donc $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$ d'où $P = s(M)$.

Exemple 16.15. — Si $F = \{0\}$ alors \mathcal{F} est un point I et l'on obtient la **symétrie centrale** de centre I : pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{Is(M)} = -\overrightarrow{IM}$. Sa partie linéaire est $-\text{id}_E$.

⁽²⁾En fait, on peut montrer qu'une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances est nécessairement affine.

Proposition 16.16 (Symétries hyperplanes). — Soient $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère orthonormé de \mathcal{E} , (x_1, \dots, x_n) les coordonnées dans ce repère, \mathcal{H} un hyperplan affine d'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \lambda$, avec $a_1, \dots, a_n, \lambda \in \mathbb{R}$ et les a_i non tous nuls, et H l'hyperplan vectoriel direction de \mathcal{H} i.e. d'équation $\sum_{i=1}^n a_ix_i = 0$. Alors :

(i) Le vecteur $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur **normal** à \mathcal{H} (i.e. orthogonal à H) et l'on a $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E} \mid (u \mid x) = \lambda\}$.

(ii) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{H} . Pour tout $M = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$, posant $\mu_M = \sum_{i=1}^n a_ix_i$ on a :

$$(\dagger) \quad s(M) = M + 2 \frac{\lambda - \mu_M}{(u \mid u)} u = M + 2 \frac{\lambda - \sum_{i=1}^n a_ix_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} u.$$

Démonstration. — (i) Par définition, \mathcal{H} est l'ensemble des points $M = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{E} tels que $\lambda = \sum_{i=1}^n a_ix_i = (u \mid x)$. Fixons arbitrairement un point $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ de \mathcal{H} . Alors pour tout $v \in H$, de coordonnées (y_1, \dots, y_n) dans la base \mathcal{B} le point $M_v = M_0 + v$ appartient à \mathcal{H} et a pour coordonnées $x'_i = x_i^0 + y_i$. On a donc

$$(u \mid v) = \sum_{i=1}^n a_iy_i = \sum_{i=1}^n a_ix'_i - \sum_{i=1}^n a_ix_i^0 = \lambda - \lambda = 0.$$

Ceci montre que u appartient à la droite vectorielle $D = H^\perp$, et comme $u \neq 0$ on a $D = \mathbb{R}u$.

(ii) Soit $M = (x_1, \dots, x_n)$ un point arbitraire de \mathcal{E} et soit $p(M)$ son projeté orthogonal sur \mathcal{H} . Alors $\overrightarrow{Mp(M)}$ égale αu pour un unique $\alpha \in \mathbb{R}$, et notant maintenant (x_1^0, \dots, x_n^0) les coordonnées de $p(M)$, on obtient comme plus haut que

$$\alpha(u \mid u) = (u \mid \alpha u) = \sum_{i=1}^n a_ix_i - \sum_{i=1}^n a_ix_i^0 = \mu_M - \lambda,$$

d'où $\alpha = \frac{\lambda - \mu_M}{(u \mid u)}$. Et comme $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$ on obtient bien la formule (\dagger) . \square

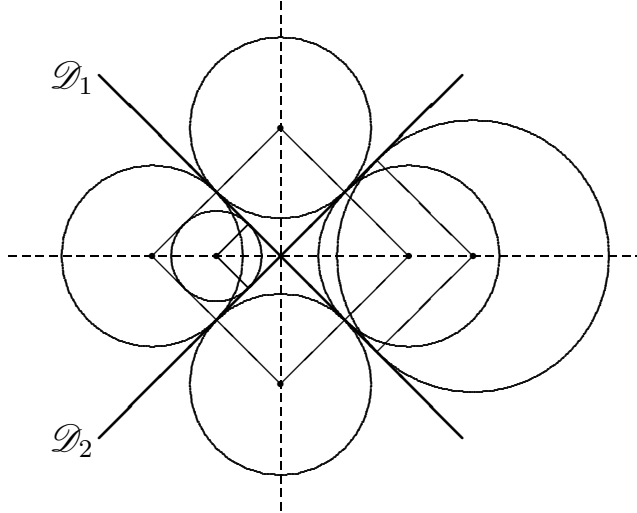
Exercices 16.17. — (1) Dans \mathbb{R}^2 , soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y = 3$. Donner un vecteur normal à \mathcal{D} puis pour tout $M = (x, y)$ déterminer les coordonnées de $s(M)$.

(2) Dans \mathbb{R}^3 , soit σ la symétrie orthogonale par rapport au plan \mathcal{H} d'équation $x + y + z = 3$. Donner un vecteur normal à \mathcal{H} puis pour tout $M = (x, y, z)$ déterminer les coordonnées de $\sigma(M)$.

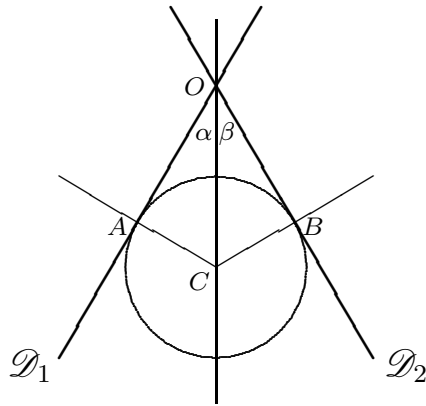
17. Coniques du plan affine euclidien

Si M, N sont des points d'un espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) , on notera MN la longueur du segment $[M, N]$, i.e. la norme euclidienne du vecteur \overrightarrow{MN} . Pour alléger la notation, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sera parfois noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ au lieu de $(\vec{u} \mid \vec{v})$. Dans la suite, (\mathcal{E}, E) désignera un espace affine euclidien de dimension n arbitraire, et \mathcal{P} un plan affine euclidien.

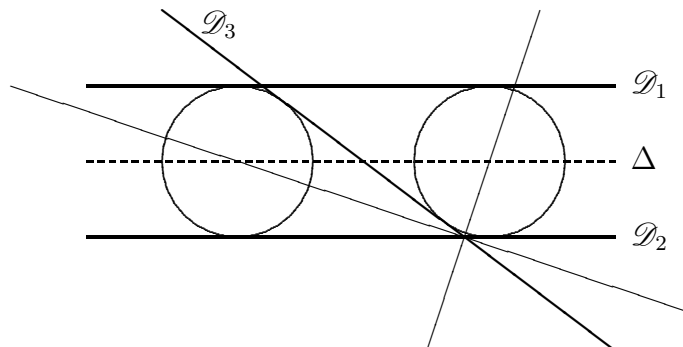
17.1. Cercles tangents à une, deux ou trois droites. — Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites de \mathcal{P} , distinctes et sécantes en un point O . On rappelle qu'un cercle \mathcal{C} est tangent à \mathcal{D}_1 et à \mathcal{D}_2 ssi son centre appartient à l'une des *bissectrices* de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 (il y en a deux, orthogonales l'un à l'autre) : dans la figure ci-dessous, on a représenté six cercles tangents à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ; quatre d'entre eux sont centrés sur l'une des bissectrices et les deux autres sur l'autre bissectrice. (On a aussi indiqué les rayons joignant les centres aux points de tangence.)



