SÉANCE DU 18/9

1. Groupes topologiques

Définition 1.1. — Un **groupe topologique** est un groupe G muni d'une topologie telle que les deux applications :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}, & \text{et } \mathrm{G} \to \mathrm{G}, \\ (g,h) \mapsto gh & \quad g \mapsto g^{-1} \end{array}$$

soient continues (ici, $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ est muni de la topologie produit). Ceci équivaut à la continuité de l'application $(g,h) \mapsto gh^{-1}$.

Dans ce cas, tout sous-groupe H de G, muni de la topologie induite, est un groupe topologique.

***Exemples 1.2* (Groupes discrets)**. — Tout groupe Γ, muni de la topologie discrète, est un groupe topologique. Par exemple, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tout groupe fini, etc.

***Exemples 1.3* (Groupes additifs et multiplicatifs)**. — 1) $(\mathbb{R},+)$ est un groupe topologique, puisque l'application $(x,y) \mapsto x-y$ est continue. De même, $(\mathbb{C},+)$ est un groupe topologique, isomorphe à $(\mathbb{R}^2,+)$. Plus généralement, $(\mathbb{R}^n,+)$.

2) $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe topologique, puisque l'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ est continue. Il n'est pas **connexe**, puisque $\mathbb{R}^*_+$ est un sous-groupe ouvert et fermé.

De même, $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe topologique. Le cercle $\mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$. On le note aussi $\mathrm{U}(1)$. Comme espace topologique, il est compact. On a un isomorphisme de groupes topologiques $\mathbb{C}^* \cong \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}^*_+$.

***Exemples 1.4* (Groupes linéaires)**. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ de la topologie usuelle. L'application $\mathrm{A} \mapsto \det \mathrm{A}$ est continue, puisque

[0] version du 19/9/06

c'est un polynôme en les coefficients $a_{i,j}$ de A. Donc le groupe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{dét}\,\mathrm{A} \neq 0\}$$

est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ est continue, puisque chaque coefficient

$$(\mathrm{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

est une fonction continue (un polynôme quadratique) en les coefficients de A et B. Soit C(A) la matrice des cofacteurs de A, c.-à-d., $\mathrm{C(A)}_{i,j}$ est le déterminant de la matrice de taille $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne ; c'est un polynôme homogène de degré $n-1$ en les coefficients de A. D'après la formule

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\,\mathrm{A}}\,{}^t\mathrm{C(A)},$$

où ^{t} désigne la matrice transposée, on voit que $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{-1}$ est une application continue. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe topologique. Le groupe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \text{dét}\,\mathrm{A} = 1\}$$

est un sous-groupe fermé. Ni $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ni $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ ne sont compacts, car $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ contient, par exemple, les matrices $\mathrm{I} + x\mathrm{E}_{i,j}$, pour $i < j$ et $x \in \mathbb{K}$ arbitraire, donc la fonction continue $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}_{i,j}$ est non bornée sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 1.5 **(Groupes orthogonaux, unitaires ou symplectiques)**
Ce sont les sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui préservent une forme bilinéaire symétrique, une forme hermitienne, ou une forme bilinéaire antisymétrique (forme alternée). En particulier, on a les deux exemples suivants.

1) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien usuel, c.-à-d., si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, alors

$$(x,y) = \sum_i x_i y_i, \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_i x_i^2}.$$

Alors, on définit le groupe orthogonal

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n) &= \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid (\mathrm{A}x, \mathrm{A}y) = (x,y), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{AA} = \mathrm{I}\} \\ &= \{\mathrm{A} = (a_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \textstyle\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j}, \quad \forall\, i,j\}.\end{aligned}$$

Alors, $\mathrm{O}(n)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et aussi un sous-espace fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\sum_k a_{k,i}^2 = 1$ entraîne $|a_{k,i}| \leqslant 1$ pour tout k, i ; donc $\mathrm{O}(n)$ est un fermé borné de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc est compact.

