PARTIE FI : GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE SÉANCE DU 6 NOVEMBRE

1. Exponentielle et action adjointe

1.0. Un « rappel » sur espaces tangents et différentielles. —

Proposition 1.0.1. — *Soient* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ *des variétés* C^∞, $\phi : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *un morphisme de variétés, et* $x_0 \in \mathrm{X}$, $y_0 \in \mathrm{Y}$. *Alors*

$$\mathrm{T}_{(x_0,y_0)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}.$$

De plus, si l'on fait cette identification, alors

$$d_{(x_0,y_0)}\phi = d_{x_0}\phi^{y_0} + d_{y_0}\phi_{x_0},$$

où $\phi^{y_0} : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *et* $\phi_{x_0} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *sont les morphismes définis par*

$$\phi^{y_0}(x) = \phi(x, y_0) \quad \textit{et} \quad \phi_{x_0}(y) = \phi(x_0, y), \qquad \forall\, x \in \mathrm{X},\ y \in \mathrm{Y}.$$

Démonstration. — L'isomorphisme $\mathrm{T}_{(x_0,y_0)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}$ résulte de la définition des variétés produits et espaces tangents (voir 7.5 et 7.46, séances des 2 et 3 octobre).

Notons τ^{y_0} l'immersion $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, $x \mapsto (x, y_0)$ et définissons de façon analogue l'immersion $\tau_{x_0} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Alors, $d_{x_0}\tau^{y_0}$ et $d_{y_0}\tau_{x_0}$ sont les inclusions ci-dessous :

$$\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \overset{d_{x_0}\tau^{y_0}}{\hookrightarrow} \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y} \overset{d_{y_0}\tau_{x_0}}{\hookleftarrow} \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}.$$

De plus, $\phi^{y_0} = \phi \circ \tau^{y_0}$ et $\phi_{x_0} = \phi \circ \tau_{x_0}$. Le résultat en découle. En effet, soit $(u, v) \in \mathrm{T}_{(x_0,y_0)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}$. Alors,

$$\begin{aligned}(d_{(x_0,y_0)}\phi)(u, v) &= (d_{(x_0,y_0)}\phi)(u, 0) + (d_{(x_0,y_0)}\phi)(0, v)\\ &= d_{x_0}(\phi \circ \tau^{y_0})(u) + d_{y_0}(\phi \circ \tau_{x_0})(v)\\ &= (d_{x_0}\phi^{y_0} + d_{y_0}\phi_{x_0})(u, v).\end{aligned}$$

□

[0] version du 13/11/06

À titre d'application, signalons le corollaire suivant. Soit G un groupe de Lie. Notons $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ la multiplication, $\iota : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le passage à l'inverse, et désignons par $d\mu$, resp. $d\iota$, leur différentielles au point (e, e), resp. e.

Corollaire 1.0.2. — *On a* $d\mu(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ *et* $\mathrm{d}\iota(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$*, pour* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}_e(\mathrm{G})$*.*

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 1.0.1, car $\mu(e, \cdot) = \mathrm{id}_\mathrm{G} = \mu(\cdot, e)$. D'autre part, $\mu \circ (\mathrm{id}, \iota)$ est l'application constante $\mathrm{G} \to \{e\}$. On en déduit que $0 = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_e(\mathrm{G})} + \mathrm{d}\iota$, d'où la seconde assertion. □

1.1. Champs de vecteurs et flots. — Commençons par quelques résultats concernant l'intégration des champs de vecteurs.

Soient M une variété C^∞ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ une application C^∞, où $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide. On rappelle que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, la différentielle $d_t f$ de f au point t est une application linéaire $\mathbb{R} \to \mathrm{T}_{f(t)}\mathrm{M}$ et l'on désigne par $f'(t)$ sa valeur sur le vecteur $1 \in \mathbb{R}$, c.-à-d., $f'(t) = (d_t f)(1)$.

***Définition 1.1* (Courbes intégrales)**. — Soient M une variété C^∞ et X un champ de vecteurs C^∞ sur M. Une **courbe intégrale** de X est une application C^∞ f d'un intervalle ouvert non vide $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ dans M telle que :

$$(*) \qquad \forall\, t \in \mathrm{I}, \qquad f'(t) = \mathrm{X}(f(t)).$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une *solution* de (l'équation différentielle définie par) $(*)$. On dit que (f, I) est une courbe intégrale (ou solution) **maximale** si f ne peut être prolongée en une courbe intégrale sur un intervalle contenant strictement I.

