SÉANCE DU 19/9

3. Mesure de Haar sur un groupe compact (suite)

Définition 3.8. — Soit (X, d) un espace métrique, A une partie bornée de X. On note $\delta(\mathrm{A})$ son diamètre, c.-à-d.,

$$\delta(\mathrm{A}) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in \mathrm{A}\}.$$

Lemme 3.9. — 1) *Soient* X *un espace métrique,* A *une partie bornée de* X, *et* $\overline{\mathrm{A}}$ *son adhérence. Alors* $\delta(\overline{\mathrm{A}}) = \delta(\mathrm{A})$.

2) *Soient* V *un espace vectoriel normé,* A *une partie bornée,* C *l'enveloppe convexe de* A. *Alors* $\overline{\mathrm{C}}$ *est un convexe borné et*

$$\delta(\mathrm{A}) = \delta(\mathrm{C}) = \delta(\overline{\mathrm{C}}).$$

Démonstration. — 1) Il est clair que $\delta(\mathrm{A}) \leqslant \delta(\overline{\mathrm{A}})$. Réciproquement, soient $\varepsilon > 0$ et $x, y \in \overline{\mathrm{A}}$. Il existe $x', y' \in \mathrm{A}$ tels que $d(x,x') + d(y,y') < \varepsilon$, alors

$$d(x,y) \leqslant d(x',y') + \varepsilon \leqslant \delta(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

Comme $x, y \in \overline{\mathrm{A}}$ sont arbitraires, il en résulte $\delta(\overline{\mathrm{A}}) \leqslant \delta(\mathrm{A}) + \varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, il vient $\delta(\overline{\mathrm{A}}) \leqslant \delta(\mathrm{A})$, d'où l'égalité.

2) Montrons que $\delta(\mathrm{C}) \leqslant \delta(\mathrm{A})$. Soient $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathrm{A}$ et $t_1, \dots, t_m, s_1, \dots, s_n \in [0,1]$ tels que $\sum_i t_i = 1 = \sum_j s_j$. Utilisant ces deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned}\|\sum_i t_i x_i - \sum_j s_j y_j\| &\leqslant \sum_i t_i \|x_i - \sum_j s_j y_j\| \\ &\leqslant \sum_i t_i \sum_j s_j \|x_i - y_j\| \leqslant \delta(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

---

(0) version du 19/9/06

Ceci montre que C est borné et $\delta(\mathrm{C}) = \delta(\mathrm{A})$. Alors, d'après le point 1), $\delta(\mathrm{C}) = \delta(\overline{\mathrm{C}})$. Enfin, $\overline{\mathrm{C}}$ est convexe d'après le lemme 3.7. □

Lemme 3.10. — *Soient* (X, d) *un espace métrique borné et* G *une famille équicontinue de transformations de* X. *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *soit*

$$\delta_{\mathrm{G}}(x) := \delta(\mathrm{G}x)$$

le diamètre de $\mathrm{G}x$. *Alors, l'application* $x \mapsto \delta_{\mathrm{G}}(x)$ *est continue.*

Démonstration. — Soient $x_0 \in \mathrm{X}$ et $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité de G, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, g \in \mathrm{G},\, \forall\, x \in \mathrm{X}, \quad d(x, x_0) < \eta \Rightarrow d(g(x) - g(x_0)) < \varepsilon/2.$$

Supposons $d(x, x_0) < \eta$ et soient $g, g' \in \mathrm{G}$. Alors

$$d(g(x), g'(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + d(g(x_0)g'(x_0)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc que $\delta_{\mathrm{G}}(x) \leqslant \delta_{\mathrm{G}}(x_0) + \varepsilon$, et de même $\delta_{\mathrm{G}}(x_0) \leqslant \delta_{\mathrm{G}}(x) + \varepsilon$, pour tout $x \in \mathrm{X}$ tel que $d(x, x_0) < \eta$. Ceci prouve la continuité de δ_{G}. □

***Théorème 3.11* (Kakutani)**. — *Soient* V *un espace vectoriel normé,* C *un convexe compact non vide, et* G *un groupe équicontinu de transformations affines de* C.