D'autre part, comme $\text{dét}({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n)$ on a $\text{dét}(\mathrm{A})^2 = 1$, d'où $\text{dét}(\mathrm{A}) = \pm 1$. Ceci conduit à introduire le groupe spécial orthogonal

$$\mathrm{SO}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n) \mid \text{dét}(\mathrm{A}) = 1\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(n)$, il est donc également compact. Pour $n = 2$, on a

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \mathrm{S}^1.$$

2) On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hermitien usuel, c.-à-d., si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, alors

$$(x, y) = \sum_k x_k \overline{y_k}, \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_k |x_k|^2}.$$

Alors, on définit le groupe unitaire

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &= \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid (\mathrm{A}x, \mathrm{A}y) = (x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n\} \\ &= \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}\} \\ &= \{\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \textstyle\sum_{k=1}^n a_{k,i}\overline{a_{k,j}} = \delta_{i,j}, \quad \forall\, i, j\}. \end{aligned}$$

Alors, $\mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et aussi un sous-espace fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, $\sum_k |a_{k,i}|^2 = 1$ entraîne $|a_{k,i}| \leqslant 1$ pour tout k, i ; donc $\mathrm{U}(n)$ est un fermé borné de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc est compact.

D'autre part, l'image de $\mathrm{U}(n)$ par l'application continue dét est un sous-groupe compact de $\mathbb{C}^*$, donc contenu dans S^1. En fait, on peut voir que l'image est exactement S^1. On introduit aussi le groupe spécial unitaire

$$\mathrm{SU}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{U}(n) \mid \text{dét}(\mathrm{A}) = 1\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{U}(n)$, il est donc également compact. Pour $n = 1$, on a

$$\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z\overline{z} = 1\} = \mathrm{S}^1.$$

***Exemples 1.6* (Groupes p-adiques)**. — Soit $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. Alors $(\mathbb{Z}_p, +)$ et $(\mathbb{Z}_p^*, \times)$ sont des groupes topologiques compacts, voir par exemple [**Am**, Chap. 1].

2. Interlude sur les représentations de groupes finis

Définition 2.1. — Soit G un groupe. Une **représentation** (complexe) de G dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est la donnée d'un morphisme de groupes ρ : $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. Dans ce cas, on dit aussi que V est un **G-module**. Si V est de dimension finie n, ceci équivaut à la donnée d'un morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Définition 2.2. — 1) Soit V une représentation de V. On dit que V est **irréductible** si V ne contient pas de sous-espace G-stable autre que $\{0\}$ et V. Dans ce cas, on dit aussi que V est un G-module **simple**.

2) On dit que V est **complètement réductible**, ou **semi-simple**, si V est somme directe de représentations irréductibles.

Si V est de dimension finie, alors tout sous-espace G-stable de dimension minimale est un sous-module irréductible (c'est clair). C'est un problème important de comprendre toute les représentations, disons de dimension finie, d'un groupe G. On veut d'une part classifier toutes les représentations irréductibles, et d'autre part on est content si toute représentation de G est somme directe d'irréductibles. Ce n'est pas toujours le cas, mais c'est la cas si G est un groupe fini.

Théorème 2.3. — *Soit* G *un groupe fini,* V *une représentation de* G *de dimension finie. Alors* V *est complètement réductible.*

Démonstration. — Choisissant une base de V, on identifie $\mathrm{V} = \mathbb{C}^n$. On munit V du produit scalaire hermitien usuel, qu'on désigne par $\langle -, - \rangle$. Pour $x, y \in \mathrm{V}$, on pose

$$(x, y) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle gx, gy \rangle.$$

Il est clair que $(-, -)$ est hermitien symétrique, et il est défini positif puisque pour $x \neq 0$ on a

$$(x, x) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle gx, gx \rangle > 0.$$