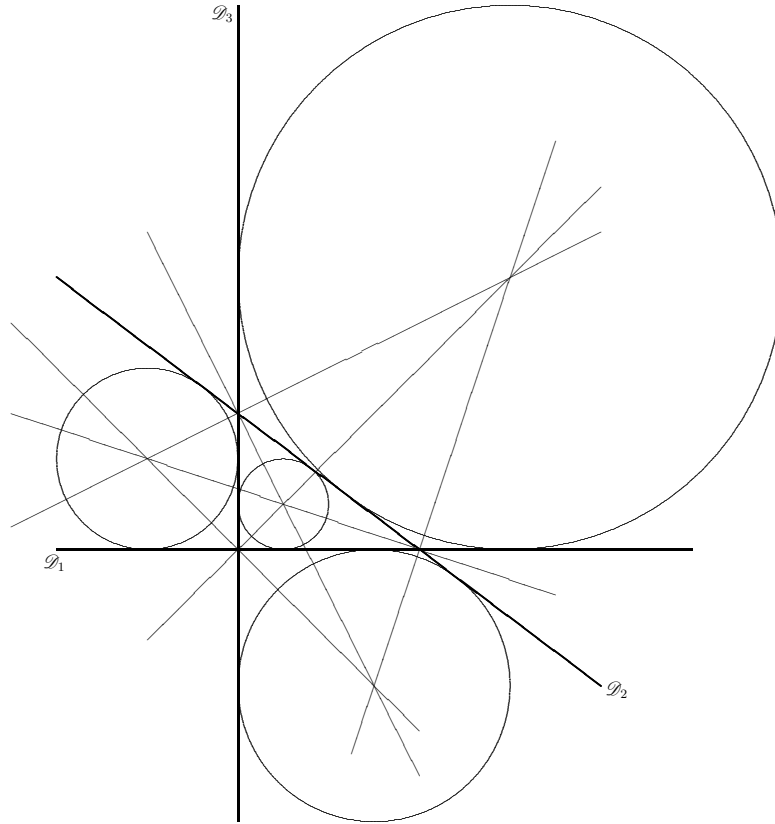
Rappelons une démonstration de ce fait, cf. la figure ci-dessous. Soit C un point de \mathcal{P} hors de $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et soient A et B ses projections orthogonales sur \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Alors C est le centre d'un cercle tangent à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en A et B ssi $CA = CB$. Comme les triangles AOC et BOC sont rectangles en A et B , on a $AC = OC \sin(\alpha)$ et $BC = OC \sin(\beta)$ et donc $AC = BC$ ssi $\alpha = \beta$.



D'autre part, si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles, alors les cercles \mathcal{C} tangents à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont centrés sur la parallèle Δ à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 située « au milieu » (cf. la figure ci-dessous). Donc si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont trois droites distinctes, avec \mathcal{D}_3 sécantes aux deux droites parallèles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , on voit qu'il y a exactement deux cercles tangents à $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 :



Enfin, si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont trois droites non concourantes mais deux à deux sécantes, i.e. se coupant en des points distincts A, B, C , il y a quatre cercles tangents à ces trois droites : l'un est le cercle *inscrit* du triangle ABC , les trois autres sont les cercles *exinscrits* de ce triangle :



17.2. Sphères tangentes intérieurement à un cône de révolution. — Soit (\mathcal{E}, E) un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour tout $I \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on note $\Sigma(I, r)$ la sphère de centre I et de rayon r ; elle est de « dimension $n - 1$ ». ⁽³⁾

Définition 17.1 (Puissance d'un point par rapport à une sphère)

Soit $\Sigma = \Sigma(I, r)$ une sphère de \mathcal{E} . La *puissance* d'un point $A \in \mathcal{E}$ par rapport à Σ est $IA^2 - r^2$, qu'on notera $\Sigma(A)$. Alors A est un point de Σ (resp. à l'extérieur de Σ , resp. à l'intérieur) ssi $\Sigma(A) = 0$ (resp. > 0 , resp. < 0).

Lemme 17.2 (Distance d'un point à un sea). — Soient \mathcal{F} un sous-espace affine, M un point de \mathcal{E} et H sa projection orthogonale sur \mathcal{F} .

Pour tout $P \in \mathcal{F}$, on a $\boxed{MH \leq MP}$, avec égalité ssi $P = H$. Donc MH est la distance minimale de M à un point de \mathcal{F} , et l'on pose $MH = d(M, \mathcal{F})$.

Démonstration. — Notons F la direction de \mathcal{F} . Pour $P \in \mathcal{F}$ on a $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}$ et les vecteurs $\overrightarrow{MH} \in F^\perp$ et $\overrightarrow{HP} \in F$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore : $MP^2 = MH^2 + HP^2 \geq MH^2$, avec égalité si et seulement si $P = H$. \square

Proposition 17.3 (Cône de sommet O tangent à une sphère)

Soient $\Sigma = \Sigma(I, r)$ une sphère et O un point de \mathcal{E} extérieur à Σ . Notons Δ la droite (OI) et soit \mathcal{D} une droite quelconque passant par O .

⁽³⁾Au sens de la géométrie différentielle (ou de la géométrie algébrique).

(i) \mathcal{D} coupe Σ en deux points P, Q et l'on a $\boxed{OP \cdot OQ = \Sigma(O)}$. (P, Q sont confondus si \mathcal{D} est tangente à Σ).

(ii) Supposons \mathcal{D} tangente à Σ en un point P . Alors la distance OP égale $\sqrt{\Sigma(A)}$ donc elle est la même pour toute tangente, de même que l'angle $\theta \in]0, \pi/2[$ défini par $\boxed{OP = \cos(\theta)OI}$. On appelle OP la distance tangentielle de O à Σ et on la notera $d(O, \Sigma)$. On a donc :

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = \cos(\theta)OI^2 \quad \text{et} \quad d(O, \Sigma)^2 = OP^2 = \cos^2(\theta)OI^2.$$

Soit \mathcal{H} l'hyperplan orthogonal à Δ passant par P , i.e.

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = \cos(\theta)OI^2\}.$$

(iii) L'ensemble des points de tangence est une sphère de \mathcal{H} ⁽⁴⁾ : son centre est le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \cos^2(\theta)OI$ et son rayon est $r' = r \cos(\theta)$.

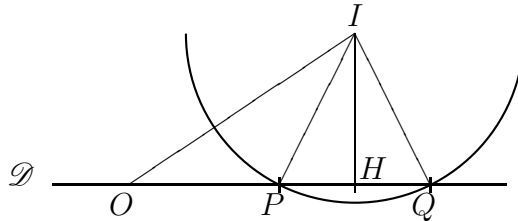
(iv) Soit \mathcal{R} la réunion des tangentes à Σ passant par O : c'est un cône de révolution de sommet O , d'axe $\Delta = (OI)$ et dont θ est le « demi-angle au sommet ».

(v) Pour tout $M \in \mathcal{R}$, notons M_Δ (resp. $M_{\mathcal{H}}$) sa projection orthogonale sur Δ (resp. sur \mathcal{H}). Alors on a $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{E} \mid OM_\Delta = \cos(\theta)OM\}$ et

$$\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{E} \mid MM_{\mathcal{H}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)\}.$$

Démonstration. — Comme \mathcal{D} et Δ sont sécantes en O elles sont contenues dans un plan \mathcal{P} .⁽⁵⁾ Alors $\Sigma \cap \mathcal{P}$ est le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon r et O est extérieur à \mathcal{C} donc la droite \mathcal{D} coupe \mathcal{C} en deux points P, Q (confondus si \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C}).

(i) Soit H la projection orthogonale de I sur \mathcal{D} . Si $P \neq Q$, l'égalité $IP = IQ$ entraîne que I est sur la médiatrice du segment $[P, Q]$, donc H est le milieu de $[P, Q]$, cf. la figure qui suit.



On a donc : $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}) \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{HP}) = OH^2 - HP^2$. D'autre part, comme \overrightarrow{OP} et \overrightarrow{OQ} sont colinéaires et de même sens, on a $OP \cdot OQ = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, d'où :

$$OP \cdot OQ = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = OH^2 - HP^2 = OI^2 - IH^2 - HP^2 = OI^2 - r^2 = \Sigma(O).$$

Supposons désormais \mathcal{D} tangente à \mathcal{C} en $P = Q$. Alors le rayon IP est orthogonal à \mathcal{D} d'où $H = P$ et l'on a $OP^2 = OI^2 - r^2 = \Sigma(O)$. Ceci prouve (i) ainsi que la 1ère assertion de (ii).