1) *Si* $\delta(\mathrm{C}) > 0$, *c.-à-d., si* C *contient au moins deux points, il existe un sous-ensemble non-vide,* G*-stable, compact et convexe,* $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}$ *tel que* $\delta(\mathrm{A}) < \delta(\mathrm{C})$.

2) *Par conséquent,* G *a un point fixe dans* C.

Démonstration. — 1) Supposons $\delta(\mathrm{C}) > 0$. Comme G est équicontinu et C compact, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, g \in \mathrm{G},\, \forall\, x, y \in \mathrm{C}, \quad \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(\mathrm{C}). \tag{1}$$

Comme C est compact, il existe $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{C}$ tels que

$$\mathrm{C} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(y_i, \eta). \tag{2}$$

Posons $y = (y_1 + \cdots + y_n)/n$ et soient $c \in \mathrm{C}$ et $g \in \mathrm{G}$ arbitraires. D'après (2), il existe i_0 tel que $\|g^{-1}(c) - y_{i_0}\| < \eta$, et donc, d'après (1),

$$\|c - g(y_{i_0})\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(\mathrm{C}).$$

Alors

$$\|c - g(y)\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|c - g(y_i)\| \leqslant \frac{\delta(\mathrm{C})}{n}\left((n-1) + \frac{1}{2}\right).$$

Il en résulte, en particulier, que Gy est de diamètre

$$\delta' \leqslant (1 - 1/2n)\delta(\mathrm{C}) < \delta(\mathrm{C}).$$

Soit A l'adhérence de l'enveloppe convexe de Gy. Alors A est un convexe non-vide, G-stable, et de diamètre δ', d'après le lemme 3.9. D'autre part, étant un fermé de C qui est compact, A est compact. Ceci prouve le point 1).

Le point 2) en découle. En effet, d'après le lemme 3.10, l'application $c \mapsto \delta(\mathrm{G}c)$ est continue, donc atteint sur le compact C son minimum en un point c_0, et c_0 est un point fixe de G si $\delta(\mathrm{G}c_0) = 0$.

Supposons $\delta(\mathrm{G}c_0) > 0$ et soit X l'adhérence de l'enveloppe convexe de Gc_0. D'après le corollaire 3.6 et le lemme 3.9, X est G-stable, compact, et de diamètre $\delta(\mathrm{G}c_0) > 0$. D'après le point 1), il existe une partie G-stable non-vide $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ telle que $\delta(\mathrm{A}) < \delta(\mathrm{X})$. Alors, pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a

$$\delta(\mathrm{G}a) \leqslant \delta(\mathrm{A}) < \delta(\mathrm{X}) = \delta(\mathrm{G}c_0),$$

une contradiction. Donc $\delta(\mathrm{G}c_0) = 0$, c.-à-d., c_0 est un point fixe. Le théorème est démontré. □

3.4. Mesures de Radon. — Soit X un espace compact.

Définition 3.12. — On note C(X) l'espace des fonctions continues $f : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathrm{X}} |f(x)|.$$

On écrit $f \geqslant 0$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 3.13. — Soit $\nu : \mathrm{C}(\mathrm{X}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. On dit que ν est **positive** si $\nu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \geqslant 0$.

Lemme 3.14. — *Soit* $\nu : \mathrm{C}(\mathrm{X}) \to \mathbb{C}$ *une forme linéaire positive.*

1) *Si* $f \in \mathrm{C}(\mathrm{X})$ *est à valeurs réelles, alors* $\nu(f) \in \mathbb{R}$.

2) *Pour tout* $f \in \mathrm{C}(\mathrm{X})$, *on a*

$$|\nu(f)| \leqslant \nu(|f|) \leqslant \nu(1_{\mathrm{X}})\,\|f\|,$$

(*où* 1_{X} *désigne la fonction de valeur constante* 1). *Donc* ν *est continue.*

Démonstration. — 1) Soit $f \in \mathrm{C}(\mathrm{X})$ à valeurs réelles. Posons

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Alors f^+ et f^- sont continues, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et l'on a $f = f^+ - f^-$. Donc $\nu(f) = \nu(f^+) - \nu(f^-)$ appartient à $\mathbb{R}$.