Donc $(-, -)$ est un nouveau produit scalaire hermitien sur V. De plus, il est G-invariant, c.-à-d., pour tout $g \in \mathrm{G}$, et $x, y \in \mathrm{V}$, on a

$$(*) \qquad (gx, gy) = (x, y).$$

En effet,

$$(gx, gy) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{h \in \mathrm{G}} \langle hgx, hgy \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{h' \in \mathrm{G}} \langle h'x, h'y \rangle = (x, y).$$

On peut maintenant démontrer le théorème. Soit W un sous-espace G-stable de V, de dimension minimale. Alors W est irréductible. De plus, on a une décomposition orthogonale, relativement à $(-, -)$:

$$(**) \qquad \mathrm{V} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{W}^{\perp},$$

et $\mathrm{W}^{\perp}$ est G-stable. En effet, si $x \in \mathrm{W}^{\perp}$ et $g \in \mathrm{G}$ alors, pour tout $v \in \mathrm{W}$, on a

$$(v, gx) = (g^{-1}v, x) = 0,$$

d'où $gx \in \mathrm{W}^{\perp}$. Alors, la restriction de $(-,-)$ à $\mathrm{W}^{\perp}$ est encore un produit scalaire hermitien, G-invariant, et on peut répéter le processus. Comme V est de dimension finie, on obtient ainsi une décomposition en somme directe orthogonale de sous-modules irréductibles :

$$\mathrm{V} = \mathrm{W}_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{W}_2 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{W}_r.$$

Le théorème est démontré. $\square$

3. Mesure de Haar sur un groupe compact

3.1. Représentations régulières gauche et droite. — Soit G un groupe compact. On note C(G) l'espace des fonctions continues $\phi : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|\phi\| = \sup_{g\in\mathrm{G}} |\phi(g)|.$$

C'est un espace de Banach (c.-à-d., il est complet pour cette norme), voir par exemple [**Di81**, 6.1.12].

On a deux représentations de G dans C(G), notées $\mathrm{L} : g \mapsto \mathrm{L}_g$ et $\mathrm{R} : g \mapsto \mathrm{R}_g$, appelées représentation régulière gauche (resp. droite), et définies comme suit. Soit $\phi \in \mathrm{C(G)}$; pour tout $h \in \mathrm{G}$ on pose :

$$(\mathrm{L}_g\phi)(h) = \phi(g^{-1}h), \qquad (\mathrm{R}_g\phi)(h) = \phi(hg).$$

D'abord, $\mathrm{L}_g\phi$ est bien continue, car c'est la composée de $h \mapsto g^{-1}h$ et de ϕ. De même, $\mathrm{R}_g\phi$ est continue. Pour $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$, on a

$$(\mathrm{L}_{g_1}(\mathrm{L}_{g_2}\phi))(h) = (\mathrm{L}_{g_2}\phi)(g_1^{-1}h) = \phi(g_2^{-1}g_1^{-1}h) = \phi((g_1g_2)^{-1}h) = (\mathrm{L}_{g_1g_2}\phi)(h),$$

d'où

$$\mathrm{L}_{g_1} \circ \mathrm{L}_{g_2} = \mathrm{L}_{g_1g_2}$$

et $\mathrm{L} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(C(G))}$ est bien un morphisme de groupes : c'est la raison pour laquelle on a défini $\mathrm{L}_g\phi$ par $(\mathrm{L}_g\phi)(h) = \phi(g^{-1}h)$. On vérifie de même que

$$\mathrm{R}_{g_1} \circ \mathrm{R}_{g_2} = \mathrm{R}_{g_1g_2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_g \circ \mathrm{R}_{g'} = \mathrm{R}_{g'} \circ \mathrm{L}_g.$$

C'est-à-dire, L et R sont deux représentations de G dans C(G), et elles commutent. En particulier, $\mathrm{L}_g \circ \mathrm{R}_g = \mathrm{R}_g \circ \mathrm{L}_g$ est l'action par conjugaison, notée Int_g :

$$(\mathrm{Int}_g\,\phi)(h) = \phi(g^{-1}hg).$$

Remarque 3.1. — Certains auteurs (par exemple, [**Ru73**]) utilisent $(\mathrm{L}'_g\phi)(h) = \phi(gh)$; mais alors on a $\mathrm{L}'_{g_1} \circ \mathrm{L}'_{g_2} = \mathrm{L}'_{g_2g_1}$, c.-à-d., L' fait de C(G) un G-module à droite...

