

Chapitre 1 : Systèmes de racines et données radicielles

Références pour ce chapitre :

[Bou] Nicolas Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. 4–6.

[Dem] Michel Demazure, A, B, C, D, E, F, etc., *in* : Séminaire sur les singularités des surfaces (Éc. Polytechnique, 1976-77), exp. n°13 (disponible sur Numdam).

[Hum] James E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory (3rd printing), Springer-Verlag, 1980. (chap. III)

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. III, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 8, Soc. Math. France, 2011. (Exp. XXI)

1. Préliminaires

Soient K un corps de caractéristique nulle et V un K -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.1 (Réflexions). — Soit $\alpha \in V - \{0\}$; une *réflexion de vecteur* α est un endomorphisme s de V tel que :

(1) $s(\alpha) = -\alpha$.

(2) L'ensemble des vecteurs invariants par s est un hyperplan H .

Ces conditions entraînent $\alpha \notin H$ et donc $V = H \oplus K\alpha$. On en déduit que $s^2 = 1$ et donc s est un *automorphisme* de V . On en déduit aussi que s induit l'identité sur $V/K\alpha$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le couplage entre V^* et V , i.e. pour tout $f \in V^*$ et $x \in V$ on pose $\langle f, x \rangle = f(x)$. Soit alors $\alpha^\vee \in V^*$ l'unique forme linéaire s'annulant sur H et telle que $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. Alors, pour tout $x \in V$, on a

$$(*) \quad \boxed{s(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha.}$$

En effet, écrivant $x = h + t\alpha$, avec $h \in H$ et $t \in K$, on a $\langle \alpha^\vee, x \rangle = 2t$ et donc $s(x) = h - t\alpha = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha$. On désigne alors s par s_{α, α^\vee} .

Définition 1.2 (Réflexion duale). — Soit ${}^t s$ la transposée de s , i.e. l'application $V^* \rightarrow V^*$, $y \mapsto y \circ s$. Pour $y \in V^*$ et $x \in V$, on a :

$$\langle {}^t s(y), x \rangle = \langle y, s(x) \rangle = \langle y, x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha \rangle = \langle y - \langle y, \alpha \rangle \alpha^\vee, x \rangle.$$

Par conséquent, on a

$$({}^t *) \quad \boxed{{}^t s(y) = y - \langle y, \alpha \rangle \alpha^\vee.}$$

Ceci montre que ${}^t s$ est une réflexion de V^* de vecteur α^\vee , et l'on a $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$. On désignera ${}^t s$ par $s_{\alpha^\vee, \alpha}$.

Lemme 1.3. — Soient $\alpha \in V - \{0\}$, R une partie finie engendrant V . Alors il existe au plus une réflexion de vecteur α qui laisse R stable.

Démonstration. — Soient s, s' deux telles réflexions et soit $u = ss'$. Alors $u(R) = R$, $u(\alpha) = \alpha$, et u induit l'identité sur $V/K\alpha$. Comme R est fini et engendre V , la 1ère condition entraîne qu'il existe $N > 0$ tel que $u^N = \text{id}$. D'autre part, d'après la 3ème condition, $\text{Im}(u - \text{id}) = K\alpha$ donc il existe une forme linéaire f telle que $u(x) = x + f(x)\alpha$ pour tout $x \in V$. Comme $u(\alpha) = \alpha$, on a $f(\alpha) = 0$. Par récurrence sur r , on en déduit que $u^r(x) = x + rf(x)\alpha$. Prenant $r = N$, on obtient $Nf(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$ pour tout x , d'où $u = \text{id}$. Donc $s' = s^{-1} = s$. \square

Désormais, on suppose que $K = \mathbb{R}$. On emploiera l'expression *produit scalaire* comme synonyme de « forme bilinéaire symétrique définie positive ».

Définition 1.4 (Réflexions orthogonales). — Supposons V muni d'un produit scalaire et, pour toute partie non vide X de V , posons $X^\perp = \{y \in V \mid \forall x \in X, (y, x) = 0\}$.

Pour tout $\alpha \in V - \{0\}$, la *réflexion orthogonale* s_α est définie par $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et $s_\alpha(x) = x$ pour x appartenant à l'hyperplan $H_\alpha = (\mathbb{R}\alpha)^\perp$. Alors, pour tout $v \in V$ on a

$$(\dagger) \quad s_\alpha(v) = v - 2 \frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Réciproquement, si s est une réflexion de vecteur α qui est une transformation orthogonale, alors l'hyperplan $H_\alpha = (\mathbb{R}\alpha)^\perp$ est s -stable et s'identifie à $V/\mathbb{R}\alpha$, donc s y agit par l'identité. Par conséquent s est la réflexion orthogonale s_α . On pourra donc parler de réflexions orthogonales sans ambiguïté.

2. Systèmes de racines

2.1. Premières définitions. —

Définition 2.1. — Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et R une partie de V . On dit que R est un *système de racines* dans V si les conditions suivantes sont satisfaites :

(SR1) R est fini, engendre V , et ne contient pas 0.

(SR2) Pour tout $\alpha \in R$, il existe une réflexion s_α de vecteur α laissant stable R . (D'après le lemme précédent, cette réflexion est unique). Soit α^\vee l'unique forme linéaire telle que $s_\alpha(v) = v - \langle \alpha^\vee, v \rangle \alpha$, pour tout $v \in V$.

(SR3) Pour tout $\alpha, \beta \in R$, $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

La dimension n de V est appelée le *rang* de R . Pour $\alpha \in R$, l'élément α^\vee s'appelle la *coracine* de α . On pose $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$.

Le système de racines R est dit *réduit* s'il vérifie en outre la condition suivante :

(SR4) Pour tout $\alpha \in R$, α et $-\alpha$ sont les seules racines proportionnelles à α .

Remarques 2.2. — (i) Notons que (SR2) entraîne que $R = -R$; en effet si $\alpha \in R$ alors $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$.

(ii) Si R n'est pas réduit il contient deux racines proportionnelles α et $t\alpha$ avec $0 < t < 1$. Appliquant (SR3) à $\beta = t\alpha$ on obtient $2t \in \mathbb{Z}$, d'où $t = 1/2$. Par conséquent les seules racines proportionnelles à α sont $\pm\alpha$ et $\pm\alpha/2$.

Lemme 2.3. — Soit X une partie non vide de R et soit V_X le sous-espace de V engendré par X . Alors $R \cap V_X$ est un système de racines dans V_X (réduit si R l'est).

Démonstration. — $R \cap V_X$ engendre V_X car il contient X . Il est alors clair que (SR1), (SR3), et (SR4) si R est réduit, sont vérifiés. Prouvons (SR2).

Soit $\alpha \in R \cap V_X$. Si $v \in V_X$, alors $s_\alpha(v) = v - \langle \alpha^\vee, v \rangle \alpha$ appartient encore à V_X . Ceci montre que V_X est stable par s_α , et comme R l'est aussi, il en est de même de $R \cap V_X$. \square

En particulier, soit R un système de racines de rang ≥ 2 et soit $\alpha, \beta \in R$ non proportionnelles. Alors α et β appartiennent à un sous-système de racines de rang 2. On va voir plus bas qu'on peut facilement classifier les systèmes de racines de rang 2.

Définition 2.4 (Isomorphismes). — Si R' est un système de racines dans un espace V' , on dit que R et R' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ appliquant R sur R' .

Notation 2.5. — Il est clair qu'à isomorphisme près il n'existe qu'un seul système de racines de rang 1 réduit (resp. non réduit), formé d'un vecteur $\alpha \neq 0$ et de son opposé $-\alpha$ (resp. des vecteurs $\pm\alpha$ et $\pm 2\alpha$); on dit qu'il est de type A_1 (resp. BC_1).

Définition 2.6 (Groupe de Weyl). — Soit $A(R)$ le groupe des automorphismes de R , i.e.

$$A(R) = \{g \in \text{GL}(V) \mid g(R) = R\}.$$

Comme R engendre V , alors $A(R)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe des permutations de R ; c'est donc un groupe *fini*. D'après l'axiome (SR2), on a $s_\alpha \in A(R)$ pour tout $\alpha \in R$.

On appelle *groupe de Weyl* de R et on note $W(R)$ ou simplement W , le sous-groupe de $A(R)$ engendré par les réflexions s_α , pour $\alpha \in R$.

Exemple. — Le groupe de Weyl de type A_1 ou BC_1 est $\{\pm \text{id}\}$.

Rappelons que $\text{GL}(V)$ agit sur V^* par la représentation « duale »⁽¹⁾ $g \mapsto {}^t g^{-1}$, c.-à-d. $\langle g\varphi, v \rangle = \langle \varphi, g^{-1}v \rangle$, pour $g \in \text{GL}(V)$, $\varphi \in V^*$, $v \in V$. Donc $A(R)$ et W agissent sur V^* .

Lemme 2.7. — Soient $\sigma \in A(R)$ et $\alpha \in R$. On a $\sigma s_\alpha \sigma^{-1} = s_{\sigma(\alpha)}$ et $\sigma(\alpha^\vee) = \sigma(\alpha)^\vee$. Par conséquent, $A(R)$ laisse R^\vee stable.

Démonstration. — Soit $s = \sigma s_\alpha \sigma^{-1}$. C'est une réflexion de vecteur $\sigma(\alpha)$, qui préserve R . Le lemme 1.3 implique donc que $s = s_{\sigma(\alpha)}$. D'autre part, pour tout $x \in V$ on a, par définition,

$$s(x) = x - \langle \alpha^\vee, \sigma^{-1}(x) \rangle \sigma(\alpha) = x - \langle \sigma(\alpha^\vee), x \rangle \sigma(\alpha),$$

et comme $s = s_{\sigma(\alpha)}$ ceci égale

$$s_{\sigma(\alpha)}(x) = x - \langle \sigma(\alpha)^\vee, x \rangle \sigma(\alpha).$$

Il en résulte que $\sigma(\alpha^\vee) = \sigma(\alpha)^\vee$. □

Corollaire 2.8. — $W(R)$ est un sous-groupe distingué de $A(R)$.

Définition 2.9 (Produits scalaires invariants). — Si G est un groupe d'automorphismes de V , on dit qu'un produit scalaire (\mid) sur V est invariant par G (ou G -invariant) s'il vérifie : $(gx \mid gy) = (x \mid y)$, pour tout $x, y \in V$, $g \in G$.

Lemme 2.10. — Soit R un système de racines dans V . Il existe des produits scalaires sur V invariants par $A(R)$ et donc, a fortiori, par $W(R)$.