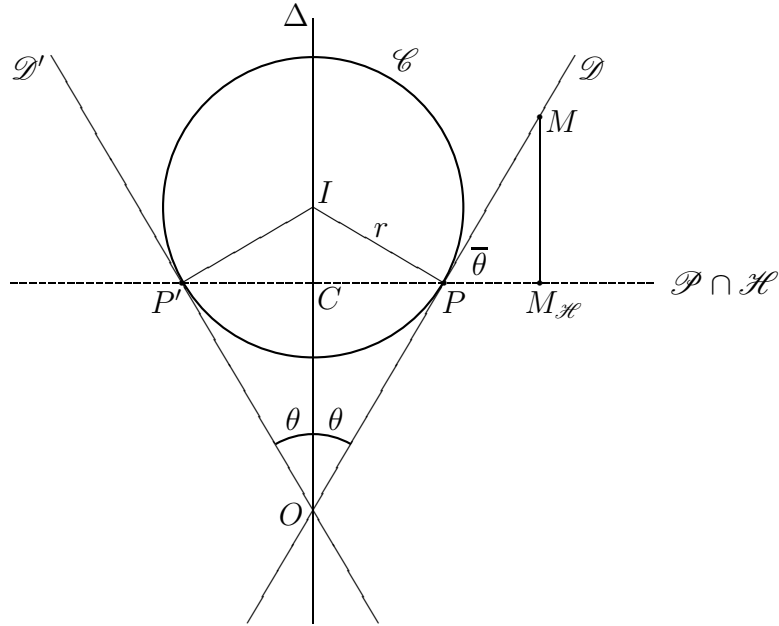
Notons C la projection orthogonale de P sur Δ et θ l'angle (non orienté) entre les demi-droites $[OP)$ et $[OI)$ ($= [OC)$ (cf. la figure ci-dessous). Alors $d(O, \Sigma) = OP = OI \cos(\theta)$ et

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = OP \cdot OI \cos(\theta) = \cos(\theta)OI^2.$$

De plus, $\cos(\theta) = d(O, \Sigma)/OI$ est indépendant de la tangente choisie. Ceci achève la preuve de (ii) et prouve aussi que $OC = \cos(\theta)OP = \cos^2(\theta)OI$, d'où $\overrightarrow{OC} = \cos^2(\theta)\overrightarrow{OI}$.

⁽⁴⁾Elle est donc de dimension $n - 2$; si $n = 2$ elle est formée de deux points.

⁽⁵⁾ \mathcal{P} est uniquement déterminé si $\mathcal{D} \neq \Delta$; sinon on peut prendre n'importe quel plan \mathcal{P} contenant Δ .



Comme les triangles OCP et ICP sont rectangles en C alors \widehat{PCO} égale $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ et donc $\widehat{IPC} = \theta$, d'où $PC = r \cos(\theta)$. Comme l'ensemble Σ' des points de tangence est obtenu par rotation autour de la droite Δ , on obtient donc que Σ' est l'ensemble des points M tels que $CM = CP = r \cos(\theta)$; c'est donc la sphère de \mathcal{H} de centre C et de rayon $r' = r \cos(\theta)$. Ceci prouve (iii), et alors (iv) est clair (cf. la figure).

La 1ère assertion de (v) est claire (l'égalité $OM_{\Delta} = \cos(\theta)OM$ est préservée par les homothéties de centre O , et pour $M = P$ on a $P_{\Delta} = C$). Prouvons la 2ème.

Posant $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$, on a $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, où \mathcal{D}' est la symétrique de \mathcal{D} par rapport à Δ . Soit $M \in \mathcal{E}$; comme l'assertion à prouver est invariante par rotation autour de Δ , on peut supposer que $M \in \mathcal{P}$. Si M appartient à \mathcal{D} , on a

$$MM_{\mathcal{H}} = \sin(\bar{\theta})MP = \cos(\theta)MP = \cos(\theta)d(M, \Sigma),$$

et de même si $M \in \mathcal{D}'$. Il nous reste à montrer la réciproque, i.e. que si $MM_{\mathcal{H}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)$ alors $M \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}$.

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé de \mathcal{P} tel que \vec{j} engendre Δ , et soient (x, y) les coordonnées dans ce repère. Alors $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ a pour équation $x^2 = \tan^2(\theta)y^2$. D'autre part, posons $b = OI$ et $d = OP = b \cos(\theta)$; alors $b^2 - r^2 = d^2$ et $OC = d \cos(\theta)$. Donc, si $M = (x, y)$ alors $M_{\mathcal{H}} = (x, d \cos(\theta))$ et l'on a :

$$\begin{aligned} MM_{\mathcal{H}}^2 &= (y - d \cos(\theta))^2 = y^2 - 2d \cos(\theta)y + \cos^2(\theta)d^2 = y^2 + \cos^2(\theta)(d^2 - 2b) \\ d(M, \Sigma)^2 &= MI^2 - r^2 = x^2 + (y - b)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2by + d^2, \end{aligned}$$

d'où $\cos^2(\theta)d(M, \Sigma)^2 - MM_{\mathcal{H}}^2 = \cos^2(\theta)x^2 - \sin^2(\theta)y^2$. L'égalité $MM_{\mathcal{H}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)$ entraîne donc $x^2 = \tan^2(\theta)y^2$ d'où $(x, y) \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}$. Ceci achève la preuve du point (v). \square

17.3. Sections coniques et théorème de Dandelin. — Dans ce paragraphe, on se place dans un espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) de dimension 3. Soient $\theta \in]0, \pi/2[$, Δ une droite, O un point de Δ et \mathcal{R} le cône de révolution de sommet O et de demi-angle au sommet θ . En prenant O comme origine, on identifie \mathcal{E} à E .

Fixons un vecteur directeur \vec{k} de Δ de norme 1 et considérons ce vecteur comme « vertical » (cf. les dessins plus bas). Alors l'intersection de \mathcal{R} avec chaque plan « horizontal » $\{\vec{u} \in E \mid \vec{u} \cdot \vec{k} = c\}$ est le cercle de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $\tan(\theta)|c|$. Donc, pour

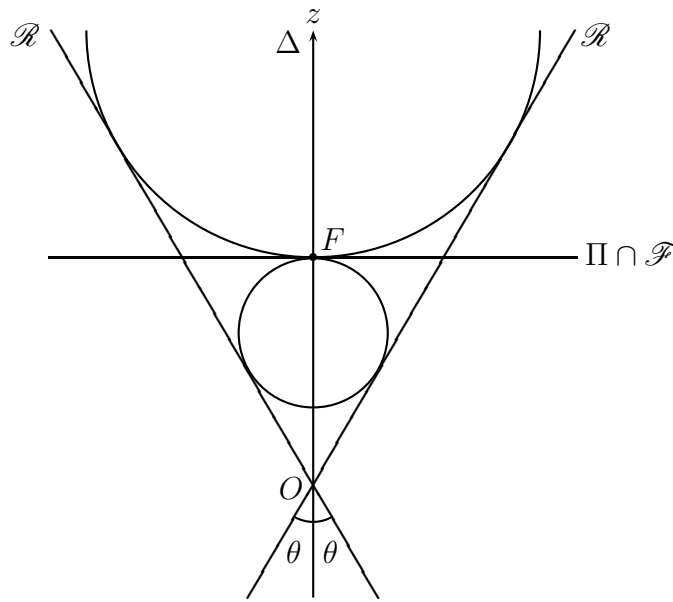
toute b.o.n. (\vec{i}, \vec{j}) du plan vectoriel $(\mathbb{R}\vec{k})^\perp$, notant (x, y, z) les coordonnées dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'équation de \mathcal{R} est :

$$x^2 + y^2 = \tan^2(\theta)z^2.$$

On peut dire que \mathcal{R} est obtenu en « faisant tourner » autour de l'axe Δ une droite variable, formant avec Δ un angle θ . Les droites ainsi obtenues s'appellent les **généatrices** du cône. Pour tout plan \mathcal{F} contenant Δ , l'intersection $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ est la réunion de deux de ces génératrices (voir les figures plus bas).