3.2. Intégration invariante. — On veut définir une théorie de l'intégration sur G qui soit invariante par translation à gauche ou à droite (en fait, on aura les deux simultanément, ce qui est une particularité du cas compact). C.-à-d., pour tout $\phi \in \mathrm{C}(\mathrm{G})$, on veut définir une intégrale

$$\mathrm{M}(\phi) = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg$$

de sorte que, pour tout $h \in \mathrm{G}$, on ait $\mathrm{M}(\mathrm{L}_h\phi) = \mathrm{M}(\phi)$, c.-à-d.,

$$\int_{\mathrm{G}} \phi(hg)dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg.$$

L'existence d'une telle intégrale a été démontrée en 1933 par Alfred Haar ; on parle donc d'intégrale (ou de mesure) de Haar.

3.3. Deux résultats de compacité. Théorème du point fixe de Kakutani. —

Définition 3.2. — Soit E un espace métrique. Une partie X de E est dite **totalement bornée** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_n$ de X, tels que

$$\mathrm{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon),$$

où $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre x_i et de rayon ε.

Dans ce cas, il est clair que l'adhérence $\overline{\mathrm{X}}$ est également bornée.

Lemme 3.3. — *Soit* X *une partie fermée totalement bornée d'un espace métrique* **complet** (*par exemple, un espace de Banach*). *Alors* X *est compacte.*

Démonstration. — Raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un recouvrement ouvert Γ de X dont on ne puisse extraire un sous-recouvrement fini. Par hypothèse, X est recouvert par un nombre fini de fermés de diamètre $\leqslant 1$. Donc l'un d'eux, disons X_1, ne peut être recouvert par un nombre fini d'éléments de Γ. Or X_1 est lui aussi fermé et totalement borné, donc recouvert par un nombre fini de fermés de diamètre $\leqslant 1/2$. L'un d'eux, disons X_2, ne peut être recouvert par un nombre fini d'éléments de Γ. On construit ainsi une suite décroissante de fermés

$$\mathrm{X} \supseteq \mathrm{X}_1 \supseteq \mathrm{X}_2 \supseteq \cdots$$

avec X_n de diamètre $\leqslant 1/2^n$ et ne pouvant être recouvert par un nombre fini d'éléments de Γ.

Choisissons $x_n \in \mathrm{X}_n$. Alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un point $x \in \bigcap_n \mathrm{X}_n$ (car chaque X_n est fermé). Alors il existe un ouvert U du recouvrement Γ contenant x, et donc la boule fermée $\mathrm{B}(x, 2^{-n})$ pour un certain $n > 0$. Alors U contient X_n, ce qui contredit l'hypothèse. Ceci montre que X est compact. □

Remarque 3.4. — (Pour la culture.) Le lemme précédent est une étape dans la démonstration du théorème d'Ascoli-Arzela.

Théorème 3.5. — *Soient* V *un espace de Banach,* K *une partie compacte, et* C *l'enveloppe convexe de* K*, c.-à-d., l'ensemble de toutes les sommes finies*

$$\sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i\,, \quad \text{où} \;\; x_i \in \mathrm{K},\ t_i > 0,\ \text{et} \sum t_i = 1.$$

Alors $\overline{\mathrm{C}}$ *est un convexe compact.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme K est compact, il existe $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{K}$ tels que

$$\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(g_i, \varepsilon). \tag{1}$$

Soit C_1 l'enveloppe convexe des g_i ; c'est l'image du compact

$$\Delta^{n-1} = \{(s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum s_i = 1\}$$

par l'application

$$\theta : \Delta^{n-1} \longrightarrow \mathrm{C}_1, \qquad (s_1, \ldots, s_n) \mapsto \sum_i s_i g_i,$$

qui est continue, puisque

$$\|\theta(s) - \theta(s')\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |s_i - s'_i| \cdot \|g_i\|.$$

Donc C_1 est compact.