Démonstration. — Soit $B(\ , \)$ un produit scalaire quelconque sur V . Alors la forme bilinéaire (\mid) sur V définie par $(x \mid y) = |A(R)|^{-1} \sum_{\sigma \in A(R)} B(\sigma(x), \sigma(y))$ est symétrique, définie positive, et $A(R)$ -invariante. □

Fixons un tel produit scalaire $A(R)$ -invariant (\mid) . Ceci munit V d'une structure euclidienne pour laquelle chaque élément de $A(R)$ est une transformation orthogonale. En particulier, pour tout $\alpha \in R$, s_α est la réflexion orthogonale de vecteur α (voir 1.4). Par ailleurs, pour $\alpha \in R$, soit α' l'élément de V correspondant à α^\vee par l'isomorphisme $V \xleftarrow{\sim} V^*$ (i.e. $(\alpha' \mid x) = \langle \alpha^\vee, x \rangle$, pour tout $x \in V$). Alors, pour tout $x \in V$ on a $s_\alpha(x) = x - (\alpha' \mid x)\alpha$. Comparant avec 1.4 (†), on obtient :

$$(*) \quad \alpha' = 2 \frac{\alpha}{(\alpha \mid \alpha)}.$$

⁽¹⁾On dit aussi « contragrédiente ».

Corollaire 2.11. — R^\vee est un système de racines dans V^* et pour tout $\alpha \in R$ on a $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$. Par conséquent, l'application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ est bijective. On dit que R^\vee est le système de racines dual de R ; il est réduit ssi R l'est.

Démonstration. — R^\vee est fini, ne contient pas 0, et engendre V^* d'après (\star) . Pour tout $\alpha \in R$, ${}^t s_\alpha$ stabilise R^\vee , d'après le lemme 2.7, et, d'après 1.2, c'est une réflexion de vecteur α^\vee et l'on a $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$. Il est alors clair que R^\vee vérifie (SR3) donc est un système de racines. Enfin, on voit facilement que R est réduit ssi R^\vee l'est. \square

Désormais, on suppose V muni d'un produit scalaire $A(R)$ -invariant $(|)$ et pour tout $v \in V$ on pose $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$. D'après (\star) , pour tout $\alpha, \beta \in R$ on a

$$\|\alpha\|^2 \langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 2(\alpha | \beta) = \|\beta\|^2 \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$$

et donc

$$\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 0 \iff (\alpha | \beta) = 0 \iff \langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 0.$$

Définition 2.12. — On dit que le système de racines R est *réductible* s'il existe une partition $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ avec $n \geq 2$ et les R_i non vides et deux-à-deux orthogonaux.

Dans ce cas, soit V_i le sous-espace de V engendré par R_i . Alors $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_n$ et, d'après 2.3, chaque R_i est un système de racines dans V_i . De plus, si $\alpha \in R_i$ et $\beta \in R_j$ avec $j \neq i$, alors $(\alpha | \beta) = 0$ et donc $s_\alpha(\beta) = \beta$.

On dit alors que R est la « somme directe » des R_i et l'on écrit $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$. Alors le rang de R est la somme des rangs des R_i . De plus, d'après ce qui précède, chaque s_α avec $\alpha \in R_i$ agit trivialement sur V_j pour $j \neq i$ et l'on en déduit que le groupe de Weyl $W(R)$ s'identifie au produit direct :

$$W(R_1) \times \dots \times W(R_n) \subset \prod_{i=1}^n \text{GL}(V_i) \subset \text{GL}(V).$$

On dit que R est *irréductible* s'il n'est pas réductible.

Proposition 2.13. — (i) Tout système de racines R se décompose en une somme directe de systèmes irréductibles : $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$.

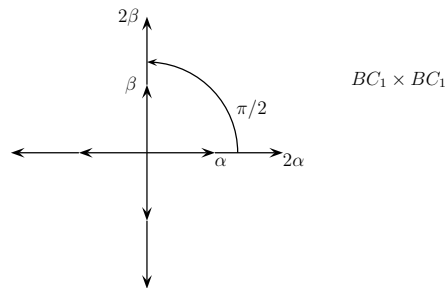
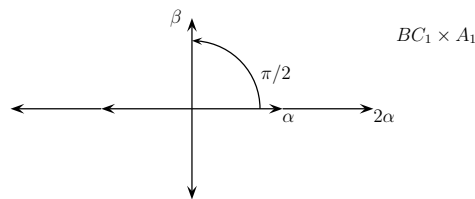
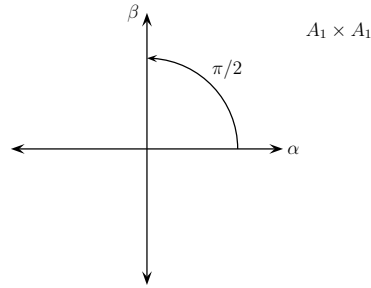
(ii) De plus, cette décomposition est unique, à la numérotation près des R_i .

Démonstration. — (i) Considérons sur R la relation d'équivalence engendrée par la relation $\alpha \sim \beta \iff (\alpha | \beta) \neq 0$ et soient R_1, \dots, R_n les classes d'équivalence et V_i le sous-espace engendré par R_i . D'après ce qui précède, chaque R_i est un système de racines dans V_i et R est la somme directe des R_i . De plus, chaque R_i est irréductible; prouvons-le pour R_1 .

Supposons que $R_1 = A \cup B$ avec A, B non vides et orthogonaux, et soient $\alpha \in A$ et $\beta \in B$. Par définition de la relation d'équivalence, il existe $\gamma_0, \dots, \gamma_r \in R_1$ tels que $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_r = \beta$ et $(\gamma_i | \gamma_{i+1}) \neq 0$ pour $0 \leq i < r$. Soit alors p le plus grand indice tel que $\gamma_p \in A$; comme $\gamma_r \notin A$ on a $p < r$ et donc $\gamma_{p+1} \in B$ et alors $(\gamma_p | \gamma_{p+1}) \neq 0$ contredit l'orthogonalité de A et B .

(ii) Supposons que R soit aussi la somme directe de sous-systèmes de racines irréductibles R'_1, \dots, R'_p . Comme les R'_i sont deux-à-deux orthogonaux, alors chaque R_i est contenu dans un unique R'_j . De plus, comme R'_j est irréductible, il ne peut contenir deux R_i différents. On en déduit que $p = n$ et qu'il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $R'_i = R_{\sigma(i)}$ pour tout i . \square

2.2. Systèmes de racines de rang 2. — Soit R un système de racines de rang 2. Si R est réductible, alors $R = R_1 \cup R_2$ avec R_1, R_2 de rang 1, donc de type A_1 ou BC_1 , et donc R est de type $A_1 \times A_1$, $BC_1 \times A_1$ ou $BC_1 \times BC_1$, cf. les figures suivantes. Dans ces trois cas, le groupe de Weyl est $\{\pm 1\}^2$.



Supposons maintenant R **irréductible** et soient $\alpha, \gamma \in R$ non proportionnelles et non orthogonales. Quitte à échanger α et γ , on peut supposer $\|\alpha\| \leq \|\gamma\|$.

Notons θ l'angle (non orienté) des vecteurs α et γ . Quitte à changer γ en $-\gamma$, on peut supposer que $\theta \in]0, \pi/2[$. Alors, comme

$$4 \frac{(\gamma, \alpha)^2}{(\gamma, \gamma)(\alpha, \alpha)} = 4 \cos^2 \theta$$

les entiers

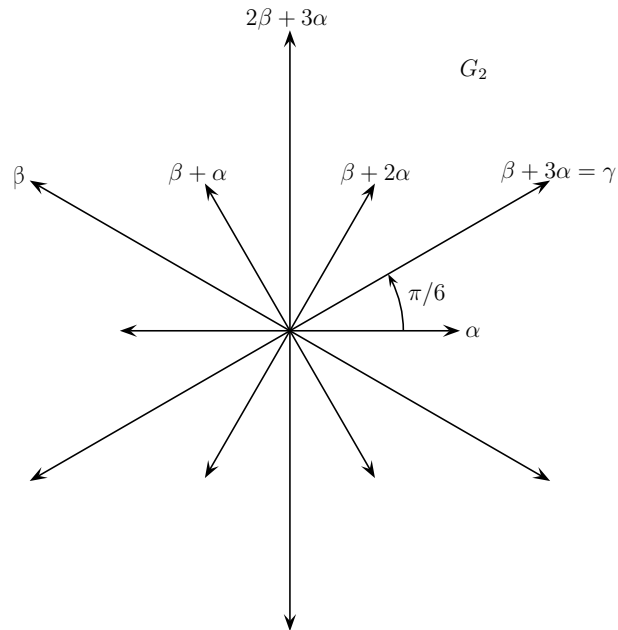
$$\langle \gamma^\vee, \alpha \rangle = \frac{2(\gamma | \alpha)}{\|\gamma\|^2} \quad \text{et} \quad \langle \alpha^\vee, \gamma \rangle = \frac{2(\gamma | \alpha)}{\|\alpha\|^2} = \frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2} \langle \gamma^\vee, \alpha \rangle$$

sont > 0 et leur produit $P = 4 \cos^2 \theta$ vaut 1, 2 ou 3. Comme on a supposé $\|\alpha\| \leq \|\gamma\|$, alors nécessairement $\langle \gamma^\vee, \alpha \rangle = 1$ et $\langle \alpha^\vee, \gamma \rangle = P$, d'où $\|\gamma\| = 2 \cos(\theta) \|\alpha\|$. Ceci donne les possibilités suivantes :

$\cos \theta$	θ	$\ \gamma\ /\ \alpha\ $
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$1/2$	$\pi/3$	1

Dans chaque cas, la composée $s_\gamma s_\alpha$ est une rotation d'angle $\pm 2\theta$.

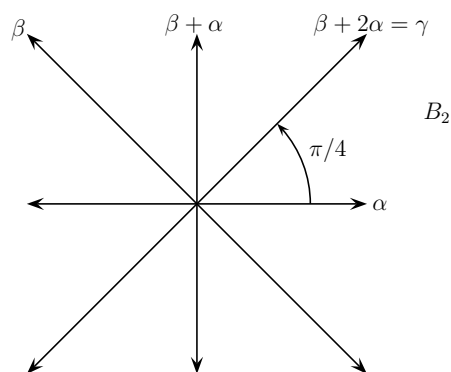
Supposons d'abord R **réduit**. Dans le cas de la première ligne du tableau, on obtient en utilisant (SR2) que R contient le sous-ensemble suivant :



On vérifie que ceci forme un système de racines, formé de six racines courtes et six racines longues. On dit qu'il est de type G_2 . Pour des raisons d'angles on ne peut pas rajouter d'autres racines.

Le groupe de Weyl est engendré par s_α et s_γ ; c'est le groupe diédral de cardinal 12, qui est le groupe des isométries de l'hexagone convexe régulier formé par les racines longues (ou courtes).

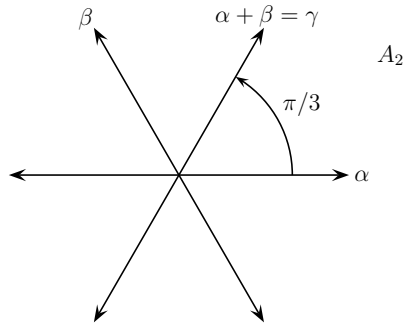
Dans le cas de la seconde ligne du tableau, on obtient en utilisant (SR2) que R contient le sous-ensemble suivant :



On vérifie que ceci forme un système de racines, formé de quatre racines courtes et quatre racines longues. On dit qu'il est de type B_2 ou C_2 . Pour des raisons d'angles on ne peut pas rajouter d'autres racines.