Soit Π un plan affine *ne contenant pas* Δ . Pour étudier l'intersection $\Pi \cap \mathcal{R}$, qui est une courbe \mathcal{C} du plan Π , appelée « (section) conique », ⁽⁶⁾ on va considérer les sphères qui sont inscrites dans le cône (i.e. qui lui sont tangentes intérieurement) et tangentes au plan Π . Distinguons deux cas.

Cas « trivial ». Si Π est orthogonal à Δ , la situation est invariante par rotation autour de Δ : la section par n'importe quel plan \mathcal{F} contenant Δ donne la figure ci-dessous :



Dans ce cas, $\mathcal{C} = \mathcal{R} \cap \Pi$ est un cercle de centre F . D'autre part, il existe deux sphères inscrites dans \mathcal{R} et tangentes à Π ; elles sont toutes deux tangentes à Π en F .

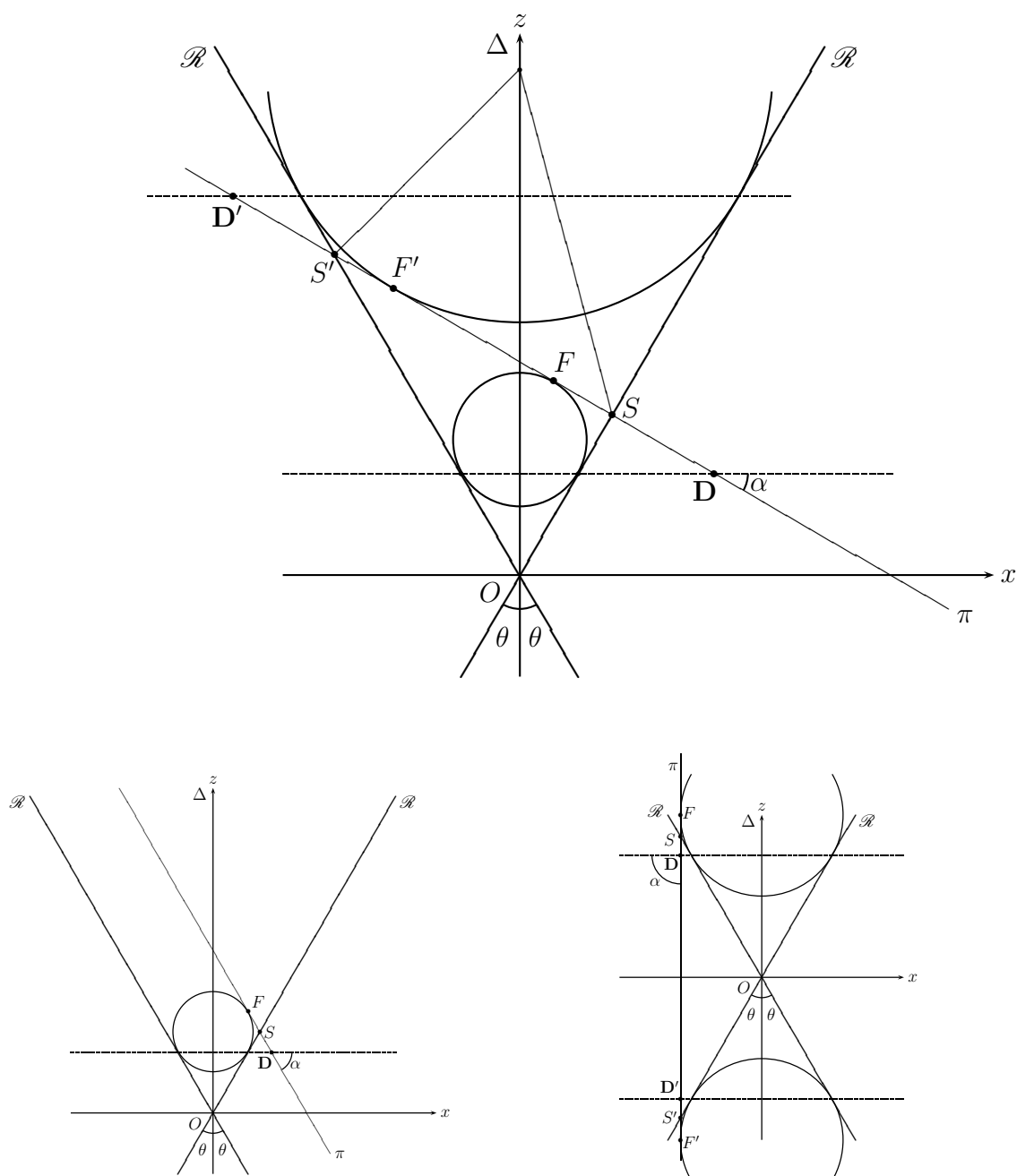
Cas « général ». Supposons désormais Π non orthogonal à Δ . Alors sa direction $\vec{\Pi}$ coupe le plan vectoriel $(\mathbb{R}\vec{k})^\perp$ selon une droite vectorielle Δ_1 , et l'on prendra \vec{j} comme générateur de cette droite.

Si Σ est une sphère inscrite dans \mathcal{R} , son centre C appartient à Δ ; si de plus Σ est tangente à Π en un point F , alors le vecteur \vec{CF} est orthogonal à $\vec{\Pi}$ donc à \vec{j} , donc F appartient au plan $\mathcal{F} = (Oxz)$, et alors $\Sigma \cap \mathcal{F}$ est un cercle inscrit dans le cône $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ et tangent en F à la droite affine $\pi = \Pi \cap \mathcal{F}$.

Réciproquement, si Γ est un tel cercle, disons de rayon r , son centre C appartient à Δ donc la sphère $\Sigma = \Sigma(C, r)$ est inscrite dans \mathcal{R} et la direction du plan tangent $T_F\Sigma$ contient \vec{CF} et \vec{j} donc égale $\vec{\Pi}$, d'où $T_F\Sigma = F + \vec{\Pi} = \Pi$. Ceci montre que les sphères inscrites dans \mathcal{R} et tangentes à Π correspondent aux cercles inscrits dans $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ et tangents à π .

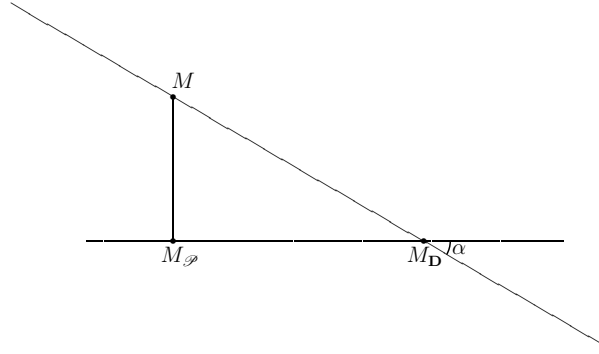
⁽⁶⁾Ces « sections coniques » ont été étudiées en premier par Ménechme (mathématicien grec, environ -390 à -320) et, à sa suite, par de nombreux mathématiciens grecs : Euclide (-325 à -265), Archimède (-287 à -212), Apollonius (-262 à -190)... En particulier les noms de parabole, hyperbole et ellipse semblent dus à Apollonius.

On voit ainsi qu'il y a deux telles sphères, sauf si π est parallèle à l'une des deux génératrices de \mathcal{R} contenues dans \mathcal{F} , cf. les figures ci-dessous :



Fixons donc une sphère Σ inscrite dans \mathcal{R} et tangente à Π en un point F , et notons \mathcal{P} le plan (orthogonal à Δ) contenant le cercle de tangence et \mathbf{D} la droite $\mathcal{P} \cap \mathcal{F}$ (dans les figures ci-dessus, \mathbf{D} est orthogonale au plan de la feuille). Enfin, notons $\alpha \in]0, \pi/2[$ l'angle entre Π et \mathcal{P} , i.e. l'angle (non orienté) entre les droites π et $p = \mathcal{P} \cap \mathcal{F}$.