2) Posons $\nu(f) = re^{-i\theta}$ et soient $g = e^{i\theta}f$ et $u = (g + \overline{g})/2$, $v = (g - \overline{g})/2i$. Alors u et v sont continues et à valeurs réelles, et l'on a

$$|\nu(f)| = r = e^{i\theta}\nu(f) = \nu(e^{i\theta}f) = \nu(g) = \nu(u) + i\nu(v).$$

Comme $\nu(u), \nu(v) \in \mathbb{R}$ d'après 1), il vient $\nu(v) = 0$, d'où $\nu(f) = \nu(u)$. De plus, on a

$$u \leqslant |f| \leqslant \|f\| \cdot 1_{\mathrm{X}},$$

d'où

$$|\nu(f)| = \nu(u) \leqslant \nu(|f|) \leqslant \nu(1_{\mathrm{X}}) \, \|f\|.$$

Le lemme est démontré. □

Définition 3.15. — Une **mesure de Radon** sur X est une forme linéaire continue $\nu : \mathrm{C}(\mathrm{X}) \to \mathbb{C}$. On dit que ν est **positive** si $\nu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \geqslant 0$.

D'après le lemme précédent, toute forme linéaire positive est continue, donc est une mesure de Radon positive.

Remarque 3.16. — Soit X un espace compact X. Se donner une mesure de Radon positive sur X permet d'avoir une bonne théorie de l'intégration sur X. De façon plus précise, on a une correspondance bijective entre mesures de Radon positives et mesures de Borel positives régulières, voir par exemple [**Ru75**, Chap. 2].

3.5. Mesure de Haar sur un groupe compact. — Soit G un groupe compact. Alors C(G) est un espace de Banach, et G y opère linéairement par les translations à gauche L_g et à droite R_g :

$$(\mathrm{L}_g \phi)(x) = \phi(g^{-1}x), \qquad (\mathrm{R}_g \phi)(x) = \phi(xg).$$

On a

$$\|\mathrm{L}_g \phi\| = \sup_{x \in \mathrm{G}} |\phi(x)| = \|\phi\|,$$

donc chaque L_g est une isométrie, et de même pour R_g. Donc les familles $\mathrm{L}_{\mathrm{G}} = \{\mathrm{L}_g \mid g \in \mathrm{G}\}$ et R_{G} sont équicontinues. D'autre part, notons $\phi^{\vee}$ l'application $g \mapsto \phi(g^{-1})$.

Théorème 3.17. — *Soit* G *un groupe compact. Il existe une unique mesure de Radon positive* $\mathrm{M} : \mathrm{C}(\mathrm{G}) \to \mathbb{C}$, *de masse totale* 1, *c.-à-d., telle que* $\mathrm{M}(1) = 1$, *et qui est* G*-invariante à gauche, c.-à-d.,*

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \forall\, \phi \in \mathrm{C}(\mathrm{G}), \quad \mathrm{M}(\mathrm{L}_g \phi) = \mathrm{M}(\phi). \tag{1}$$

De plus, M *est aussi invariante à droite :*

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \forall\, \phi \in \mathrm{C}(\mathrm{G}), \quad \mathrm{M}(\mathrm{R}_g \phi) = \mathrm{M}(\phi), \tag{2}$$

et invariante par inversion :

$$\mathrm{M}(\phi^{\vee}) = \mathrm{M}(\phi). \tag{3}$$

On note $\mathrm{M}(\phi) = \int_{\mathrm{G}} \phi(g) dg$. *Alors, on a les égalités :*

$$\forall\, h \in \mathrm{G}, \quad \int_{\mathrm{G}} \phi(g) dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(h^{-1}g) dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(gh) dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(h^{-1}gh) dg$$

et

$$\int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(g^{-1})dg.$$

Démonstration. — Soit $\phi \in \mathrm{C(G)}$, et soit $\mathrm{C} = \mathrm{C}_\phi$ l'adhérence dans C(G) de l'enveloppe convexe de $\mathrm{L_G}\phi$. D'abord, comme l'application $(g, x) \mapsto \phi(g^{-1}x)$ est uniformément continue sur le compact $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, l'application

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{C(G)}, \qquad g \mapsto \mathrm{L}_g\phi$$

est continue. Par conséquent, son image $\mathrm{L_G}\phi$ est compacte. Donc, d'après le théorème 3.5, C est un convexe compact G-stable.