Le groupe de Weyl est engendré par s_α et s_γ ; c'est le groupe diédral de cardinal 8, qui est le groupe des isométries du carré dont les sommets sont les racines longues (ou courtes).

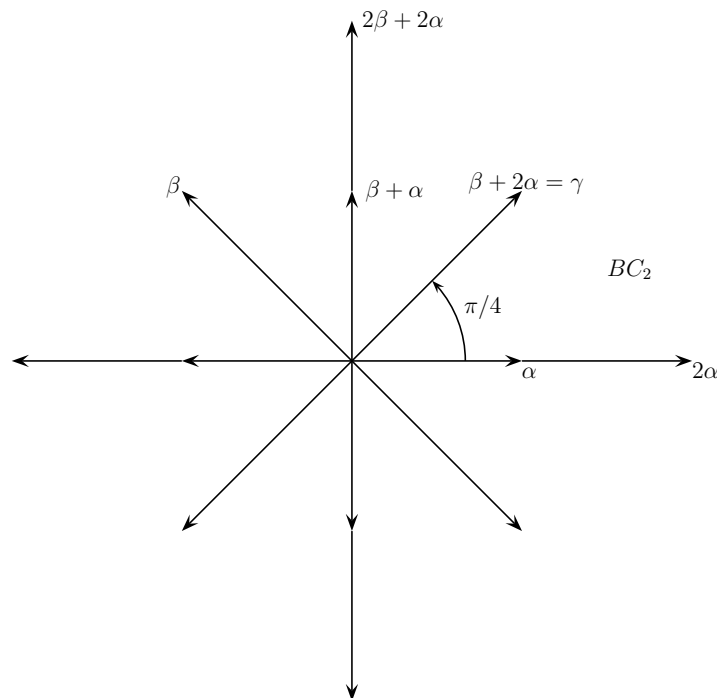
Dans le cas de la troisième ligne du tableau, on obtient en utilisant (SR2) que R contient le sous-ensemble suivant :



On vérifie que ceci forme un système de racines, formé de six racines de même longueur. On dit qu'il est de type A_2 . Sous l'hypothèse qu'il n'existe pas de racines formant un angle de $\pi/6$ (ce qui nous ramènerait au premier cas), on voit qu'on ne peut pas rajouter d'autres racines.

Le groupe de Weyl est engendré par s_α et s_γ ; c'est le groupe diédral de cardinal 6, qui est le groupe symétrique S_3 . C'est le sous-groupe de $W(G_2)$ formé des isométries qui préservent le triangle équilatéral dont les sommets sont les racines $\beta, \beta + 3\alpha$ et $-2\beta - 3\alpha$ de G_2 (et aussi le triangle équilatéral dont les sommets sont les opposés des précédents).

Enfin, supposons R **non réduit**. Alors il existe $\delta \in R$ telle que $2\delta \in R$. Comme R est irréductible, il existe $\gamma \in R$ non proportionnelle et non orthogonale à δ . Posons $t = \|\gamma\|/\|\delta\|$. On a $t \geq 1$ (car sinon $\|2\delta\|/\|\gamma\| = 2/r$ serait > 2) et il résulte alors du tableau précédent que t et $2/t$ appartiennent à $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, d'où $t = \sqrt{2}$. On en déduit qu'on peut prendre $\alpha = \delta$, et en utilisant (SR2) on obtient que R contient le sous-ensemble suivant :



On vérifie que ceci forme un système de racines non réduit. On dit qu'il est de type BC_2 . Pour des raisons de rapports de longueurs, 2γ et $\gamma/2$ ne peuvent être des racines, et pour des raisons d'angles on ne peut pas rajouter d'autres racines.

Le groupe de Weyl est le même que $W(B_2)$, et c'est le groupe des isométries des carrés dont les sommets sont quatre racines de même longueur.

Ceci achève la description des systèmes de racines de rang 2.

Corollaire 2.14. — Soient R un système de racines et $\alpha, \beta \in R$ non proportionnelles telles que $(\alpha | \beta) > 0$. Alors $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ sont des racines.

Démonstration. — Posant $X = \{\alpha, \beta\}$, α et β appartiennent au système de racines $R \cap V_X$, qui est de rang 2. D'après la discussion précédente, les entiers $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle$ et $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle$ sont > 0 et leur produit vaut 1, 2 ou 3. Quitte à échanger α et β , on peut donc supposer que $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 1$. Alors $s_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \beta^\vee, \alpha \rangle \beta = \alpha - \beta$ est une racine, de même que son opposé $\beta - \alpha$. \square

Par inspection des systèmes de rang deux, on obtient aussi la :

Proposition 2.15. — Soient $\alpha, \beta \in R$ non proportionnelles et $I = \{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in R\}$. Alors :

- (i) I est un intervalle $[-q, p]$ avec $p, q \geq 0$ et l'on a $s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha$.
- (ii) Par conséquent, on a $(\beta + p\alpha, \alpha^\vee) = p + q = -(\beta - q\alpha, \alpha^\vee)$. En particulier, si $q = 0 < p$, alors $(\beta, \alpha^\vee) = -p < 0$.
- (iii) $S = \{\beta + i\alpha \mid i \in I\}$ est appelée la α -chaîne définie par β .

2.3. Bases de R et chambres de Weyl. —

Définition 2.16. — Soit R un système de racines dans V . Une partie Δ de R est appelée une **base de R** si :

- (1) Δ est une base de l'espace vectoriel V .
- (2) Tout $\beta \in R$ s'écrit comme combinaison linéaire $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$, où les m_α sont des entiers de même signe (c.-à-d., tous ≥ 0 ou bien tous ≤ 0).

Dans ce cas, on appelle racines *positives* (resp. *négatives*) celles pour lesquelles les m_α sont ≥ 0 (resp. ≤ 0), et l'on dit que Δ est l'ensemble des racines *simples*.

Exemples. — On renvoie aux figures données pour les systèmes de rang 2 : dans chaque cas les racines nommées α et β forment une base de R .

On va montrer que tout hyperplan \mathcal{H} de V ne rencontrant pas R détermine une base de R , et que toute base est obtenue de cette façon. En fait, \mathcal{H} détermine deux demi-espaces \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- , chacun contient une base de R , disons Δ^+ et Δ^- , et l'on a $\Delta^- = -\Delta^+$. Pour spécifier le demi-espace « positif » \mathcal{H}^+ , on choisit l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à \mathcal{H} . Ceci conduit à la définition suivante.⁽²⁾

Définition 2.17. — Tout élément y de V définit une partition⁽³⁾

$$R = R^+(y) \sqcup R^0(y) \sqcup R^-(y),$$

où $R^+(y)$, resp. $R^0(y)$, resp. $R^-(y)$ est l'ensemble des $\alpha \in R$ tels que $(y, \alpha) > 0$, resp. $= 0$, resp. < 0 . On dit que y est **régulier** si $R^0(y) = \emptyset$, et on note $V_{\text{rég}}$ l'ensemble de ces éléments. Il est stable par $A(R)$ donc par $W(R)$.

Définition 2.18. — On appelle **chambres de Weyl** les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence \sim définie sur $V_{\text{rég}}$ par $y \sim y'$ si $R^+(y) = R^+(y')$. Ce sont les composantes connexes de $V - \bigcup_{\alpha \in R} \mathcal{H}_\alpha$, où \mathcal{H}_α désigne l'hyperplan orthogonal à α .

Pour $y \in V_{\text{rég}}$, la chambre contenant y sera notée $C(y)$. C'est l'intersection, pour $\alpha \in R^+(y)$, des demi-espaces ouverts $\mathcal{H}_\alpha^+ = \{z \in V \mid (z, \alpha) > 0\}$, donc c'est un cône convexe ouvert.

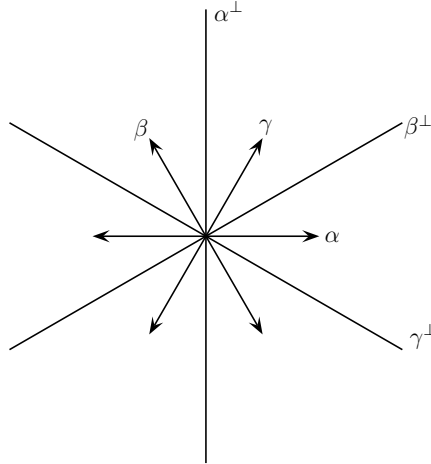
Notation. — Si C est une chambre de Weyl, on note $R^+(C) = R^+(y)$ pour tout $y \in C$. L'adhérence de C est $\overline{C} = \{x \in V \mid \forall \alpha \in R^+(C), (x, \alpha) \geq 0\}$.

⁽²⁾Dans la suite, le produit scalaire est noté (x, y) au lieu de $(x | y)$.

⁽³⁾Le symbole \sqcup désigne une réunion disjointe.

Exemples 2.19. — En type B_2 et G_2 , la droite orthogonale à une racine est engendrée par une racine, et les chambres de Weyl sont délimitées par deux racines consécutives. Il y en a 8 pour B_2 et 12 pour G_2 .

Pour R de type A_2 , il y a 6 chambres de Weyl, délimitées par les droites orthogonales à α, β et γ :



Définition 2.20. — Pour $y \in V_{\text{rég}}$, on note $\Delta(y)$ l'ensemble des $\alpha \in R^+(y)$ qui sont **indécomposables**, c.-à-d., qui ne peuvent pas s'écrire $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \in R^+(y)$.

Remarque 2.21. — Soient $y \in V_{\text{rég}}$ et $w \in A(R)$. Comme le produit scalaire est $A(R)$ -invariant, on voit facilement que $w(R^+(y)) = R^+(w(y))$, et donc $w(\Delta(y)) = \Delta(w(y))$.

De plus, la première égalité entraîne que, pour tout $y' \in V_{\text{rég}}$, on a $y \sim y'$ si et seulement si $w(y) \sim w(y')$, et donc $w(C(y)) = C(w(y))$. Par conséquent, $A(R)$ opère sur l'ensemble des chambres de Weyl.

Fixons provisoirement $y \in V_{\text{rég}}$.

Lemme 2.22. — Tout élément de $R^+(y)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers ≥ 0 d'éléments de $\Delta(y)$. En particulier, $\Delta(y)$ engendre V .

Démonstration. — Notons \mathcal{I} l'ensemble des $\gamma \in R^+(y)$ qui ne sont pas somme d'éléments de $\Delta(y)$, et supposons $\mathcal{I} \neq \emptyset$.