Soit M un point de Π ; notons $M_{\mathcal{P}}$ (resp. $M_{\mathbf{D}}$) son projeté orthogonal sur \mathcal{P} (resp. sur \mathbf{D}). Alors, dans le plan parallèle à $\mathcal{F} = (Oxz)$ passant par M , on a la figure suivante :



et donc $MM_\varphi = \sin(\alpha)MM_D$. D'autre part, la droite (MF) est contenue dans Π donc tangente à Σ en F , donc MF égale la distance tangentielle $d(M, \Sigma)$, cf. le point (ii) de la proposition 17.3. De plus, d'après le point (v) de cette proposition, M appartient à \mathcal{R} si et seulement si $MM_\varphi = \cos(\theta)d(M, \Sigma)$.

On en déduit qu'un point M de Π appartient à $\mathcal{C} = \Pi \cap \mathcal{R}$ ssi on a les égalités :

$$MF = d(M, \Sigma) = \frac{1}{\cos(\theta)}MM_\varphi = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\theta)}MM_D = e \cdot d(M, \mathbf{D}),$$

où l'on a posé $e = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\theta)}$ (c'est un réel > 0). On a donc obtenu :

$$(\star) \quad \mathcal{C} = \Pi \cap \mathcal{R} = \{M \in \Pi \mid MF = e \cdot d(M, \mathbf{D})\}.$$

Ceci nous conduit à la définition ci-dessous.

Remarque 17.4. — Anticipant sur ce qui va suivre, remarquons que $e = 1$ ssi $\alpha = \bar{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ i.e. ssi $\pi = \Pi \cap \mathcal{F}$ est parallèle à une génératrice. Dans ce cas, on « voit » que \mathcal{C} est une courbe connexe non bornée, et l'on verra plus bas que c'est une parabole.

Le cas $0 < e < 1$ correspond à $0 < \alpha < \bar{\theta}$; dans ce cas on « voit » que \mathcal{C} est une courbe connexe bornée, et l'on verra plus bas que c'est une ellipse. (On a déjà vu que c'est un cercle si $\alpha = 0$ i.e. si Π est orthogonal à Δ .)

Enfin, le cas $e > 1$ correspond à $\alpha > \bar{\theta}$ i.e. $\alpha + \theta > \pi/2$; dans ce cas Π coupe les deux nappes du cône et l'on voit donc que \mathcal{C} a deux composantes connexes. On verra plus bas que c'est une hyperbole.

Définition 17.5 (Définition des coniques par foyer, directrice et excentricité)

On se place dans un plan affine euclidien \mathcal{P} .⁽⁷⁾ Soient \mathcal{D} une droite affine, F un point de \mathcal{P} n'appartenant pas à \mathcal{D} , et e un réel strictement positif. La conique \mathcal{C} de **directrice** \mathcal{D} , de **foyer** F et d'**excentricité** e est :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid FM = e \cdot d(M, \mathcal{D})\}.$$

Notons K la projection orthogonale de F sur \mathcal{D} et $h = KF$. Soit Δ la droite (KF) , i.e. la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par F . Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de \mathbb{R}^2 , telle que $\overrightarrow{FK} = -h\vec{i}$, i.e. dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, K a pour coordonnées $(-h, 0)$. Enfin, on note σ_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ .

Soit $M(x, y)$ un point arbitraire de \mathcal{P} , de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} ; sa projection orthogonale sur \mathcal{D} est le point $H(-h, y)$, donc $d(M, \mathcal{D}) = |x + h|$ et M appartient à \mathcal{C} si et seulement si

$$x^2 + y^2 = e^2(x + h)^2 \quad \text{i.e.} \quad y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0.$$

⁽⁷⁾Au lieu du plan noté Π précédemment.

Notons que l'équation ci-dessus est inchangée si l'on change y en $-y$, par conséquent

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff M(x, -y) \in \mathcal{C}$$

donc $\sigma_{\Delta}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, i.e. Δ est un **axe de symétrie** de \mathcal{C} .

On pose $p = eh > 0$ et on l'appelle le **paramètre** de la conique \mathcal{C} . Tous les points M de la droite d'équation $x = 0$ (la parallèle à \mathcal{D} passant par F) vérifient $d(M, \mathcal{D}) = h$, donc les points d'intersection de cette droite avec \mathcal{C} sont les deux points de coordonnées $(0, p)$ et $(0, -p)$.

D'autre part, les points d'intersection de \mathcal{C} avec la droite Δ (d'équation $y = 0$) sont les points $(\lambda, 0)$, où λ est solution de l'équation :

$$(\dagger) \quad (1 - e^2)\lambda^2 - 2ep\lambda - p^2 = 0.$$

17.4. Paraboles. — Supposons d'abord $e = 1$. Dans ce cas, on trouve $\lambda = -p/2$ et l'équation de \mathcal{C} est

$$y^2 = 2px + p^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

La valeur minimale possible pour x est $x = -p/2$. Le point O de coordonnées $(-p/2, 0)$ dans le repère (F, \vec{i}, \vec{j}) est appelé le **sommet** de la parabole; c'est le milieu du segment $[KF]$. Les nouvelles coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ sont $X = x + (p/2)$ et $Y = y$, donc l'équation de \mathcal{C} devient :

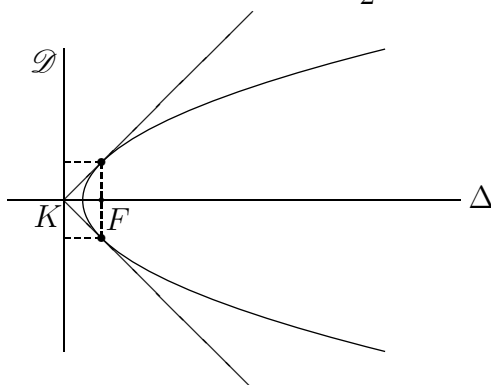
$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \in \mathcal{P} \mid Y^2 = 2pX\}$$

et l'on dit que \mathcal{C} est une **parabole** de paramètre p . Dans \mathcal{R}_0 , la directrice \mathcal{D} a pour équation $X = -p/2$ et le foyer F a pour coordonnées $(p/2, 0)$.

Notons que si $x = p/2$ alors $y^2 = p^2$ donc $y = \pm p$. De plus, posant $Q(x, y) = y^2 - 2px$, la différentielle de Q en un point $P_0 = (x_0, y_0)$ est $2y_0Y - 2pX$ donc si P_0 est un point de \mathcal{C} la tangente à \mathcal{C} en P_0 est donnée par l'équation

$$0 = y_0(Y - y_0) - p(X - x_0) = y_0Y - pX - y_0^2 + px_0 = y_0Y - pX - px_0.$$

Pour $P_0 = (\frac{p}{2}, p)$ on obtient l'équation $Y = X + \frac{p}{2}$, qui est l'équation de la droite joignant $K = (-p/2, 0)$ à P_0 . Et de même pour le point $P'_0 = (\frac{p}{2}, -p)$, d'où la figure :



Supposant maintenant $e \neq 1$, le discriminant réduit du trinôme (\dagger) est $e^2p^2 + (1 - e^2)p^2 = p^2$ donc les solutions sont :

$$\lambda_1 = \frac{ep - p}{1 - e^2} = \frac{-p}{1 + e}, \quad \lambda_2 = \frac{ep + p}{1 - e^2} = \frac{p}{1 - e} \quad \text{et l'on a} \quad \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right| = \frac{p}{|1 - e^2|}.$$

Notons A_1, A_2 les points correspondants de $\Delta \cap \mathcal{C}$, et O leur milieu. L'abscisse x_O de O dans le repère (F, \vec{i}, \vec{j}) est $x_O = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{ep}{1 - e^2}$ et le trinôme s'écrit :

$$(1 - e^2)(x - x_O)^2 - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} - p^2 = (1 - e^2)(x - x_O)^2 - \frac{p^2}{1 - e^2}.$$

Notons $X = x - x_O$ et $Y = y$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, alors l'équation de \mathcal{C} devient

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid (1 - e^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}\}.$$

L'équation est inchangée si l'on change X en $-X$ et l'on voit donc que la droite D_0 d'équation $X = 0$ est un second **axe de symétrie** de \mathcal{C} (et donc le point O est un **centre de symétrie** de \mathcal{C}). Par conséquent, \mathcal{C} possède un second couple (foyer, directrice) (F', \mathcal{D}') , symétrique de (F, \mathcal{D}) par rapport à la droite D_0 . On dit alors que la droite Δ , qui contient les foyers, est l'**axe focal**.