Soit $x \in \mathrm{C}$ arbitraire. Alors, il existe $x_1, \ldots, x_p \in \mathrm{K}$ et $(t_1, \ldots, t_p) \in \Delta^{p-1}$ tels que

$$x = t_1 x_1 + \cdots + t_p x_p.$$

D'après (1), à chaque x_i on peut associer un élément y_i de $\mathrm{S} := \{g_1, \ldots, g_n\}$ tel que $\|x_i - y_i\| \leqslant \varepsilon$. Posons

$$x' = \sum_i t_i y_i, \qquad x'' = \sum_i t_i (x_i - y_i).$$

Alors $x' \in \mathrm{C}$ et $x'' \in \mathrm{B}(0, \varepsilon)$. Comme $x = x' + x''$, ceci montre que

$$\mathrm{C} \subseteq \mathrm{C}_1 + \mathrm{B}(0, \varepsilon) = \bigcup_{c \in \mathrm{C}} \mathrm{B}(0, \varepsilon). \tag{2}$$

De plus, C_1 étant compact, il existe un sous-ensemble fini F de C_1 tel que

$$\mathrm{C}_1 \subseteq \mathrm{F} + \mathrm{B}(0, \varepsilon). \tag{3}$$

Donc, (2) et (3) entraînent :

$$\mathrm{C} \subseteq \mathrm{F} + \mathrm{B}(0, \varepsilon) + \mathrm{B}(0, \varepsilon) \subseteq \mathrm{F} + \mathrm{B}(0, 2\varepsilon).$$

Comme ε était arbitrairement choisi, ceci montre que C est totalement borné. Par conséquent, $\overline{\mathrm{C}}$ est compact, d'après le lemme 3.3. Enfin, $\overline{\mathrm{C}}$ est convexe d'après le lemme 3.7 ci-dessous. □

Corollaire 3.6. — *Soit* G *un groupe compact, opérant continument et linéairement dans un espace de Banach* V*. Soit* $f \in \mathrm{V}$ *et soit* C *l'enveloppe convexe de* $\mathrm{G}f$*. Alors* $\overline{\mathrm{C}}$ *est un convexe compact stable par* G.

Démonstration. — Fixons $g \in \mathrm{G}$. Comme l'application $\phi_g : v \mapsto gv$ est continue, $\phi_g^{-1}(\overline{\mathrm{C}})$ est un fermé, qui contient C et donc aussi $\overline{\mathrm{C}}$. Ceci montre que $\overline{\mathrm{C}}$ est G-stable.

D'autre part, l'application $g \mapsto gf$ est continue. Comme G est compact, il en est de même de $\mathrm{G}f$. Donc $\overline{\mathrm{C}}$ est compact, d'après le théorème précédent. Il est convexe d'après le lemme 3.7 ci-dessous. □

Dans la démonstration du théorème 3.5 et du corollaire 3.6, on a utilisé (implicitement en cours) le lemme suivant.

Lemme 3.7. — *Soient* V *un espace vectoriel normé,* C *une partie convexe. Alors* $\overline{\mathrm{C}}$ *est convexe.*

Démonstration. — Soient $x, y \in \overline{\mathrm{C}}$ et $s, t \geqslant 0$ tels que $s + t = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x', y' \in \mathrm{C}$ tels que

$$\|x - x'\| + \|y - y'\| \leqslant \varepsilon.$$

Alors $c = sx' + ty' \in \mathrm{C}$ et $\|(sx + ty) - c\| \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $sx + ty \in \overline{\mathrm{C}}$, donc $\overline{\mathrm{C}}$ est convexe. □

Fin de la séance du 18/9 (en fait, avant le corollaire précédent).