Alors, il existe $\gamma \in \mathcal{I}$ tel que (y, γ) soit minimal, et γ n'est pas indécomposable (sinon il serait dans $\Delta(y)$), donc il existe $\alpha, \beta \in R^+(y)$ tels que $\gamma = \alpha + \beta$, et donc

$$(y, \gamma) = (y, \alpha) + (y, \beta).$$

Comme $\alpha, \beta \in R^+(y)$, chaque terme du membre de droite est > 0 et donc chacun est $< (y, \gamma)$. Par minimalité de γ on a donc $\alpha \notin \mathcal{I}$ et $\beta \notin \mathcal{I}$, d'où il résulte que $\gamma \notin \mathcal{I}$, contradiction. Ceci montre que $\mathcal{I} = \emptyset$, d'où la première assertion. La seconde en résulte, puisque $R^+(y)$ engendre V . \square

Lemme 2.23. — Soient $y \in V_{\text{rég}}$ et $\alpha, \beta \in \Delta(y)$. Alors $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Démonstration. — Sinon, d'après le corollaire 2.14, $\gamma = \alpha - \beta$ et $-\gamma$ seraient des racines. On aurait alors : ou bien $\gamma \in R^+(y)$, et $\alpha = \gamma + \beta$ serait décomposable, ou bien $-\gamma \in R^+(y)$ et $\beta = -\gamma + \alpha$ serait décomposable ; une contradiction dans les deux cas. \square

Lemme 2.24. — Soient $y \in V$ et A une partie de V tels que :

- (i) $(y, a) > 0$, pour tout $a \in A$;
- (ii) $(b, c) \leq 0$, pour tout $b, c \in A$.

Alors les éléments de A sont linéairement indépendants.

Démonstration. — Sinon, on aurait une égalité

$$\sum_{b \in B} t_b b = \sum_{c \in C} u_c c,$$

où B et C sont des parties finies, disjointes, de A et où les t_b , les u_c sont des réels > 0 , et, disons, $B \neq \emptyset$. Posons $x = \sum_{b \in B} t_b b$. Alors

$$(x, x) = \sum_{b, c} t_b u_c (b, c) \leq 0,$$

d'après (ii), d'où $x = 0$. Donc

$$0 = (y, x) = \sum_{b \in B} t_b (y, b).$$

Or $B \neq \emptyset$ et les t_b et (y, b) sont > 0 , d'où une contradiction. \square

Théorème 2.25 (Bases de R). — *Il existe des bases de R . Plus précisément :*

- (i) *Pour tout $y \in V_{\text{rég}}$, $\Delta(y)$ est une base de R .*
- (ii) *Toute base de R est de cette forme.*
- (iii) *Par conséquent, l'application $y \mapsto \Delta(y)$ induit une bijection W -équivariante entre l'ensemble des chambres de Weyl et l'ensemble des bases de R .*
- (iv) *Soient C une chambre de Weyl, Δ et R^+ la base de R et l'ensemble de racines positives correspondants. Pour tout $\beta \in R^+$, posons $\mathcal{H}_\beta^+ = \{x \in V \mid (x, \beta^\vee) > 0\}$. Alors on a :*

$$(*) \quad C = \bigcap_{\beta \in R^+} \mathcal{H}_\beta^+ = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \mathcal{H}_\alpha^+$$

et la dernière écriture est minimale (i.e. on ne peut retirer aucun demi-espace) et, pour tout $\alpha \in \Delta$, \overline{C} contient un ouvert non vide de \mathcal{H}_α . On dit que les \mathcal{H}_α , pour $\alpha \in \Delta$, sont les **murs** de la chambre C .

- (v) *Si R est réduit et si Δ est une base de R , alors $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ est une base de R^\vee .*

Démonstration. — (i) Si $y \in V$ est régulier, il résulte des trois lemmes précédents que $\Delta(y)$ est une base de R .

(ii) Soit Δ une base de R et soit R^+ , resp. R^- , l'ensemble des $\gamma \in R$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers ≥ 0 , resp. ≤ 0 , des éléments de Δ . Comme Δ est une base de V , il existe $y \in V$ tel que $(y, \alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Alors y est régulier et l'on a

$$R^+ \subset R^+(y) \quad \text{et} \quad R^- \subset R^-(y).$$

Puisque $R = R^+ \cup R^-$ et $R^+(y) \cap R^-(y) = \emptyset$, on en déduit que $R^+ = R^+(y)$.

Par unicité de l'écriture des éléments de R^+ dans la base Δ , on voit que les éléments de Δ sont indécomposables dans $R^+ = R^+(y)$, d'où $\Delta \subset \Delta(y)$. Comme ces deux ensembles ont même cardinal (la dimension de V), il en résulte $\Delta = \Delta(y)$. Ceci prouve (ii), et alors (iii) découle de la remarque 2.21.

(iv) La première égalité de (*) découle des définitions, la seconde découle de ce que tout élément de R^+ est somme d'éléments de Δ , et le reste découle de ce que Δ est une base de V .

(v) Comme $\beta^\vee = 2\beta/\|\beta\|^2$, alors C est aussi une chambre de Weyl pour R^\vee , donc définit le système de coracines positives $(R^\vee)^+ = \{\beta^\vee \mid \beta \in R^+\}$, et ses murs sont les hyperplans $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_{\alpha^\vee}$, pour α variant dans Δ , donc la base correspondante de R^\vee est de la forme $\{t_\alpha \alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$, avec $t_\alpha \in \{1/2, 1, 2\}$, et comme R est supposé réduit, on a $t_\alpha = 1$.

Une autre démonstration est la suivante : soit $\alpha_0 \in \Delta$, supposons que $\alpha_0^\vee = \beta_1^\vee + \beta_2^\vee$, avec $\beta_i \in R^+$. Alors $\alpha_0 = t_1\beta_1 + t_2\beta_2$, où $t_i = \|\alpha_0\|^2/\|\beta_i\|^2$ et comme $\beta_i = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{i,\alpha}\alpha$ avec $n_{i,\alpha} \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\alpha_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} (t_1 n_{1,\alpha} + t_2 n_{2,\alpha})\alpha$$

et par unicité de l'écriture on obtient que chaque β_i est un multiple non nul de α_0 . Si R est réduit, on a nécessairement $\beta_i = \alpha_0$, d'où une contradiction qui montre que α_0^\vee est indécomposable. \square

Désormais, on suppose R **réduit**.

Terminologie 2.26. — On note $Q(R)$ (resp. $Q(R^\vee)$) le sous-groupe de V (resp. V^*) engendré par R (resp. R^\vee). Il résulte du théorème que $Q(R)$ est un **réseau** de V (i.e. on a $Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$) et on dit que $Q(R)$ (resp. $Q(R^\vee)$) est le *réseau des racines* (resp. *des coracines*).

Alors le réseau « dual » de $Q(R^\vee)$, i.e.

$$P(R) = \{v \in V \mid \forall \alpha \in R, \quad \langle \alpha^\vee, v \rangle \in \mathbb{Z}\}$$

est appelé le *réseau des poids*. Si Δ est une base de R , alors Δ^\vee est une base de R^\vee et l'on note $(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ la base duale, i.e. ω_α est l'élément de $P(R)$ défini par : pour tout $\beta \in \Delta$,

$$\langle \beta^\vee, \omega_\alpha \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{si } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Les ω_α s'appellent les **poids fondamentaux** (associés à Δ et à C). On a $Q(R) \subset P(R)$ et cette inclusion est en général stricte.

Exercice 2.27. — Pour chacun des types A_2, B_2, G_2 , exprimer les poids fondamentaux comme combinaison \mathbb{Q} -linéaire des racines simples α et β , et les placer sur la figure représentant R . Montrer que $W = W(A_2)$ est le groupe des isométries du triangle équilatéral formé par l'orbite $W\omega_\alpha$ (ou $W\omega_\beta$).

2.4. Graphes de Coxeter et diagrammes de Dynkin. — Soit R un système de racines et soit Δ une base de R . Dans la suite, on identifie V et V^* au moyen du produit scalaire et donc chaque coracine α^\vee est considérée comme un élément de V .

Définition 2.28. — On appelle **matrice de Cartan** de R (relativement à Δ) la matrice $((\beta, \alpha^\vee))_{\alpha, \beta \in \Delta}$, c.-à-d., si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une numérotation des éléments de Δ , c'est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & (\alpha_1, \alpha_2^\vee) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n^\vee) \\ (\alpha_2, \alpha_1^\vee) & 2 & \ddots & (\alpha_2, \alpha_n^\vee) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1^\vee) & (\alpha_n, \alpha_2^\vee) & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.29. — On appelle **graphe de Coxeter** de R (relativement à Δ), et l'on note $\mathcal{C}(R)$, le graphe dont les sommets sont les éléments de Δ , deux sommets distincts α et β étant reliés par 0, 1, 2 ou 3 arêtes suivant que le produit $(\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee)$ est égal à 0, 1, 2 ou 3.

Remarque 2.30. — On verra plus loin que $\mathcal{C}(R)$ ne dépend pas du choix de la base Δ , ce qui justifie la notation.

Définition 2.31. — On appelle **diagramme de Dynkin** de R (relativement à Δ) le diagramme noté $D(R)$ et obtenu à partir du graphe de Coxeter de R de la façon suivante. Soient α, β deux sommets tels que $P = (\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee)$ égale 2 ou 3 ; alors, quitte à échanger α et β on peut supposer que $(\alpha, \beta^\vee) = -1$ et $(\beta, \alpha^\vee) = -P$, auquel cas $\|\beta\|^2 = P\|\alpha\|^2$.

Dans ce cas on rajoute sur l'arête (de multiplicité P) reliant α à β , un signe $>$ pointant vers α (c.-à-d., le signe $>$ indique que $\|\beta\| > \|\alpha\|$).

Remarque 2.32. — On verra plus loin que $D(R)$ ne dépend pas de Δ , ce qui justifie la notation. D'autre part, il est clair que $D(R)$ contient exactement la même information que la matrice de Cartan de R .

Définition 2.33. — On dit que $D(R)$ est connexe si le graphe de Coxeter sous-jacent l'est.

Lemme 2.34. — Pour tout racine $\gamma = \sum_{\delta \in \Delta} n_{\gamma, \delta} \delta$, son **support** $S(\gamma) = \{\delta \in \Delta \mid n_{\gamma, \delta} \neq 0\}$ est une partie **connexe** de $D(R)$.

Démonstration. — On peut supposer $\gamma \in R^+$. On procède par récurrence sur $\text{ht}(\gamma) = \sum_{\delta} n_{\gamma, \delta}$. C'est OK si $\text{ht}(\gamma) = 1$; supposons donc $\text{ht}(\gamma) > 1$. Comme $(\gamma, \gamma) > 0$, il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $n_{\gamma, \alpha} > 0$ et $(\gamma, \alpha) > 0$. Comme $\gamma \neq \alpha$, il existe $\delta \neq \alpha$ tel que $n_{\gamma, \delta} > 0$ et donc $\beta = s_{\alpha}(\gamma) = \gamma - (\gamma, \alpha^{\vee})\alpha$ est encore une racine positive, et l'on a $\text{ht}(\beta) < \text{ht}(\gamma)$ et $S(\gamma) = S(\beta) \cup \{\alpha\}$. Par hypothèse de récurrence, $S(\beta)$ est connexe, et comme $(\beta, \alpha) = -(\gamma, \alpha) < 0$, alors α est reliée à au moins un élément de $S(\beta)$, et donc $S(\gamma)$ est connexe. \square

Proposition 2.35. — R est irréductible ssi $D(R)$ est connexe.