D'autre part, les points $A_1, A_2 \in \Delta$ sont appelés des **sommets** de la conique; dans \mathcal{R}_0 ils ont pour abscisse :

$$\pm a, \quad \text{où} \quad a = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right| = \frac{p}{|1 - e^2|}.$$

Posons également $b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}$, d'où $b^2 = \frac{p^2}{|1 - e^2|} = \varepsilon \frac{p^2}{1 - e^2}$, où $\varepsilon = \text{signe de } 1 - e^2$.

Alors l'équation de \mathcal{C} se réécrit :

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \varepsilon \frac{Y^2}{b^2} = 1\}.$$

Distinguons maintenant les cas $0 < e < 1$ et $e > 1$.

17.5. Ellipses. — Supposons $0 < e < 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = 1$, l'équation de \mathcal{C} est :

$$(*) \quad \mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et \mathcal{C} est une **ellipse**. Dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, $K = \Delta \cap \mathcal{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1 + e) = -h/(e^{-1} + 1)$ donc est compris entre K et F , de plus $AF = e \cdot AK < AK$, donc A est plus près de F que de K . Le centre de symétrie O est d'abscisse $ep/(1 - e^2) > 0$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O . Ces points sont donc positionnés comme suit :

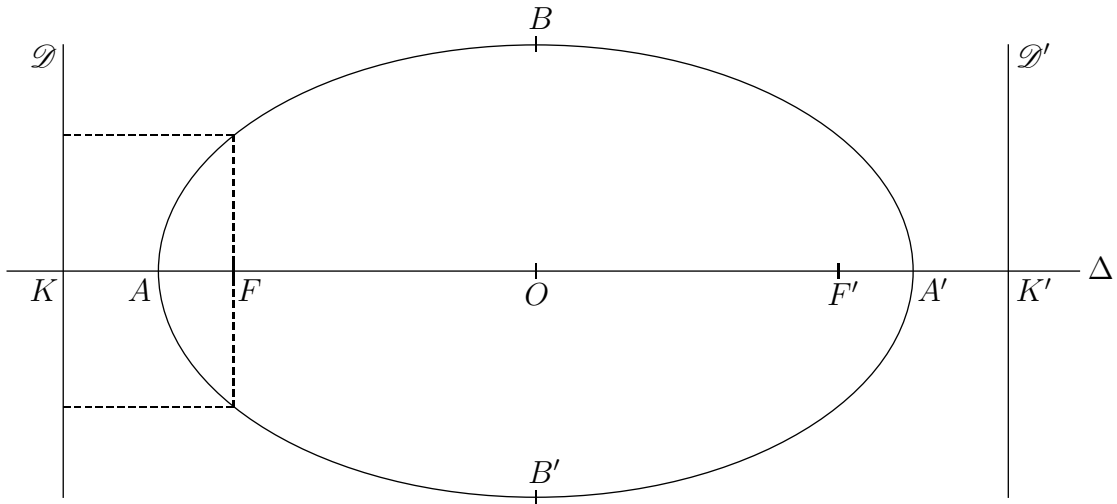
points	K	A	F	O	F'	A'	K'
abscisses dans \mathcal{R}	$-h$	$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$	0	$\frac{ep}{1 - e^2}$	\dots	\dots	\dots
abscisses dans \mathcal{R}_0	$-h - c$	$-a$	$-c$	0	c	a	$h + c$

où $a = \frac{p}{1 - e^2}$ et $c = \frac{ep}{1 - e^2} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$, on a $c^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2} = a^2 - b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad h = \frac{b^2}{c}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad KO = h + c = \frac{b^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}.$$

Par ailleurs, les points $B = (0, b)$ et $B' = (0, -b)$ sont aussi appelés des *sommets* de l'ellipse, et la droite $(BB') = (Oy)$ est appelée le *petit axe*.

Dans la figure qui suit, $a = 5$ et $b = 3$, de sorte que $c = 4$ et $e = 4/5$.



Dans l'équation (*) de l'ellipse, on peut faire $b = a$, on obtient alors le **cercle** de centre $F = O$ et de rayon a .

Remarque. — Remarquons que $b^2 = (1 - e^2)a^2$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea$, d'où $h = \frac{b^2}{c} = \frac{1 - e^2}{e} a$. Donc, en gardant F et a fixés, on obtient le cercle précédent en faisant tendre e vers 0, et dans ce cas la directrice \mathcal{D} , qui est la droite d'équation $x = -\frac{1 - e^2}{e} a$ dans le repère \mathcal{R} , « tend vers l'infini ». On verra plus bas que si on prend la définition « bifocale » de l'ellipse, alors le cas du cercle apparaît de façon naturelle, comme le cas où les deux foyers sont égaux.

17.6. Hyperboles. — Supposons enfin $e > 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = -1$, l'équation de \mathcal{C} est :

$$\mathcal{C} = \left\{ M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

et \mathcal{C} est une **hyperbole**. Elle admet pour asymptotes les droites $Y = \frac{b}{a}X$ et $Y = -\frac{b}{a}X$.

Dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, $K = \Delta \cap \mathcal{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1 + e) = -h/(e^{-1} + 1)$ donc est compris entre K et F , de plus $AF = e \cdot AK > AK$, donc ici A est plus près de K que de F .

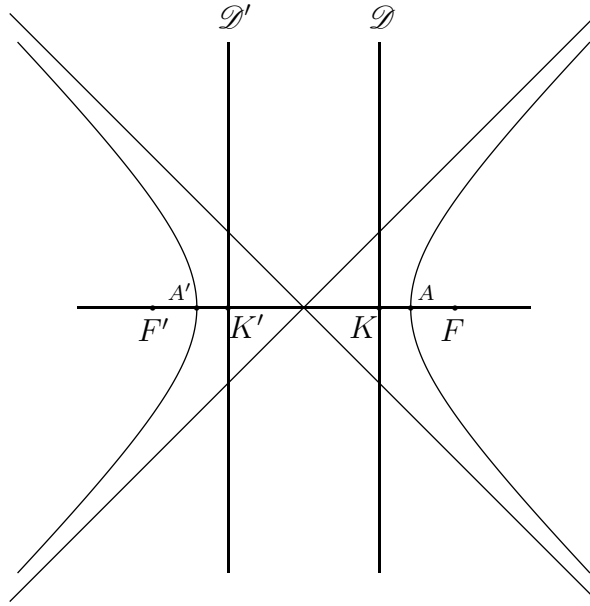
Le centre de symétrie O est d'abscisse $\frac{ep}{1 - e^2} = \frac{e^2 h}{1 - e^2} = -h - \frac{h}{e^2 - 1} < -h$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O . Ces points sont donc positionnés comme suit :