L'action de G est équicontinue puisque chaque L_g est une isométrie. Donc, d'après le théorème du point fixe de Kakutani, C contient une fonction ψ qui est invariante par $\mathrm{L_G}$, et est donc une constante c.

De même, il existe une fonction constante c' dans l'adhérence C' de l'enveloppe convexe de $\mathrm{R_G}\phi$. Montrons que $c = c'$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g_1, \dots, g_m \in \mathrm{G}$, et $a_1, \dots, a_m > 0$ tels que $\sum a_i = 1$ et

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |c - \sum_i a_i\phi(g_i^{-1}g)| < \varepsilon. \tag{4}$$

De même, il existe $h_1, \dots, h_n \in \mathrm{G}$, et $b_1, \dots, b_n > 0$ tels que $\sum b_j = 1$ et

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |c' - \sum_j b_j\phi(gh_j)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Dans (4), prenons $g = h_j$, multiplions par b_j et sommons pour $j = 1, \dots, n$. Comme $\sum b_j = 1$, on obtient

$$|c - \sum_{j,i} b_j a_i \phi(g_i^{-1}h_j)| < \varepsilon. \tag{6}$$

De même, dans (5), prenons $g = g_i^{-1}$, multiplions par a_i et sommons pour $i = 1, \dots, m$. Comme $\sum a_i = 1$, on obtient

$$|c' - \sum_{i,j} a_i b_j \phi(g_i^{-1}h_j)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Il résulte de (6) et (7) que $|c - c'| < 2\varepsilon$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, $c = c'$.

Il en résulte que c est **l'unique** point fixe de $\mathrm{L_G}$ dans C ; en effet, si c_1 en est un autre, alors $c_1 = c' = c$. (Joli, n'est-ce pas ?) C'est aussi l'unique point fixe de $\mathrm{R_G}$ dans C'.

Donc, à chaque $\phi \in \mathrm{C(G)}$, on associe un scalaire $\mathrm{M}(\phi) \in \mathbb{C}$, qui est l'unique fonction constante contenue dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\mathrm{L_G}\phi$, resp. de $\mathrm{R_G}\phi$.

Il résulte de la construction que $\mathrm{M}(\phi) \in \mathbb{R}_+$ si $\phi \geqslant 0$, que $\mathrm{M}(1) = 1$, et que

$$\mathrm{M}(\mathrm{L}_g\phi) = \mathrm{M}(\phi) = \mathrm{M}(\mathrm{R}_g\phi), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Montrons que M est **linéaire**. Il résulte de la construction que $\mathrm{M}(a\phi) = a\mathrm{M}(\phi)$ pour tout $a \in \mathbb{C}$. Montrons que

$$(*) \qquad \mathrm{M}(\phi + \psi) = \mathrm{M}(\phi) + \mathrm{M}(\psi).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g_1, \dots, g_m \in \mathrm{G}$, et $a_1, \dots, a_m > 0$ tels que $\sum a_i = 1$ et

$$(8) \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |\mathrm{M}(\phi) - \sum_i a_i \phi(g_i^{-1}g)| < \varepsilon.$$

Posons, pour tout $g \in \mathrm{G}$,

$$\theta(g) = \sum_i a_i \psi(g_i^{-1}g).$$

Alors $\theta \in \mathrm{C}_\psi$ et donc $\mathrm{C}_\theta \subseteq \mathrm{C}_\psi$. Comme $\mathrm{M}(\psi)$ est l'unique fonction constante contenue dans C_ψ, on obtient $\mathrm{M}(\theta) = \mathrm{M}(\psi)$. Donc il existe $h_1, \dots, h_n \in \mathrm{G}$, et $b_1, \dots, b_n > 0$ tels que $\sum b_j = 1$ et