Démonstration. — Si R est somme directe de systèmes de racines irréductibles R_1, \dots, R_n , avec $n \geq 2$, soit Δ_i une base de R_i ; alors la réunion des Δ_i est une base de R et donc $D(R)$ est réunion disjointe des $D(R_i)$.

Réciproquement, si $D(R)$ est réunion de composantes connexes $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, soit V_i le sous-espace de V engendré par Δ_i et $R_i = R \cap V_i$. Il résulte du lemme précédent que toute racine appartient à un V_i et donc R est la somme directe des R_i . \square

Pour classifier les graphes de Coxeter (et les diagrammes de Dynkin), il est commode d'introduire la notion suivante.

Définition 2.36. — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien. On appelle **ensemble de vecteurs admissible** dans E un ensemble $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de vecteurs *unitaires* linéairement indépendants et tels que, pour tout $i \neq j$, on ait

$$(e_i, e_j) \leq 0, \quad \text{et} \quad 4(e_i, e_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

À un tel \mathcal{E} on associe le graphe $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$ dont les sommets sont les e_i , et où deux sommets distincts e_i et e_j sont reliés par $4(e_i, e_j)^2$ arêtes. Un tel graphe est appelé un **graphe admissible**.

Si R est un système de racines et Δ une base de R , alors l'ensemble \mathcal{E} des vecteurs unitaires $\alpha/\|\alpha\|$, pour $\alpha \in \Delta$, est admissible, et $\Gamma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}(R)$. Par conséquent, pour classifier les graphes de Coxeter $\mathcal{C}(R)$, il suffit de classifier les graphes admissibles. Ceci est l'objet de la section suivante.

3. Classification des graphes admissibles

3.1. Premières réductions. — Soit \mathcal{E} un ensemble de vecteurs admissibles et soit $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$.

Définition 3.1. — Si x est un sommet de Γ , on appelle **valence de x** , et on note $v(x)$, le nombre d'arêtes partant de x , comptées avec leur multiplicité.

Lemme 3.2. — Si \mathcal{E}' est un sous-ensemble de \mathcal{E} , alors \mathcal{E}' est admissible et $\Gamma(\mathcal{E}')$ est le sous-graphe de $\Gamma(\mathcal{E})$ supporté par \mathcal{E}' .

Démonstration. — C'est clair. \square

Lemme 3.3. — Le nombre $p(\mathcal{E})$ de paires de sommets dans $\Gamma(\mathcal{E})$ reliés par au moins une arête est $< \#\mathcal{E}$.

Démonstration. — Posons $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $\varepsilon = \sum_{i=1}^n e_i$. Comme les e_i sont linéairement indépendants, on a $\varepsilon \neq 0$ et donc

$$(*) \quad 0 < (\varepsilon, \varepsilon) = n + 2 \sum_{i < j} (e_i, e_j).$$

Si deux sommets distincts e_i et e_j sont reliés, $4(e_i, e_j)^2$ est égal à 1, 2 ou 3, et donc $2(e_i, e_j)$ est ≤ -1 . Par conséquent, (*) montre qu'il y a au plus $n - 1$ paires de sommets reliés. \square

Lemme 3.4. — $\Gamma(\mathcal{E})$ ne contient pas de cycles.

Démonstration. — Supposons que $\Gamma(\mathcal{E})$ contienne un cycle C , de cardinal $m \geq 3$. Soit \mathcal{E}' le support de C . Alors \mathcal{E}' est un ensemble admissible, et l'on a $p(\mathcal{E}') \geq m = \#\mathcal{E}'$, contradiction. \square

Lemme 3.5. — (a) Tout sommet de Γ est de valence ≤ 3 .

(b) Si Γ est connexe et contient une arête triple, alors Γ est le graphe $\circ \equiv \circ$.

Démonstration. — Soit x un sommet de Γ , et soient y_1, \dots, y_r les sommets reliés à x . On a $(x, y_i) < 0$ pour tout i . Soient F le sous-espace engendré par les y_i , et x' la projection orthogonale de x sur F . Comme x et les y_i sont linéairement indépendants, on a $x \neq x'$ et donc $(x', x') < (x, x) = 1$.

D'autre part, comme Γ ne contient pas de cycles, on a $(y_i, y_j) = 0$ pour $i \neq j$. Il en résulte que $x' = \sum_i (x, y_i) y_i$. Par conséquent, on a

$$\sum_i (x, y_i)^2 = (x', x') < 1, \quad \text{d'où} \quad \sum_i 4(x, y_i)^2 < 4.$$

Or $\sum_i 4(x, y_i)^2$ est la valence de x , d'où l'assertion (a).

S'il existe dans Γ deux sommets x et y reliés par une arête triple, c.-à-d., si $4(x, y) = 3$, alors l'argument précédent montre que x et y ne sont reliés à aucun autre sommet de Γ . L'assertion (b) en découle. \square

Lemme 3.6. — Soit $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ un sous-ensemble de \mathcal{E} tel que $\Gamma(\mathcal{E}')$ soit une chaîne formée d'arêtes simples. Posons

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}') \cup \{\varepsilon\}.$$

Alors $\text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$ est admissible, et son graphe est obtenu à partir de celui de $\Gamma(\mathcal{E})$ en contractant $\Gamma(\mathcal{E}')$ en un seul point.

Démonstration. — Par hypothèse, on a $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$ pour $i = 1, \dots, r - 1$, et les autres produits scalaires entre les ε_i sont nuls. Par conséquent, on a

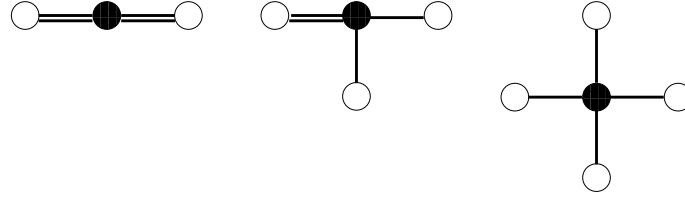
$$(\varepsilon, \varepsilon) = r + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = r - (r - 1) = 1.$$

D'autre part, soit x un élément de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ relié dans $\Gamma(\mathcal{E})$ à un élément ε_i de \mathcal{E}' . Comme $\Gamma(\mathcal{E})$ ne contient pas de cycles, alors ε_i est l'unique élément de \mathcal{E}' relié à x . Par conséquent, on a $(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon_i)$. Ceci montre que $\text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$ est admissible, et que son graphe a la forme annoncée. \square

Définition 3.7. — On appelle **point de bifurcation** un sommet de Γ qui est relié à au moins 3 autres sommets.

Lemme 3.8. — Si Γ est connexe, il ne peut posséder deux arêtes doubles, ni une arête double et un point de bifurcation, ni deux points de bifurcation.

Démonstration. — Sinon, on déduirait du lemme précédent qu'il existe des sous-ensembles $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}''$ tels que l'ensemble admissible $\text{cont}_{\mathcal{E}''}(\mathcal{E}')$ ait pour graphe l'un des graphes suivants :



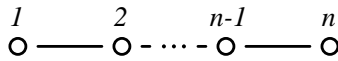
Mais alors le sommet \bullet serait de valence 4, contradiction. □

3.2. Fin de la classification des graphes admissibles. — Il résulte de ce qui précède que tout graphe admissible connexe est de l'un des types suivants.

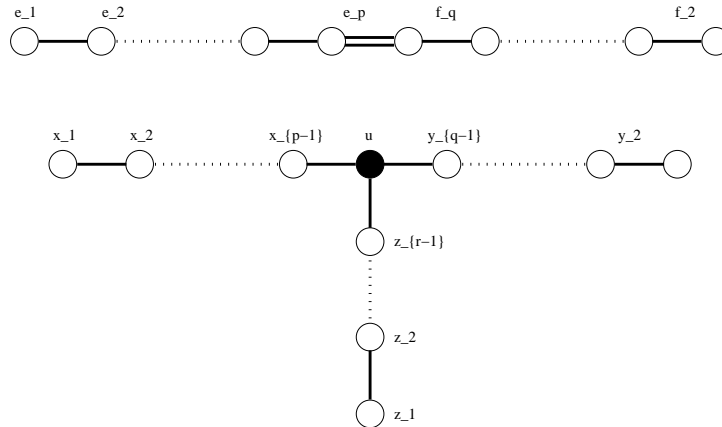
G_2



A_n



$I(p, q, r)$



$II(p, q, r)$

Lemme 3.9. — Soit Γ un graphe admissible de type $I(p, q)$, avec $p \geq q \geq 1$. Alors $q = 1$ ou bien $q = 2 = p$.

Démonstration. — Posons $e = \sum_{i=1}^p i e_i$ et $f = \sum_{j=1}^q j f_j$. On a $2(e_i, e_{i+1}) = -1$, pour $i = 1, \dots, p-1$, et $(e_i, e_j) = 0$ pour $j \neq i+1$. Donc

$$(e, e) = \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2} \quad \text{et, de même,} \quad (f, f) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

D'autre part, comme

$$(e_i, f_j)^2 = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i = p \text{ et } j = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a $(e, f)^2 = (pq)^2 (e_p, f_q)^2 = (pq)^2 / 2$.

Comme e et f sont linéairement indépendants, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que $(e, f)^2 < (e, e)(f, f)$, d'où $2(pq)^2 < pq(p+1)(q+1)$. On en déduit que $(p-1)(q-1) < 2$.

Comme $p \geq q \geq 1$, ceci n'est possible que si $q = 1$, ou $q = 2 = p$. \square

Lemme 3.10. — Soit Γ un graphe admissible de type $II(p, q, r)$, avec $p \geq q \geq r \geq 2$. Alors ou bien $q = r = 2$, ou bien (p, q, r) est l'un des triplets suivants : $(5, 3, 2)$, $(4, 3, 2)$, $(3, 3, 2)$.

Démonstration. — Posons $x = \sum_i i x_i$, $y = \sum_j j y_j$, et $z = \sum_k k z_k$. Comme dans le lemme précédent, on obtient :

$$(x, x) = \frac{(p-1)p}{2}, \quad (y, y) = \frac{(q-1)q}{2}, \quad (z, z) = \frac{(r-1)r}{2},$$

et

$$\begin{cases} (u, x) = (p-1)(u, x_{p-1}) = (p-1)/2, \\ (u, y) = (q-1)(u, y_{q-1}) = (q-1)/2, \\ (u, z) = (r-1)(u, z_{r-1}) = (r-1)/2. \end{cases}$$

Soit V' le sous-espace engendré par x, y, z , et soit u' la projection orthogonale de u sur V' . Puisque x, y, z sont deux à deux orthogonaux, on a

$$u' = (u, x) \frac{x}{(x, x)} + (u, y) \frac{y}{(y, y)} + (u, z) \frac{z}{(z, z)},$$

d'où

$$\begin{aligned} (u', u') &= \frac{(u, x)^2}{(x, x)} + \frac{(u, y)^2}{(y, y)} + \frac{(u, z)^2}{(z, z)} \\ &= \frac{(p-1)^2}{4} \frac{2}{(p-1)p} + \frac{(q-1)^2}{4} \frac{2}{(q-1)q} + \frac{(r-1)^2}{4} \frac{2}{(r-1)r} \\ &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Enfin, comme $u \notin V'$, on a $(u', u') < (u, u) = 1$. On en déduit que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Comme $p \geq q \geq r \geq 2$, ceci entraîne que $r = 2$ et $q \leq 3$. Si $q = 2$ alors p est arbitraire, et si $q = 3$ alors

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

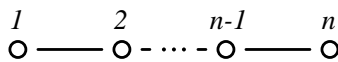
et donc $p \leq 5$. Le lemme est démontré. \square

On a donc obtenu que les graphes admissibles connexes sont les suivants. (La numérotation est celle de Bourbaki [Bou, Planches I-IX].)