points	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">F'</td> <td style="padding: 0 10px;">A'</td> <td style="padding: 0 10px;">K'</td> <td style="padding: 0 10px;">O</td> <td style="padding: 0 10px;">K</td> <td style="padding: 0 10px;">A</td> <td style="padding: 0 10px;">F</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">abscisses dans \mathcal{R}</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{ep}{1 - e^2}$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-h$</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">abscisses dans \mathcal{R}_0</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$-c$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-a$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-(c - h)$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$c - h$</td> <td style="padding: 0 10px;">a</td> <td style="padding: 0 10px;">c</td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	F'	A'	K'	O	K	A	F	abscisses dans \mathcal{R}	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{ep}{1 - e^2}$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-h$</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">abscisses dans \mathcal{R}_0</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$-c$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-a$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-(c - h)$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$c - h$</td> <td style="padding: 0 10px;">a</td> <td style="padding: 0 10px;">c</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	\dots	\dots	\dots	$\frac{ep}{1 - e^2}$	$-h$	$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$	0	abscisses dans \mathcal{R}_0	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$-c$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-a$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-(c - h)$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$c - h$</td> <td style="padding: 0 10px;">a</td> <td style="padding: 0 10px;">c</td> </tr> </table>	$-c$	$-a$	$-(c - h)$	0	$c - h$	a	c
F'	A'	K'	O	K	A	F																				
abscisses dans \mathcal{R}	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">\dots</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{ep}{1 - e^2}$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-h$</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">abscisses dans \mathcal{R}_0</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$-c$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-a$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-(c - h)$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$c - h$</td> <td style="padding: 0 10px;">a</td> <td style="padding: 0 10px;">c</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	\dots	\dots	\dots	$\frac{ep}{1 - e^2}$	$-h$	$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$	0	abscisses dans \mathcal{R}_0	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$-c$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-a$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-(c - h)$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$c - h$</td> <td style="padding: 0 10px;">a</td> <td style="padding: 0 10px;">c</td> </tr> </table>	$-c$	$-a$	$-(c - h)$	0	$c - h$	a	c									
\dots	\dots	\dots	$\frac{ep}{1 - e^2}$	$-h$	$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$	0																				
abscisses dans \mathcal{R}_0	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$-c$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-a$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-(c - h)$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$c - h$</td> <td style="padding: 0 10px;">a</td> <td style="padding: 0 10px;">c</td> </tr> </table>	$-c$	$-a$	$-(c - h)$	0	$c - h$	a	c																		
$-c$	$-a$	$-(c - h)$	0	$c - h$	a	c																				

où $a = \frac{p}{e^2 - 1}$ et $c = \frac{ep}{e^2 - 1} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \frac{p^2}{e^2 - 1}$, on a $c^2 = \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2} = a^2 + b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad h = \frac{b^2}{c}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad OK = c - h = \frac{c^2 - b^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}.$$

Dans la figure suivante, on a pris $a = b = \sqrt{2}$:



17.7. Définition bifocale de l'ellipse ou de l'hyperbole. — Pour l'ellipse ou l'hyperbole, on peut donner une définition géométrique utilisant les deux foyers (et pas de directrice ni d'excentricité), comme indiqué dans ce qui suit.

Proposition 17.6 (Définition bifocale de l'ellipse). — Soient F, F' deux points de \mathcal{P} et O leur milieu. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} tel que $\overrightarrow{OF'} = c\vec{i}$ avec $c = \frac{1}{2}FF' \geq 0$ (et donc $\overrightarrow{OF} = -c\vec{i}$). Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a > c$ et $b^2 = a^2 - c^2$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid FM + F'M = 2a\}$$

est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si $F \neq F'$, et c'est le cercle de centre F et de rayon a si $F' = F$.

Démonstration. — Comme $2a > 0$, l'égalité $FM + F'M = 2a$ équivaut (en l'élevant au carré) à :

$$(0) \quad 2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)} = 4a^2$$

qui équivaut à :

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = -\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)}.$$

Ceci équivaut à :

$$(1) \quad x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et}$$

$$(2) \quad \underbrace{(x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2}_{\beta} = ((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2) = \underbrace{(x^2 + c^2 + y^2)^2}_{\alpha} - 4c^2x^2,$$

puis (2) équivaut à :

$$4c^2x^2 = \alpha - \beta = 2a^2 \cdot 2(x^2 + y^2 + c^2 - a^2)$$

qui équivaut à

$$(3) \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{soit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donc (0) équivaut à :

$$(\dagger) \quad x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mais $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2}$, donc si (3) est satisfaite, on a automatiquement $x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$. Par conséquent, (0) et (\dagger) sont équivalents à la seule condition $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ceci prouve la proposition. \square

Proposition 17.7 (Définition bifocale de l'hyperbole). — Soient (x, y) les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{P} , soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit \mathcal{C} l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ses foyers F et F' ont pour coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid |FM - F'M| = 2a\}$$

et, plus précisément, la branche de l'hyperbole la plus proche de F (resp. F') est formée des points M tels que $F'M - FM = 2a$ (resp. $= -2a$).

La démonstration est laissée comme exercice pour le lecteur.

17.8. Équations quadratiques dans un repère orthonormé. — Soit maintenant $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} . Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère, et étudions la nature géométrique de l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels fixés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. En d'autres termes, soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = axx' + b(xy' + yx') + cyy'$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Soit L la forme linéaire sur \mathbb{R}^2 définie par $L(\vec{u}) = 2d$ et $L(\vec{v}) = 2e$, d'où $L(x\vec{u} + y\vec{v}) = 2dx + 2ey$.

Enfin, soit $h : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(M) = Q(x, y) + L(x, y) + f$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$. On s'intéresse donc à l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid h(x, y) = 0\}.$$

Par hypothèse, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ i.e. la forme quadratique Q est non nulle, i.e. la matrice S est non nulle. Donc S est de rang 1 ou 2, selon que son déterminant $\delta = ac - b^2$ est nul ou non. On a le :

Théorème 17.8. — Soit $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} , soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Alors :

- (1) Si $\delta = 0$, \mathcal{C} est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).
- (2) Si $\delta = ac - b^2 > 0$, \mathcal{C} est une ellipse ou un point.
- (3) Si $\delta < 0$, \mathcal{C} est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.

Afin de démontrer ceci, rappelons les points suivants. Soit E muni de (\mid) un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E , ϕ sa forme polaire, $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi)$, et u l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, i.e. $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$ pour tout j . Alors, pour tout i, j on a :

$$(e_i \mid u(e_j)) = a_{ij} = \phi(e_i, e_j) = a_{ji} = (u(e_i) \mid e_j)$$

donc, par bilinéarité, on a

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).$$

Par conséquent, si l'on montre qu'il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour (\mid) et formée de vecteurs propres de u , i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, on aura pour tout i, j :

$$\phi(f_i, f_j) = \lambda_i (f_i \mid f_j) = \lambda_j (f_i \mid f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

donc \mathcal{B} sera aussi une base **orthogonale** pour ϕ . Donc, notant (x_1, \dots, x_n) les coordonnées dans \mathcal{B} d'un vecteur x arbitraire, la base \mathcal{B} **réduit simultanément** la forme $x \mapsto (x \mid x)$ à la forme standard $x_1^2 + \dots + x_n^2$, et la forme Q en la somme de carrés $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$; pour cette raison, le théorème ci-dessous est appelé « théorème de **réduction simultanée** ».

Théorème 17.9 (Réduction simultanée). — Soient E muni de (\mid) un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E , ϕ sa forme polaire, $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et u l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi) = A$.

Alors il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour (\mid) et formée de vecteurs propres de u , i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, et l'on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u ; plus précisément, la matrice de passage $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^t P = P^{-1}$, donc la matrice ci-dessus égale à la fois ${}^t P A P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $P^{-1} A P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Démonstration. — Pour la démonstration de 17.9 on renvoie à un cours de L2 ou L3. Démontrons maintenant le théorème 17.8. D'après le théorème 17.9, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ de \mathbb{R}^2 telle que, notant (X, Y) les coordonnées dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, on ait

$$Q(X, Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2, \quad \text{avec } \lambda\mu = \det S = ac - b^2 = \delta.$$

D'autre part, si l'on pose $2\rho = L(\vec{f}_1)$ et $2\sigma = L(\vec{f}_2)$, alors la forme linéaire L s'exprime, dans les coordonnées (X, Y) , par $L(X, Y) = 2\rho X + 2\sigma Y$ (on n'a pas besoin de calculer explicitement les coefficients ρ et σ). Donc, avec les coordonnées (X, Y) , on obtient que :

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + f = 0\}.$$

Distinguons maintenant les cas suivants.