***Théorème 1.2* (Existence locale et unicité)**. — *Soient* M *une variété* C^∞ *et* X *un champ de vecteurs* C^∞ *sur* M.

1) *Pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{M}$*, il existe un intervalle ouvert* I *contenant* t_0 *et une application* C^∞ $f : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ *vérifiant* $(*)$ *et* $f(t_0) = x_0$*.*

2) *Si* I, J *sont deux intervalles ouverts contenant* t_0 *et si* $f : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ *et* $g : \mathrm{J} \to \mathrm{M}$ *sont deux solutions de* $(*)$ *telles que* $f(t_0) = x_0 = g(t_0)$*, alors* f *et* g *coïncident sur* $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ *et se recollent donc en une solution* h *de* $(*)$*, vérifiant* $h(t_0) = x_0$ *et définie sur l'intervalle* $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$*.*

3) *Par conséquent, il existe une unique courbe intégrale maximale passant par* x_0 *au temps* t_0*, définie sur un intervalle* $\mathrm{I}(t_0, x_0)$*. On la note*

$$t \mapsto \phi(t_0, x_0, t) \qquad \textit{ou simplement} \qquad t \mapsto \phi_t(x_0)$$

si t_0 *est déterminé par le contexte, par exemple si l'on a fixé* $t_0 = 0$*.*

Démonstration. — Voir [**Ca**, 1ère partie, II, § § 1 & 3] ou [**Ma**, § II.2]. □

Définition 1.3. — Un **groupe à un paramètre de difféomorphismes** de M est une famille $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de difféomorphismes de M telle que :

$$\text{l'application} : \mathbb{R}\times\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}, \quad (t,x)\mapsto \phi_t(x) \quad \text{est } \mathrm{C}^\infty\,;$$

$$\phi_0 = \mathrm{id}_\mathrm{M}, \qquad \phi_s\circ\phi_t = \phi_{s+t}, \quad \forall\, s,t\in\mathbb{R}.$$

Soient M une variété C^∞ et X un champ de vecteurs C^∞ sur M. Pour tout $x_0\in\mathrm{M}$, on note $t\mapsto\phi_t^\mathrm{X}(x_0)$, ou simplement $t\mapsto\phi_t(x_0)$ si le champ de vecteurs X est sous-entendu, la solution maximale de l'équation :

$$(*)\qquad f'(t) = \mathrm{X}(f(t)), \qquad f(0) = x_0,$$

et l'on note I_{x_0} son domaine de définition. Soit alors :

$$\Omega = \bigcup_{x_0\in\mathrm{M}}\{x_0\}\times\mathrm{I}_{x_0}\subseteq\mathrm{M}\times\mathbb{R}$$

et soit $\Phi=\Phi^\mathrm{X}$ l'application $\Omega\to\mathrm{M}$ définie par

$$\Phi(x_0,t) = \phi_t(x_0), \qquad \forall\, x_0\in\mathrm{M},\ t\in\mathrm{I}_{x_0}.$$

Enfin, pour $t\in\mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{U}_t = \{x_0\in\mathrm{M}\mid t\in\mathrm{I}_{x_0}\} = \Omega\cap(\mathrm{M}\times\{t\}).$$

***Théorème 1.4* (Flot d'un champ de vecteurs)**. — 1) *Ω est un ouvert de $\mathrm{M}\times\mathbb{R}$, contenant $\mathrm{M}\times\{0\}$, et l'application Φ est C^∞. De plus, $\phi_0=\mathrm{id}_\mathrm{M}$.*

2) *Pour tout $(x,t)\in\Omega$ et $s\in\mathbb{R}$, on a :*

a) $(x,t+s)\in\Omega\Leftrightarrow(\phi_t(x),s)\in\Omega$;
b) $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ si a) est réalisé.