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |\mathrm{M}(\psi) - \sum_j b_j \theta(h_j^{-1}g)| < \varepsilon,$$

c.-à-d.,

$$(9) \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |\mathrm{M}(\psi) - \sum_{j,i} b_j a_i \psi(g_i^{-1}h_j^{-1}g)| < \varepsilon.$$

Or, remplaçant dans (8) g par $h_j^{-1}g$, multipliant par b_j et sommant pour $j = 1, \dots, n$, on obtient

$$(10) \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |\mathrm{M}\phi - \sum_{j,i} b_j a_i \phi(g_i^{-1}h_j^{-1}g)| < \varepsilon.$$

De (9) et (10) on déduit que les éléments $h_j g_i \in \mathrm{G}$ et $a_i b_j \in [0,1]$ vérifient $\sum_{i,j} a_i b_j = 1$ et

$$(11) \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad |\mathrm{M}(\phi) + \mathrm{M}(\psi) - \sum_{j,i} b_j a_i (\phi + \psi)((h_j g_i)^{-1}g)| < 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, il en résulte que $\mathrm{M}(\phi) + \mathrm{M}(\psi) \in \mathrm{C}_{\phi+\psi}$, d'où $\mathrm{M}(\phi) + \mathrm{M}(\psi) = \mathrm{M}(\phi + \psi)$. Ceci prouve la linéarité de M. Donc, M est une mesure de Radon positive, de masse totale 1, et elle vérifie les conditions (1) et (2) du théorème.

Si $\mathrm{M}' : \mathrm{C}(\mathrm{G}) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire positive invariante par L_G, et telle que $\mathrm{M}'(1) = 1$, on a nécessairement $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$. En effet, soit $\phi \in \mathrm{C}(\mathrm{G})$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction constante $\mathrm{M}(\phi)$ est dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\mathrm{L}_{\mathrm{G}}\phi$, il existe $g_1,\dots,g_m \in \mathrm{G}$, et $a_1,\dots,a_m > 0$ tels que $\sum a_i = 1$ et

$$(\dagger) \qquad \|\mathrm{M}(\phi) - \sum_i a_i \mathrm{L}_{g_i}\phi\| < \varepsilon.$$

Posons $\gamma = \mathrm{M}(\phi) - \sum_i a_i \mathrm{L}_{g_i}\phi$. Comme M' est L_{G}-invariante et vérifie $\mathrm{M}'(1) = 1$, alors ($\dagger$) entraîne, d'après le lemme 3.14,

$$|\mathrm{M}(\phi) - \mathrm{M}'(\phi)| = |\mathrm{M}'(\gamma)| \leqslant \mathrm{M}'(1)\cdot\|\gamma\| \leqslant \varepsilon,$$

d'où, ε étant arbitraire, $\mathrm{M}'(\phi) = \mathrm{M}(\phi)$. Ceci montre que M est l'unique mesure de Radon positive, de masse totale 1, qui soit invariante à gauche (resp. à droite).

Enfin, posons $\mathrm{M}'(\phi) = \mathrm{M}(\phi^\vee)$. C'est une mesure de Radon positive, de masse totale 1, qui vérifie (1) et (2). Donc $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$, c.-à-d., M est invariante par inversion. Ceci prouve (3). □

Soit $k : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathrm{G}$, la fonction $y \mapsto k(x, y)$ est continue, et l'on pose

$$\mathrm{K}(x) = \int_{\mathrm{G}} k(x,y)dy, \qquad \mathrm{K}'(y) = \int_{\mathrm{G}} k(x,y)dx.$$

Alors K et K′ sont continues, puisque k est uniformément continue sur le compact $\mathrm{G}\times\mathrm{G}$. On peut donc considérer les intégrales

$$\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}'(y)dy.$$

***Corollaire 3.18* (Théorème de Fubini).** — *On a*

$$\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x)dx = \int_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} k(x,y)dxdy = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}'(y)dy.$$

Démonstration. — Montrons la première égalité. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des g_i et h_j dans G et des $s_i, t_j > 0$ tels que $\sum_i s_i = 1 = \sum_j t_j$ et

$$\forall\, y \in \mathrm{G}, \quad |\mathrm{K}(x) - \sum_i s_i k(x, g_i^{-1}y)| < \varepsilon/2,$$

$$\forall\, x \in \mathrm{G}, \quad \left|\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(g)dg - \sum_j t_j \mathrm{K}(h_j^{-1}x)\right| < \varepsilon/2.$$