(1) Si $0 = \delta = \lambda\mu$, on peut supposer, quitte à échanger X et Y (i.e. à remplacer (\vec{f}_1, \vec{f}_2) par (\vec{f}_2, \vec{f}_1)) que $\lambda = 0 \neq \mu$ (λ, μ ne sont pas tous deux nuls, puisque la matrice S n'est pas nulle). Dans ce cas, on obtient l'équation

$$\mu \left(Y + \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 = -2\rho X - f + \frac{\sigma^2}{\mu}, \quad \text{soit} \quad \left(Y + \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 = -2\frac{\rho}{\mu} X - \frac{f\mu - \sigma^2}{\mu}.$$

Si $\rho = 0$, on obtient \emptyset si $K = -\frac{f\mu - \sigma^2}{\mu}$ est < 0 , et si $K \geq 0$ on obtient les droites parallèles d'équations

$$Y = -\frac{\sigma}{\mu} \pm \sqrt{K},$$

celles-ci étant confondues (i.e. égales) si $K = 0$. Si $\rho \neq 0$, on obtient l'équation

$$\left(Y + \frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = -2\frac{\rho}{\mu}\left(X + \frac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}\right).$$

Soit alors Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}, -\frac{\sigma}{\mu}\right)$. Notons (\tilde{X}, \tilde{Y}) les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ et $p = -\frac{\rho}{\mu}$, alors

$$\mathcal{C} = \{M(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid \tilde{Y}^2 = 2p\tilde{X}\}$$

est une parabole d'axe $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\vec{f}_1$, de sommet Ω et de paramètre p .

Supposons $\delta = \lambda\mu \neq 0$. Alors l'équation de \mathcal{C} est :

$$\lambda\left(X + \frac{\rho}{\lambda}\right)^2 + \mu\left(Y + \frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{\rho}{\lambda}, -\frac{\sigma}{\mu}\right)$. Notant (\tilde{X}, \tilde{Y}) les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$, on obtient l'équation

$$\lambda\tilde{X}^2 + \mu\tilde{Y}^2 = K = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

(2) Si $\delta = \lambda\mu > 0$, alors λ et μ sont du même signe. Si K est du signe opposé, alors $\mathcal{C} = \emptyset$, tandis que $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ si $K = 0$. Enfin, si K est du même signe que λ et μ , alors K/λ et K/μ sont tous deux > 0 ; quitte à échanger \tilde{X} et \tilde{Y} , on peut supposer que $a^2 = K/\lambda > K/\mu = b^2$, alors

$$\mathcal{C} = \{M(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid \frac{\tilde{X}^2}{a^2} + \frac{\tilde{Y}^2}{b^2} = 1\}$$

est une ellipse, d'axe focal la droite $\Omega\tilde{X}$.

(3) Si $\delta = \lambda\mu < 0$, alors λ et μ sont de signe opposé. Posons $-\lambda/\mu = t^2$. Si $K = 0$, \mathcal{C} est la réunion des droites $\tilde{Y} = t\tilde{X}$ et $\tilde{Y} = -t\tilde{X}$. Enfin, si $K \neq 0$, alors

$$\mathcal{C} = \{M(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid \frac{\tilde{X}^2}{K/\lambda} + \frac{\tilde{Y}^2}{K/\mu} = 1\}$$

est une hyperbole, d'asymptotes les droites précédentes, et d'axe focal $\Omega\tilde{X}$ si $K/\lambda > 0 > K/\mu$ (et d'axe focal $\Omega\tilde{Y}$ si $K/\lambda < 0 < K/\mu$). Ceci achève la démonstration du théorème 17.8. \square

On peut énoncer le théorème 17.8 sous une forme un peu plus générale, de la façon suivante. Soit $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}', \vec{v}')$ un repère arbitraire de \mathcal{P} , i.e. les vecteurs \vec{u}', \vec{v}' ne sont pas nécessairement unitaires ni orthogonaux. Notons (x', y') les coordonnées dans ce repère, soient $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathcal{C} = \{M(x', y') \mid a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0\}.$$

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ est :

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}\right) = a'x'_1x'_2 + b'(x'_1y'_2 + y'_1x'_2) + c'y'_1y'_2$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. Soient $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée, P la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}_0)$, et (x, y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{B}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$. La matrice de ϕ dans \mathcal{B}_0 est :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = {}^t P A' P,$$

donc $ac - b^2 = \det A = (\det P)^2 \cdot \det A' = (\det P)^2 \cdot (a'c' - b'^2)$ a même signe que $a'c' - b'^2$. Par conséquent, on déduit du théorème 17.8 le :

Corollaire 17.10. — Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère arbitraire de \mathcal{P} , soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Alors :

- (1) Si $\delta = 0$, \mathcal{C} est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).
- (2) Si $\delta = ac - b^2 > 0$, \mathcal{C} est une ellipse ou un point.
- (3) Si $\delta < 0$, \mathcal{C} est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.

17.9. Retour au théorème de Dandelin. — On avait terminé notre étude de la section \mathcal{C} d'un cône de révolution \mathcal{R} d'axe Δ par un plan Π ne contenant pas Δ et non orthogonal à celui-ci, par la conclusion que :

$$\mathcal{C} = \{M \in \Pi \mid MF = e \cdot d(M, \mathbf{D})\}$$

où, ayant fixé une sphère Σ inscrite dans \mathcal{R} et tangente à Π (il y a au plus deux telles sphères), F est le point de contact de Σ avec Π , \mathbf{D} est la droite intersection de Π avec le plan contenant le cercle de tangence entre \mathcal{R} et Σ , et $e = \sin(\alpha)/\cos(\theta)$ où θ est le demi-angle au sommet du cône et α est l'angle entre Π et un plan orthogonal à Δ (il ne dépend donc pas de la sphère Σ choisie).

D'après ce qui précède, \mathcal{C} est donc une conique de Π de foyer F , directrice \mathbf{D} et excentricité e . De plus, on a vu que si \mathcal{C} est une ellipse ou une hyperbole, il y a deux sphères tangentes ; pour la seconde sphère Σ' on obtient ainsi le deuxième couple (foyer, directrice) = (F', \mathbf{D}') . Quant à l'excentricité, c'est la même, comme remarqué plus haut. On a donc obtenu le :

Théorème 17.11 (de Dandelin). — ⁽⁸⁾ Dans l'espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3, soit \mathcal{R} un cône de révolution d'axe Δ et de demi-angle au sommet θ et soit Π un plan ne contenant pas Δ et faisant un angle $\alpha \neq 0$ avec tout plan orthogonal à Δ . Notons \mathcal{C} la conique $\mathcal{R} \cap \Pi$ et posons $\bar{\theta} = (\pi/2) - \theta$.

(i) Si $\alpha = \bar{\theta}$, il existe une unique sphère Σ inscrite dans \mathcal{R} et tangente à Π ; sinon il existe deux telles sphères Σ et Σ' . Notons F le point de contact de Σ avec Π , Γ son cercle de tangence avec \mathcal{R} et \mathbf{D} la droite intersection de Π avec le plan contenant Γ , et définissons de même F' et \mathbf{D}' si Σ' existe.

(ii) \mathcal{C} est la conique de Π de foyer F , de directrice \mathbf{D} et d'excentricité $e = \sin(\alpha)/\cos(\theta)$.

(iii) \mathcal{C} est une parabole ssi $\alpha = \bar{\theta}$.

(iv) \mathcal{C} est une ellipse (resp. une hyperbole) ssi $\alpha < \bar{\theta}$ (resp. $\alpha > \bar{\theta}$). Dans ces deux cas, les deux sphères Σ et Σ' fournissent les deux couples (foyer, directrice) de \mathcal{C} .

⁽⁸⁾Germinal Dandelin, mathématicien français (1794-1847), qui fit carrière en Belgique.