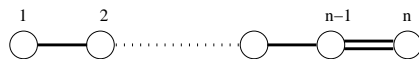
G_2



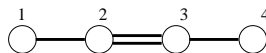
A_n

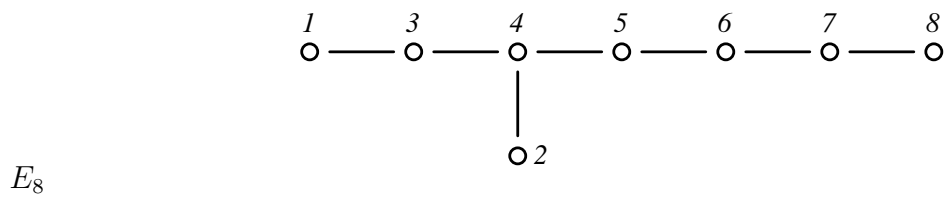
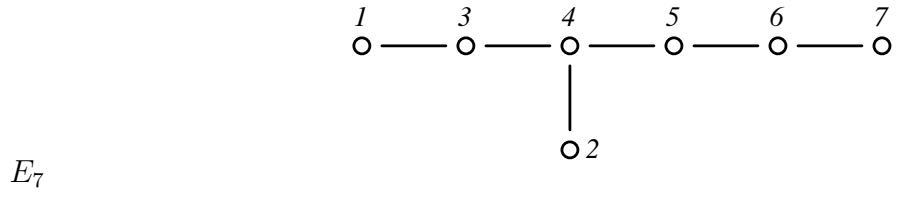
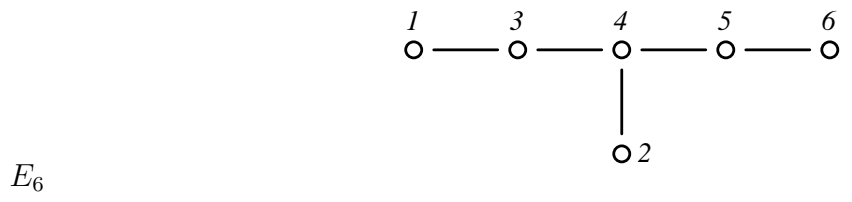
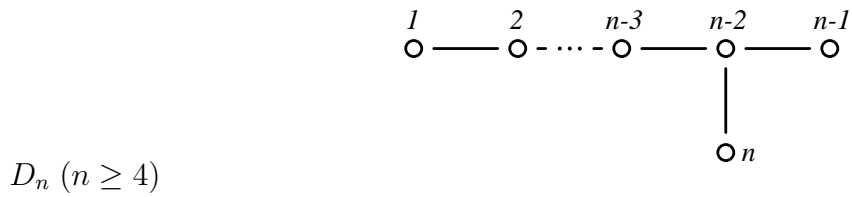


B_n

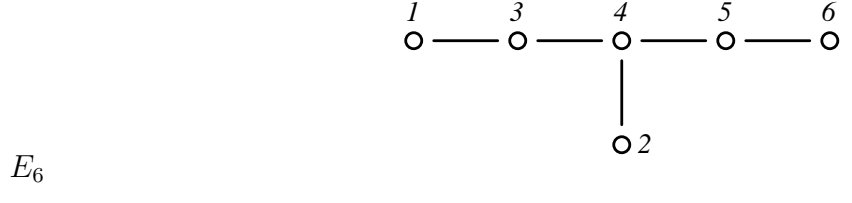
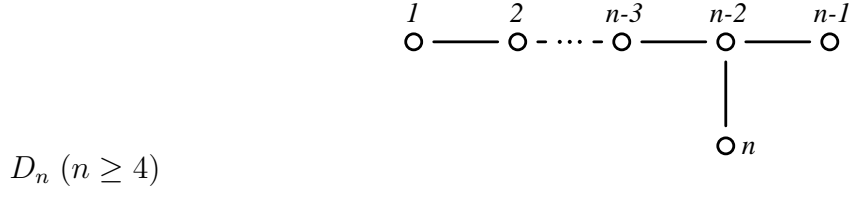
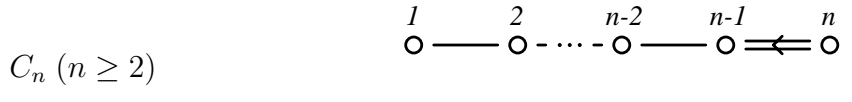
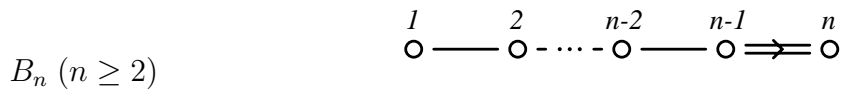
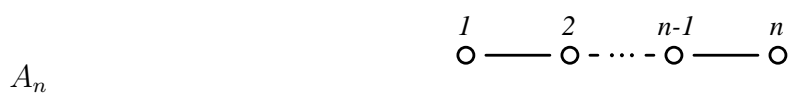


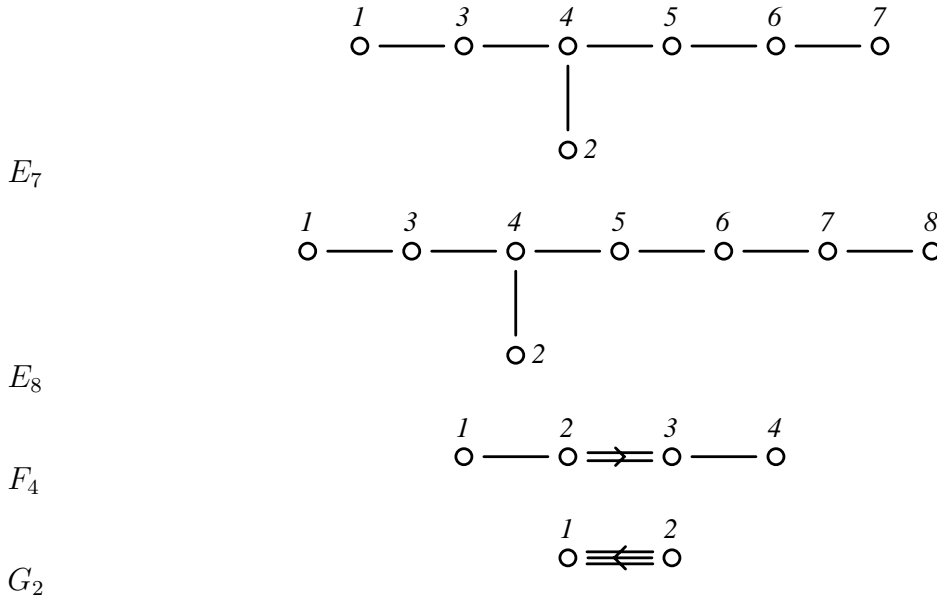
F_4





Corollaire 3.11. — Si R est un système de racines réduit irréductible, son diagramme de Dynkin est l'un des diagrammes suivants, qui sont deux à deux non isomorphes, à l'exception de $B_2 \simeq C_2$. (La numérotation est celle de Bourbaki [Bou, Planches I-IX].)





Pour terminer la classification des systèmes de racines, il reste à voir les points suivants.

(1) Le diagramme de Dynkin ne dépend que de R (et pas de la base choisie), et détermine R à isomorphisme près.

(2) Chacun des diagrammes précédents correspond à un système de racines réduit irréductible.

(3) Classifier les systèmes de racines irréductibles non réduits.

4. Conjugaison des bases sous l'action de $W(R)$

On suppose toujours R **réduit**. On fixe une base Δ de R ; on note R^+ l'ensemble des racines qui sont somme d'éléments de Δ , et $R^- = -R^+$. Les éléments de Δ sont appelés les *racines simples*, ceux de R^+ et R^- les racines *positives* et *negatives*. Si α est une racine, on écrira $\alpha > 0$ pour dire que $\alpha \in R^+$, et de même $\alpha < 0$ pour dire que $\alpha \in R^-$. On pose

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+} \beta.$$

Lemme 4.1. — Soit $\alpha \in \Delta$. Alors : 1) s_α laisse stable $R^+ \setminus \{\alpha\}$.

2) On a $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$, et donc $(\rho, \alpha^\vee) = 1$.

Démonstration. — 1) Soit $\gamma \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. On a $\gamma = \sum_{\beta \in \Delta} m_\beta \beta$, avec les $m_\beta \in \mathbb{N}$, et comme R est réduit et $\gamma \neq \alpha$, il existe $\beta \neq \alpha$ tel que $m_\beta \geq 1$. Comme

$$s_\alpha(\gamma) = \gamma - (\gamma, \alpha^\vee)\alpha,$$

le coefficient de β dans $s_\alpha(\gamma)$ est inchangé, donc égal à $m_\beta \geq 1$. Donc $s_\alpha(\gamma)$ est une racine positive, distincte de α . Ceci prouve le point 1).

Écrivant $2\rho = \alpha + \sum_{\substack{\beta \in R^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta$, on obtient $2s_\alpha(\rho) = -\alpha + \sum_{\substack{\beta \in R^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta = 2\rho - 2\alpha$, d'où $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ et donc $(\rho, \alpha^\vee) = 1$. \square

Théorème 4.2 (Les bases de R sont conjuguées). — Soient Δ une base de R et C la chambre de Weyl associée, i.e. $C = \{y \in V_{\text{rég}} \mid \forall \alpha \in \Delta, (y, \alpha) > 0\}$.

(1) Pour tout $t \in V_{\text{rég}}$, il existe $w \in W$ tel que $w(t) \in C$. Donc W agit transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl et sur celui des bases de R .

(2) Pour tout $\alpha \in R$, il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha) \in \Delta$.

(3) W est engendré par les réflexions s_α , $\alpha \in \Delta$.

(4) W agit de façon libre et transitive sur l'ensemble des chambres de Weyl et sur celui des bases de R .

Démonstration. — Soit W' le sous-groupe de W engendré par les s_α , $\alpha \in \Delta$. Nous allons d'abord démontrer (1)–(2) pour W' , puis en déduire que $W' = W$.