Donc, les éléments (h_j, g_i) de $\mathrm{G}\times\mathrm{G}$ et $t_j s_i > 0$ vérifient $\sum_{i,j} t_j s_i = 1$ et

$$\forall\, (x,y) \in \mathrm{G}\times\mathrm{G}, \quad \left|\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(g)dg - \sum_{i,j} s_i t_j k(h_j^{-1}x, g_i^{-1}y)\right| < \varepsilon.$$

Ceci montre que le scalaire $\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(g)dg$ est dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\mathrm{L}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}}k$, d'où

$$\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(g)dg = \int_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} k(x,y)dxdy.$$

Ceci prouve la première égalité, et la seconde s'obtient de façon analogue. □

4. Représentations unitaires et théorème de Peter-Weyl

4.1. Représentations continues. — Soit V un $\mathbb{C}$-espace de Banach. On note Aut(V) le groupe des automorphismes de V, c.-à-d., des applications linéaires bijectives et bicontinues $f : \mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$. D'après le théorème de l'application ouverte, toute application linéaire continue et bijective $\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ est bicontinue (c.-à-d., son inverse est également continue), voir par exemple [**Ru75**, Thm. 5.10]. Donc, Aut(V) est le groupe des applications linéaires continues bijectives.

Définition 4.1. — Soit G un groupe topologique. Une **représentation continue** de G dans l'espace de Banach V est la donnée d'un morphisme de groupes $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{V})$ tel que l'application

$$\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \quad (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

soit continue.

On dit que π est topologiquement irréductible si V ne possède pas de sous-espace **fermé** G-stable autre que $\{0\}$ et V.

On rappelle que sur un espace vectoriel complexe ou réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et tout sous-espace est complet donc fermé. Par conséquent, une représentation de dimension finie est topologiquement irréductible si et seulement si elle est (algébriquement) irréductible.

Supposons que G soit un groupe compact. On peut tirer un premier bénéfice de la construction de la mesure de Haar sur G.

Proposition 4.1. — *Soit* G *compact. Toute représentation continue de dimension finie est somme directe de représentations continues irréductibles.*

Démonstration. — On suit pas à pas la démonstration dans le cas où G est fini. Choisissant une base de V, on identifie $\mathrm{V} = \mathbb{C}^n$. On munit V du produit scalaire hermitien usuel, qu'on désigne par $\langle -, - \rangle$. Pour $x, y \in \mathrm{V}$, l'application $g \mapsto \langle gx, gy \rangle$ est continue ; on pose

$$(x, y) = \int_{\mathrm{G}} \langle gx, gy \rangle dg.$$

Alors $(-,-)$ est hermitien symétrique, et il est défini positif puisque pour $x \neq 0$ on a

$$(x, x) = \int_{\mathrm{G}} \langle gx, gx \rangle dg > 0.$$

Donc $(-,-)$ est un nouveau produit scalaire hermitien sur V. De plus, il est G-invariant, par invariance de la mesure de Haar. En effet, pour tout $h \in \mathrm{G}$, on a

$$(hx, hy) = \int_{\mathrm{G}} \langle ghx, ghy \rangle dg = \int_{\mathrm{G}} \langle gx, gy \rangle dg = (x, y).$$

La norme définie par ce produit scalaire est équivalente à la norme initiale, et si W un sous-espace G-stable de V, alors l'application $\mathrm{G} \times \mathrm{W} \to \mathrm{W}$, obtenue par restriction, est continue. Le reste de la démonstration est alors identique au cas où G est fini.

4.2. Représentations unitaires. —

Définition 4.2. — Soit H un espace de Hilbert, de dimension finie ou infinie. Un opérateur linéaire $u : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ est dit **unitaire** s'il préserve le produit scalaire, c.-à-d., si $(u(x), u(y)) = (x, y)$ pour tout $x, y \in \mathrm{H}$. Dans ce cas, $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x, donc u est une isométrie et est continu.