2′) *Pour tout $t\in\mathbb{R}$, U_t est un ouvert de M et, si $\mathrm{U}_t\neq\varnothing$, alors ϕ_t est un difféomorphisme C^∞ de U_t sur U_{-t}, dont le difféomorphisme inverse est ϕ_{-t}. De plus, pour tout $s,t\in\mathbb{R}$ on a :*

$$\mathrm{U}_t\cap\mathrm{U}_{s+t} = \{x\in\mathrm{U}_t\mid\phi_t(x)\in\mathrm{U}_s\} \quad\text{et}\quad \phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x),\ \ \forall\, x\in\mathrm{U}_t\cap\mathrm{U}_{t+s}.$$

3) *L'application $x\mapsto\mathrm{I}_x$ est* « semi-continue » *en ce sens que I_x ne peut que croître par spécialisation, c.-à-d., pour tout $x\in\mathrm{M}$ il existe un voisinage V_x de x dans M tel que :*

$$\forall\, x'\in\mathrm{V}_x, \qquad \mathrm{I}_x\subseteq\mathrm{I}_{x'}.$$

Démonstration. — Voir [**Le**, § IV.1] . □

Remarque 1.5. — On appelle $\Phi=\Phi^\mathrm{X}$ le **flot** de X. On exprime parfois la propriété 2′) en disant que Φ est un pseudo-groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux.

Exemples 1.6. — Pour illustrer les résultats du théorème, le lecteur pourra étudier les exemples suivants.

1) $\mathrm{M} = \mathbb{R}$, $\mathrm{X}(x) = x^2$, cf. [**Le**, § IV.1.C].
2) $\mathrm{M} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{X}(x, y) = y^2(1 + x^2)e_1 = (y^2(1 + x^2), 0)$.
3) $\mathrm{M} = \mathbb{R}$, $\mathrm{X}(x) = \sin x$.

Définition 1.7. — On dit que le champ de vecteurs X est **complet** si pour tout $x \in \mathrm{M}$ on a $\mathrm{I}_x = \mathbb{R}$, c.-à-d., si $\phi_t^{\mathrm{X}}(x)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.2. Exponentielle d'un groupe de Lie. — Soit G un groupe de Lie. On désignera son élément neutre par 1 ou e, selon le contexte. Pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathrm{T}_1\mathrm{G}$, on désignera par $\mathbf{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé, c.-à-d.,

$$\mathbf{X}_1 = \mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X}_g = d_1\ell_g(\mathrm{X}), \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Définition 1.8. — Un **sous-groupe à un paramètre** de G (en abrégé : **1-psg**) est un morphisme de groupes de Lie $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$.

Théorème 1.9. — *Soient* $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *et* $\mathbf{X}$ *le champ de vecteurs invariant à gauche associé. Alors* $\mathbf{X}$ *est complet et le flot associé est* G*-invariant, c.-à-d., vérifie*

$$\phi_t(g) = g\,\phi_t(e), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ g \in \mathrm{G}.$$

Par conséquent, l'application

$$\alpha_{\mathrm{X}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad t \mapsto \phi_t(e)$$

est un morphisme de groupes de Lie.

Réciproquement, si θ est un 1-psg *alors $\theta = \alpha_{\mathrm{X}}$, où $\mathrm{X} = \theta'(0)$. Par conséquent, on a une bijection*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \leftrightarrow \{1\text{-psg } de \ \mathrm{G}\}.$$

Démonstration. — Notons $\Phi : (g, t) \mapsto \phi_t(g)$ le flot associé à $\mathbf{X}$. Soit $\mathrm{I} = \mathrm{I}_e$ le domaine de définition de la courbe intégrale maximale $\alpha : t \mapsto \phi_t(e)$ telle que $\alpha(0) = e$. Alors I est un intervalle ouvert contenant 0 et il s'agit de montrer que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, et que

$$\phi_t(g) = g\,\phi_t(e), \qquad \forall\, t \in \mathrm{I},\ g \in \mathrm{G}.$$

Soient $s \in \mathrm{I}$ et $g \in \mathrm{G}$. Posons

$$(\dagger) \qquad \beta(t) = g\alpha(t - s), \qquad \forall\, t \in s + \mathrm{I}.$$

Alors, pour tout $t \in s + \mathrm{I}$, $\beta'(t)$ égale :

$$(d_{\alpha(t-s)}\ell_g)(\alpha'(t - s)) = (d_{\alpha(t-s)}\ell_g)(\mathbf{X}(\alpha(t - s))) = \mathbf{X}(g\alpha(t - s)) = \mathbf{X}(\beta(t)).$$

Donc $t \mapsto \beta(t)$ est une courbe intégrale de $\mathbf{X}$, définie sur $s + \mathrm{I}$ et telle que $\beta(s) = g\alpha(0) = g$.