Soit $t \in V_{\text{rég}}$ et soit $w \in W$ tel que $(w(t), \rho)$ soit maximum (c'est possible puisque W est fini). Alors, pour tout $\alpha \in \Delta$ on a

$$(w(t), \rho) \geq (s_\alpha w(t), \rho) = (w(t), s_\alpha \rho) = (w(t), \rho) - (w(t), \alpha).$$

On en déduit que $(w(t), \alpha)$ est ≥ 0 , et en fait > 0 puisque $w(t)$ est régulier. Donc $w(t) \in C$. Alors, $\Delta(w(t)) = \Delta$, et l'on en déduit que $\Delta(t) = w^{-1}\Delta = \{w^{-1}(\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$. Ceci prouve (1).

Prouvons (2). Soit $\beta \in R^+$, alors $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$, avec les $n_\alpha \in \mathbb{N}$. On définit sa **hauteur** par $\text{ht}(\beta) = \sum_{\alpha} n_\alpha$. Montrons par récurrence sur $\text{ht}(\beta)$ qu'il existe $w \in W'$ tel que $w'(\beta) \in \Delta$. D'abord, il existe $\alpha_0 \in \Delta$ tel que $(\beta, \alpha_0^\vee) > 0$, car sinon on aurait $(\beta, \beta) \leq 0$, impossible. Si β est multiple de α_0 alors, comme R est réduit on a $\beta = \alpha_0$ et c'est gagné. Sinon, β a un coefficient $n_{\alpha_0} > 0$ pour un certain $\alpha \neq \alpha_0$ et donc

$$s_{\alpha_0}(\beta) = \beta - (\beta, \alpha_0^\vee)\alpha_0$$

est une racine positive de hauteur $< \text{ht}(\beta)$; alors par hypothèse de récurrence il existe $w' \in W'$ tel que $w's_{\alpha_0}(\beta) \in \Delta$. L'assertion (2) en découle.

(3) Montrons que $W' = W$. Par définition, W est engendré par les s_β , pour $\beta \in R$. Comme $s_\beta = s_{-\beta}$, on peut se limiter à $\beta \in R^+$. D'après (2), il existe $w \in W'$ tel que $w(\beta) = \alpha \in \Delta$. Donc, d'après le lemme 2.7, s_β égale $w^{-1}s_\alpha w$ donc appartient à W' . Il en résulte que $W = W'$.

L'assertion (4) est démontrée dans le paragraphe suivant. Tirons déjà des conséquences des assertions (1–3). \square

Corollaire 4.3. — *Le graphe de Coxeter $\mathcal{C}(R)$ et le diagramme de Dynkin $D(R)$ ne dépendent que de R .*

Démonstration. — Soit Δ' une autre base de R . D'après le théorème précédent, il existe $w \in W$ tel que $\Delta' = w(\Delta)$. Comme w préserve le produit scalaire, on a

$$w(\alpha^\vee) = w(\alpha)^\vee \quad \text{et} \quad (w(\beta), w(\alpha)^\vee) = (\beta, \alpha^\vee), \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta.$$

Il en résulte que Δ et Δ' définissent les mêmes graphe de Coxeter et diagramme de Dynkin. \square

Théorème 4.4. — *Soit R' un système de racines dans un espace euclidien V' , soit Δ' une base de R' , et supposons donnée une bijection $\phi : \Delta \rightarrow \Delta'$ telle que*

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)^\vee) = (\alpha, \beta^\vee) \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta;$$

(c.-à-d., ϕ est un isomorphisme entre les diagrammes de Dynkin).

Comme Δ (resp. Δ') est une base de V (resp. V'), alors ϕ se prolonge en un isomorphisme linéaire $V \xrightarrow{\sim} V'$, encore noté ϕ . Alors $\phi(R) = R'$ et donc R et R' sont isomorphes.

Démonstration. — Soient $\alpha, \beta \in \Delta$. Alors

$$(s_{\phi(\alpha)} \circ \phi)(\beta) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - (\phi(\beta), \phi(\alpha)^\vee)\phi(\alpha),$$

et

$$(\phi \circ s_\alpha)(\beta) = \phi(\beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha) = \phi(\beta) - (\beta, \alpha^\vee)\phi(\alpha).$$

Comme $(\phi(\beta), \phi(\alpha)^\vee) = (\beta, \alpha^\vee)$, ces deux expressions sont égales, et comme les $\beta \in \Delta$ engendrent V on en déduit que

$$s_{\phi(\alpha)} = \phi \circ s_\alpha \circ \phi^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

Comme, d'après 4.2, W (resp. W') est engendré par les s_α (resp. $s_{\phi(\alpha)}$), pour $\alpha \in \Delta$, il en résulte que l'application

$$w \mapsto \phi \circ w \circ \phi^{-1}$$

induit un isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} W'$. Enfin, comme $R = W\Delta$ et $R' = W'\Delta'$, d'après 4.2 à nouveau, on en tire que $\phi(R) = R'$. Ceci prouve le théorème. \square

Par conséquent, pour terminer la classification des systèmes de racines réduits, il suffit de montrer que chacun des diagrammes connexes énumérés précédemment est le diagramme de Dynkin d'un système de racines irréductible réduit. Pour A_n, B_n, C_n, D_n , on va voir cela plus loin.

D'autre part, on a déjà vu le système de racines de type G_2 , dont le diagramme de Dynkin est G_2 . Pour les systèmes de racines de type E_6, E_7, E_8 et F_4 , on renvoie à [Bou, Planches I–IX]. Enfin, pour la classification des systèmes de racines irréductibles non réduits (type BC_n), voir la feuille de TD n°1.

4.1. Longueur, lemme d'échange, etc. — Soit Δ une base de R . On pose $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Les éléments de S s'appellent les *réflexions simples*; d'après le point (3) du théorème 4.2, elles engendrent W .

Définition 4.5. — Soit $w \in W$. On appelle **longueur** de w , et on note $\ell(w)$, le plus petit entier $n \geq 0$ tel que w s'écrive comme produit de n éléments de S .

Soient $s_1, \dots, s_n \in S$ (non nécessairement distincts); si $w = s_1 \dots s_n$ et si $n = \ell(w)$, on dit que $s_1 \dots s_n$ est une *écriture réduite* (ou *décomposition réduite*) de w .

Remarque. — $\ell(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1$. (Par convention, le produit sur l'ensemble vide est égal à 1).

Lemme 4.6. — Soient $w \in W, \alpha \in \Delta$. Si $w(\alpha) < 0$ alors $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$. Réciproquement, si $w(\alpha) > 0$ alors $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) + 1$.

Démonstration. — Tout d'abord, il est clair que $\ell(ws_\alpha) \leq \ell(w) + 1$. Comme $w = (ws_\alpha)s_\alpha$, on en déduit que

$$\ell(w) - 1 \leq \ell(ws_\alpha) \leq \ell(w) + 1.$$

1) Supposons $w(\alpha) < 0$. Soit $w = s_n \dots s_1$ une décomposition réduite de w , avec les s_i dans S , c.à.d. $s_i = s_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Delta$. Posons $w_0 = 1$ et $w_i = s_i \dots s_1$, pour $i = 1, \dots, n$. Comme $\alpha > 0$ et $w(\alpha) < 0$ alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $w_{i-1}(\alpha)$ soit > 0 et que $w_i(\alpha) = s_i(w_{i-1}(\alpha))$ soit < 0 . Le lemme 4.1 implique alors que $w_{i-1}(\alpha) = \alpha_i$. D'après le lemme 2.7, on en déduit que

$$s_i = w_{i-1}s_\alpha w_{i-1}^{-1} = s_{i-1} \dots s_1 s_\alpha s_1 \dots s_{i-1}.$$

Il en résulte que $ws_\alpha = s_n \dots s_{i+1} s_{i-1} \dots s_1$, d'où $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ et donc $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$.

2) Supposons maintenant $w(\alpha) > 0$. Alors $ws_\alpha(\alpha) = -w(\alpha)$ est < 0 et donc d'après ce qui précède, appliqué à ws_α , on a $\ell(w) = \ell(ws_\alpha) - 1$. \square

La démonstration précédente contient le résultat suivant, connu sous le nom de *Lemme d'échange*.

Corollaire 4.7 (Lemme d'échange). — Soient $w \in W, s_n \dots s_1$ une décomposition réduite de w , et $\alpha \in \Delta$. Si $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $ws_\alpha = s_n \dots s_{i+1} s_{i-1} \dots s_1$.

Démonstration. — Comme $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$, le lemme précédent implique que $w(\alpha) < 0$. Alors on a vu dans la démonstration plus haut que $ws_\alpha = s_n \dots s_{i+1} s_{i-1} \dots s_1$. \square

Définition 4.8. — Pour $w \in W$, soit $N(w)$ l'ensemble des racines $\alpha > 0$ telles que $w(\alpha) < 0$, et soit $n(w) = \#N(w)$.

Lemme 4.9. — Soient $w \in W$ et $\alpha \in \Delta$ tels que $w(\alpha) < 0$. Alors $N(w) = s_\alpha(N(ws_\alpha)) \sqcup \{\alpha\}$ (réunion disjointe). Par conséquent, $n(w) = n(ws_\alpha) + 1$.

Démonstration. — On a $\alpha \in N(w)$, et donc $\alpha \notin N(ws_\alpha)$. Par conséquent, si $\beta \in N(ws_\alpha)$ alors, d'après le lemme 4.1, $s_\alpha(\beta) \in R^+$ et il en résulte que $s_\alpha(\beta) \in N(w)$. De même, si $\gamma \in N(w) \setminus \{\alpha\}$ alors $s_\alpha(\gamma) \in R^+$ et donc $s_\alpha(\gamma) \in N(ws_\alpha)$. On en déduit que $N(w) = s_\alpha(N(ws_\alpha)) \sqcup \{\alpha\}$. \square

Théorème 4.10. — Pour tout $w \in W$, on a $\ell(w) = n(w)$.

Démonstration. — Récurrence sur $\ell(w)$. C'est OK si $\ell(w) = 0$ car alors $w = 1$ et $n(w) = 0$. Soit $w \in W - \{1\}$ et soit $\alpha \in \Delta$ tel que $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$. D'après le lemme précédent, on a $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$. D'autre part, on a par hypothèse de récurrence $n(ws_\alpha) = \ell(ws_\alpha)$. \square

Corollaire 4.11. — W agit de façon libre et transitive sur l'ensemble des bases de R et sur celui des chambres de Weyl.

Démonstration. — Compte-tenu de la bijection W -équivariante entre chambres et bases, il suffit de montrer la première assertion. Comme on sait déjà que l'action est transitive, il suffit de montrer que si $w(\Delta) = \Delta$ alors $w = 1$. Or si $w(\Delta) = \Delta$ alors $w(R^+) = R^+$ et donc, d'après la proposition précédente, $w = 1$. \square

De plus, on déduit du théorème précédent le

Théorème 4.12. — Soient Δ une base de R et C la chambre de Weyl correspondante.