Réciproquement, si u est une isométrie, alors u préserve le produit scalaire, car en calculant

$$\|u(x + y)\| \quad \text{et} \quad \|u(x - iy)\|$$

on voit que (ux, uy) a la même partie réelle et imaginaire que (x, y).

Si u est un opérateur unitaire **bijectif**, l'application inverse est aussi unitaire, donc une isométrie et a fortiori continue. On notera U(H) le groupe des opérateurs unitaires bijectifs.

Si G est un groupe compact, on a vu que toute représentation continue de dimension finie de G peut être munie d'un produit scalaire hilbertien G-invariant, c.-à-d., d'une structure d'espace de Hilbert pour laquelle G agit par des opérateurs unitaires. D'autre part, les espaces de Hilbert sont les espaces vectoriels normés de dimension infinie qui sont les plus proches des espaces de dimension finie. Ceci conduit à étudier, pour un groupe topologique G quelconque, les représentations de G par des transformations unitaires dans un espace de Hilbert H. Il faut aussi tenir compte de la topologie de G, c.-à-d., demander que l'action de G sur H soit continue.

Définition 4.3. — Soit G un groupe topologique. Une **représentation unitaire** de G dans un espace de Hilbert H est la donnée d'un morphisme de groupes $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{U(H)}$ tel que l'application

$$\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}, \quad (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

soit continue. En fait, il suffit de demander que, pour tout $x_0 \in \mathrm{H}$, l'application $g \mapsto \pi(g)x_0$ soit continue en 1, l'élément neutre de G.

En effet, supposons cette condition vérifiée et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de 1 dans G tel que

$$\forall\, h \in \mathscr{V}, \qquad \|(\pi(h) - \mathrm{id})x_0\| < \varepsilon/2.$$

Soit $g_0 \in \mathrm{G}$ arbitraire. Alors, pour tout $g \in g_0\mathscr{V}$ et $x \in \mathrm{B}(x_0, \varepsilon/2)$ on a, puisque $\pi(g)$ et $\pi(g_0)$ sont des isométries :

$$\|\pi(g)x - \pi(g_0)x_0\| \leqslant \|\pi(g)(x - x_0)\| + \|\pi(g_0)(\pi(g_0^{-1}g) - \mathrm{id})x_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que μ est continue en (g_0, x_0).

4.3. Opérateurs compacts. —

Définition 4.4. — Soient E, F deux espaces de Banach et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un opérateur linéaire. On dit que u est **compact** si l'image par u de la boule unité de E a une adhérence compacte.

Définition 4.5. — Soit H un espace de Hilbert, et $\mathrm{K} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ un opérateur linéaire continu. On dit que K est **auto-adjoint** si l'on a :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{H}, \qquad (\mathrm{K}x, y) = (x, \mathrm{K}y).$$

On a le théorème suivant, de décomposition spectrale pour les opérateurs compacts auto-adjoints.

Théorème 4.6. — *Soient* H *un espace de Hilbert et* $\mathrm{K} \neq 0$ *un opérateur compact auto-adjoint. Alors :*

1) *Les valeurs propres de* K *sont réelles et les espaces propres* H_λ *sont deux à deux orthogonaux. De plus,* K *a pour valeur propre* $\pm\|\mathrm{K}\| \neq 0$.

2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}_\lambda < \infty$ *si* $\lambda \neq 0$, *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il n'y a qu'un nombre fini de valeur propres* λ *telles que* $|\lambda| \geqslant \varepsilon$ *; c.-à-d., l'espace*

$$\bigoplus_{|\lambda| > \varepsilon} \mathrm{H}_\lambda$$

est de dimension finie.

3) $\bigoplus_\lambda \mathrm{H}_\lambda$ *est dense dans* H.

Démonstration. — Voir [**BtD**, III.2.6] ou [**Zi**, § 3.2]. □

Fin de la séance du 19/9

4.4. Opérateurs à noyaux. —

***Théorème 4.7* (Ascoli).** — *Soit* X *un espace compact et* Φ *un sous-ensemble de* C(X)*. On suppose que* Φ *est équicontinu et que pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, l'ensemble*

$$\Phi(x) := \{\phi(x) \mid \phi \in \Phi\}$$

est une partie bornée de $\mathbb{C}$*. Alors,* Φ *est totalement borné dans* C(X)*, donc son adhérence est compacte.*

Démonstration. — Voir par exemple [**Di81**, 6.3.1] ou [**Ru73**, Appendix, A5]. □

Soit G un groupe compact. Sur C(G), on peut introduire le produit scalaire hermitien

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)\overline{\psi(g)}dg,$$

et donc la norme $\|\phi\|_2 = \sqrt{(\phi, \phi)}$. On note $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ le complété de C(G) pour cette norme. Alors l'inclusion $\tau : \mathrm{C(G)} \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ est continue et son image est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$.

Pour tout $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, la forme linéaire

$$(-, \phi) : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \psi \mapsto (\psi, \phi)$$

est continue, car

$$|(\psi, \phi)| \leqslant \|\phi\|_2 \cdot \|\psi\|_2 \tag{1}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $k \in \mathrm{C(G \times G)}$. Pour chaque $x \in \mathrm{G}$, l'application $k_x : y \mapsto k(x, y)$ est continue ; de plus, comme k est uniformément continue sur le compact $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, alors l'application

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{C(G)}, \qquad x \mapsto k_x$$

est continue. Pour tout $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, définissons $\mathrm{K}(\phi)$ par

$$\mathrm{K}(\phi)(x) = \int_{\mathrm{G}} k(x, y)\phi(y)dy = (k_x, \overline{\phi}). \tag{2}$$

D'après ce qui précède, $\mathrm{K}(\phi)$ est une fonction continue. On a donc défini un opérateur linéaire

$$\mathrm{K} : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{C(G)} \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G}).$$

***Lemme 4.8*.** — 1) *L'opérateur* $\mathrm{K} : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \to \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *est compact.*

2) *Si de plus* k *vérifie* $k(y, x) = \overline{k(x, y)}$*, alors* K *est auto-adjoint.*

Démonstration. — 1) Posons $\mathrm{M} = \|k\|_\infty = \sup_{(x,y)\in \mathrm{G}\times\mathrm{G}} |k(x,y)|$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{G}$, on a $\|k_x\|_2 \leqslant \mathrm{M}$. Combinant ceci avec (2) et (1), on obtient

$$|\mathrm{K}(\phi)(x)| \leqslant \mathrm{M} \cdot \|\phi\|_2.$$

Il en résulte que la famille de fonctions

$$\mathscr{F} := \{\mathrm{K}(\phi) \mid \|\phi\|_2 \leqslant 1\}$$

est équicontinue et uniformément bornée. Donc, d'après le théorème d'Ascoli, son adhérence $\overline{\mathscr{F}}$ dans C(G) est compacte. Comme l'inclusion $\tau : \mathrm{C}(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ est continue, alors $\tau(\overline{\mathscr{F}})$ est compact et coïncide donc avec l'adhérence de $\mathscr{F}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. Ceci montre que K est compact.

2) On a

$$(\mathrm{K}(\phi), \psi) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(\phi)(y)\overline{\psi(y)}dy = \int_{\mathrm{G}} \left(\int_{\mathrm{G}} k(y,x)\phi(x)dx\right)\overline{\psi(y)}dy,$$

et d'après le théorème de Fubini (3.18), ceci égale

$$\int_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} k(y,x)\phi(x)\overline{\psi(y)}dxdy.$$

On montre de même que

$$(\phi, \mathrm{K}(\psi)) = \int_{\mathrm{G}} \phi(x)\left(\int_{\mathrm{G}} \overline{k(x,y)\psi(y)}dy\right)dx = \int_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} \overline{k(x,y)}\phi(x)\overline{\psi(y)}dxdy,$$

et l'assertion 2) en découle. □

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[HR] E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis I, Springer, 1963, 2nd edition, 1979.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va84] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Va99] V. S. Varadarajan, An introduction to harmonic analysis on semi-simple Lie groups, Cambridge Univ. Press 1989, paperback edition with corrections, 1999.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.