(i) \overline{C} est un domaine fondamental pour l'action de W , i.e. pour tout $\lambda \in V$, l'orbite $W\lambda$ rencontre \overline{C} en un unique point.

(ii) Pour tout $\lambda \in \overline{C}$, son stabilisateur $W_\lambda = \{w \in W \mid w(\lambda) = \lambda\}$ est engendré par les réflexions simples s_α telle que $(\lambda, \alpha) = 0$.

Démonstration. — On a déjà vu (4.2) que pour tout $t \in V$ il existe $w \in W$ tel que $w(t) \in \overline{C}$.

Soit $\lambda \in \overline{C}$ et soient $I = \{\alpha \in \Delta \mid (\lambda, \alpha) = 0\}$ et W_I le sous-groupe de W engendré par les s_α pour $\alpha \in I$. Remarquons que pour tout $\alpha \in I$, on a $s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha = \lambda$, donc $W_I \subset W_\lambda$.

Montrons par récurrence sur $\ell(w)$ que si $\mu = w\lambda$ appartient à \overline{C} alors $w \in W_I$ (et donc $\mu = \lambda$). C'est OK si $w = \text{id}$ donc on peut supposer $\ell(w) > 0$ et l'assertion établie pour les longueurs $< \ell(w)$. D'après le lemme 4.6, il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $w(\alpha) < 0$. D'autre part, comme μ et $\lambda = w^{-1}\mu$ sont dans \overline{C} on a :

$$0 \leq (\lambda, \alpha) = (w^{-1}\mu, \alpha) = (\mu, w\alpha) \leq 0$$

d'où $(\lambda, \alpha) = 0$, i.e. $\alpha \in I$. Donc $\mu = ws_\alpha(\lambda)$ et comme $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $ws_\alpha \in W_I$, d'où $w \in W_I$ et $\mu = \lambda$. Ceci prouve (i) et (ii). \square

5. Données radicielles

Définition 5.1. — Une **donnée radicielle** est un quadruplet (M, M^\vee, R, R^\vee) où :

a) M et M^\vee sont deux \mathbb{Z} -modules libres de rang fini, en dualité par un couplage parfait $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) R et R^\vee sont des parties finies de M et M^\vee , en bijection par une application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ telle que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et que les involutions s_α et s_{α^\vee} de M et M^\vee définies par :

$$s_\alpha(m) = m - \langle m, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad s_{\alpha^\vee}(m^\vee) = m^\vee - \langle \alpha, m^\vee \rangle \alpha^\vee$$

vérifient $\boxed{s_\alpha(R) = R}$ et $\boxed{s_{\alpha^\vee}(R^\vee) = R^\vee}$.

c) On dit que la donnée radicielle est **réduite** si elle vérifie de plus la condition suivante : si $\alpha, \beta \in R$ vérifient $\mathbb{Z}\alpha \cap \mathbb{Z}\beta \neq \{0\}$, alors $\beta = \pm\alpha$.

Si $\mathcal{R} = (M, M^\vee, R, R^\vee)$ est une donnée radicielle, alors le quadruplet (M^\vee, M, R^\vee, R) en est aussi une, appelée la donnée radicielle *duale* de \mathcal{R} et notée \mathcal{R}^\vee .

Remarques 5.2. — 1) Pour tout $\alpha \in R$, la condition $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ implique, d'une part, que α et α^\vee sont non nuls et, d'autre part, que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$; on voit alors que $s_\alpha^2 = \text{id}_M$, et de même pour s_{α^\vee} , donc s_α et s_{α^\vee} sont bien des *involutions*.

2) Soit V le sous-espace vectoriel de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R . Alors R est un système de racines dans V , et R^\vee s'identifie au système de racines dual dans V^* .

Définitions 5.3. — Soit (M, M^\vee, R, R^\vee) une donnée radicielle.

(i) Elle est dite **semi-simple** si le sous-groupe $\mathbb{Z}R$ a même rang que M . On peut montrer que ceci a lieu si et seulement si $\mathbb{Z}R^\vee$ a même rang que M^\vee , donc cette condition est symétrique en R et R^\vee .

(ii) Elle est dite **adjointe** (resp. **simplettement connexe**) si $\mathbb{Z}R = M$ (resp. $\mathbb{Z}R^\vee = M^\vee$).

(iii) Anticipant sur la suite du cours, signalons qu'il existe des données radicielles semi-simples qui ne sont ni adjointes ni simplettement connexes, par exemple celle de SO_{2n} , pour $n \geq 2$. D'autre part, il peut arriver qu'une donnée radicielle soit à la fois adjointe et simplettement connexe (il y a essentiellement trois cas, nommés G_2 , F_4 et E_8).

Définitions 5.4. — Soient $\mathcal{R} = (M, M^\vee, R, R^\vee)$ et $\mathcal{R}' = (M', M'^\vee, R', R'^\vee)$ deux données radicielles. Soit $f : M \rightarrow M'$ une application \mathbb{Z} -linéaire et ${}^t f : M'^\vee \rightarrow M^\vee$ sa transposée.

(i) On dit que f est un **morphisme** de \mathcal{R} vers \mathcal{R}' si f induit une bijection de R sur R' et ${}^t f$ une bijection de R'^\vee sur R^\vee .

(ii) Un tel morphisme est appelé une **isogénie** si, de plus, f est injectif de conoyau fini, i.e. si $f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme.

Remarques 5.5. — (1) Si $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ est un morphisme, alors ${}^t f$ est un morphisme entre les données radicielles duales : $\mathcal{R}'^\vee \rightarrow \mathcal{R}^\vee$.

(2) Si \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont semi-simples, tout morphisme $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ est une isogénie (puisque R contient une base de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et de même pour R').

Anticipant sur la suite du cours, donnons tout de suite un exemple de donnée radicielle. Soient k un corps algébriquement clos, G le k -schéma en groupes GL_n et T le sous-groupe fermé formé des matrices diagonales. Alors $k[T]$ est l'algèbre des polynômes de Laurent $k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$. Un **caractère** de T est un morphisme de k -schémas en groupes de T vers \mathbb{G}_m , i.e. un morphisme de k -algèbres de Hopf de $k[\mathbb{G}_m] = k[X^{\pm 1}]$ (avec $\Delta(X) = X \otimes X$) vers $k[T]$. L'ensemble de ces caractères forme un groupe (pour la multiplication), noté $X(T)$ et appelé le *groupe des caractères* de T .

La loi de groupe est notée additivement mais **attention**, elle correspond à la multiplication des valeurs : pour $\chi, \chi' \in X(T)$, $\chi + \chi'$ désigne le caractère défini par $(\chi + \chi')(t) = \chi(t)\chi'(t)$, pour tout $t \in T(k)$.

On peut montrer que $X(T)$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang n ; plus précisément c'est $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ où ε_i désigne le caractère qui associe à chaque $t \in T(k)$ son i -ème coefficient diagonal t_i . Alors, pour tout $a = \sum_i a_i \varepsilon_i$, le caractère correspondant χ_a vérifie :

$$(1) \quad \chi_a(t) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}.$$

En particulier, pour $n = 1$ ceci dit que les morphismes de k -schémas en groupes $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ sont exactement les morphismes $z \mapsto z^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$, qui correspondent aux morphismes d'algèbres de Hopf $k[X^{\pm 1}] \rightarrow k[X^{\pm 1}]$, $T \mapsto T^n$.

D'autre part, l'ensemble des morphismes de k -schémas en groupes $\mathbb{G}_m \rightarrow T$ est également un groupe, noté $X_*(T)$ et appelé le *groupe des cocaractères* de T . Comme $T \simeq \mathbb{G}_m^n$, on obtient un isomorphisme

$$X_*(T) \simeq \text{Hom}_{k\text{-gpes}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)^n \simeq \mathbb{Z}^n$$

i.e. $X_*(T) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\mu_i$ où μ_i est le cocaractère tel que $\mu_i(z)$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $(1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1)$, où z est à la i -ème place. Alors, pour tout $b = \sum_j b_j \mu_j$, le cocaractère μ_b correspondant vérifie :

$$(2) \quad \mu_b(z) = \text{diag}(z^{b_1}, \dots, z^{b_n}).$$

Enfin, par composition des morphismes de k -schémas en groupes, on obtient une application \mathbb{Z} -bilineaire

$$X(T) \times X_*(T) \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-gpes}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}$$

qui envoie chaque couple (χ, μ) sur l'entier noté $\langle \chi, \mu \rangle$ tel que la composée $\chi \circ \mu$ est l'endomorphisme $z \mapsto z^{\langle \chi, \mu \rangle}$ de \mathbb{G}_m . On voit alors par un calcul direct que : $\langle \chi_a, \mu_b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Donc le couplage $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est *parfait*.

Définition 5.6. — On définira plus loin dans le cours la k -algèbre de Lie d'un k -schéma en groupes affine de type fini G : c'est un k -espace vectoriel de dimension finie noté $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, muni d'une action linéaire de G appelée *l'action adjointe*, i.e. on a un morphisme de k -schémas en groupes $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$.

Dans le cas de $G = \text{GL}_n$, on verra que $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ est l'espace vectoriel $M_n(k)$ et que l'action adjointe est l'action par conjugaison, i.e. pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in \text{GL}_n(k)$, on a $g \cdot X = gXg^{-1}$. Notant \mathfrak{h} le sous-espace de $M_n(k)$ formé des matrices diagonales, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} kE_{ij}$$

où les E_{ij} désignent les matrices élémentaires. Pour tout i, j et tout $t \in T(k)$ on a :

$$t \cdot E_{ij} = tE_{ij}t^{-1} = t_i t_j^{-1} E_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(t)$$

donc, posant $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, on en déduit que

$$(*) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

où, pour tout $\chi \in R \cup \{0\}$, \mathfrak{g}_χ désigne le sous-espace de \mathfrak{g} sur lequel $T(k)$ agit par le caractère χ , i.e.

$$\mathfrak{g}_\chi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T(k), \quad t \cdot X = \chi(t)X\}.$$

Pour tout $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, on note α^\vee l'élément $\mu_i - \mu_j$ de $X_*(T)$. Alors, on a $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Notons s_α l'involution de $X(T)$ définie par

$$s_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

et définissons de même s_{α^\vee} . Alors, notant $s_{ij} = s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ on a pour tout ℓ :

$$s_{ij}(\varepsilon_\ell) = \begin{cases} \varepsilon_\ell & \text{si } \ell \neq i, j \\ \varepsilon_j & \text{si } \ell = i \\ \varepsilon_i & \text{si } \ell = j \end{cases}$$

donc s_{ij} est l'automorphisme de $M = X(T)$ qui permute ε_i et ε_j et laisse les autres vecteurs de base ε_ℓ inchangés. On en déduit que le sous-groupe W de $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$ engendré par les s_{ij} est le groupe symétrique S_n et que l'on a $W(R) = R$. On obtient de même que le sous-ensemble R^\vee de $M^\vee = X_*(T)$ est stable par les réflexions s_{α^\vee} . Ceci montre que $(X(T), X_*(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle, appelée la donnée radicielle de GL_n .