Prenant $g = 1$, on obtient que α et β coïncident sur l'intervalle $\mathrm{I} \cap (s + \mathrm{I})$, donc α se prolonge à l'intervalle $\mathrm{I} \cup (s + \mathrm{I})$. Par maximalité de I, ceci entraîne que

$$s + \mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}, \qquad \forall\, s \in \mathrm{I},$$

et on en déduit que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Alors, pour g arbitraire et $s = 0$, $\beta(t) = g\alpha(t)$ est la courbe intégrale maximale de $\mathbf{X}$ telle que $\beta(0) = g$, d'où

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_t(g) = g\,\phi_t(e).$$

En particulier, pour $g = \phi_s(e)$ on obtient que

$$\alpha_{\mathrm{X}}(s + t) = \phi_{t+s}(e) = \phi_t(\phi_s(e)) = \phi_s(e)\phi_t(e) = \alpha_{\mathrm{X}}(s)\alpha_{\mathrm{X}}(t).$$

Comme $\alpha_{\mathrm{X}} : t \mapsto \alpha_{\mathrm{X}}(t)$ est C^∞, c'est donc un morphisme de groupes de Lie $\mathbb{R} \to \mathrm{G}$. Enfin, comme $\alpha'_{\mathrm{X}}(0) = \mathrm{X}$, l'application $\mathrm{X} \mapsto \alpha_{\mathrm{X}}$ est injective.

Réciproquement, soit θ un 1-psg et soient $\mathrm{X} = \theta'(0)$ et $\mathbf{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé. Alors, en dérivant par rapport à s, en $s = 0$, l'égalité

$$\theta(s + t) = \theta(t)\theta(s) = (\ell_{\theta(t)} \circ \theta)(s)$$

on obtient

$$\theta'(t) = d_1\ell_{\theta(t)}(\theta'(0)) = d_1\ell_{\theta(t)}(\mathbf{X}_1) = \mathbf{X}(\theta(t)).$$

Donc θ est la courbe intégrale de $\mathbf{X}$ passant par e en $t = 0$, d'où $\theta = \alpha_{\mathrm{X}}$. Ceci prouve la bijection annoncée. Le théorème est démontré. □

Corollaire 1.10. — *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *et* $t \in \mathbb{R}$, *on a* $\alpha_{t\mathrm{X}}(1) = \alpha_{\mathrm{X}}(t)$.

Démonstration. — L'application $\phi : s \mapsto \alpha_{\mathrm{X}}(ts)$ est un 1-psg, et $\phi'(0) = t\alpha'_{\mathrm{X}}(0) = t\mathrm{X}$. Donc ϕ coïncide avec $\alpha_{t\mathrm{X}}$. □

***Définition 1.11* (L'application exponentielle)**. — On pose $\exp(\mathrm{X}) = \alpha_{\mathrm{X}}(1)$. Alors $\exp(0) = e$ et, d'après le corollaire précédent,

$$\exp((s + t)\mathrm{X}) = \alpha_{\mathrm{X}}(s + t) = \alpha_{\mathrm{X}}(s)\alpha_{\mathrm{X}}(t) = \exp(s\mathrm{X})\exp(t\mathrm{X}), \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.12. — Pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, l'application exponentielle usuelle :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad t \mapsto \sum_{k \geqslant 0} \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{X}^k$$

est un 1-psg, dont la dérivée en 0 est X. Ceci montre que pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'exponentielle de Lie définie plus haut coïncide avec l'exponentielle usuelle des matrices. Ceci explique la notation $\exp = \exp_{\mathrm{G}}$ pour G un groupe de Lie arbitraire.

Soit G^0 la composante connexe de G. Posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}^0)$.

Théorème 1.13. — 1) *L'application* $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ *est* C^∞.

2) $d_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. *Par conséquent,* $\exp$ *est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert* U *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *sur un voisinage ouvert* V *de* e *dans* G.

3) *Le sous-groupe engendré par* V (*ou par* $\exp(\mathfrak{g})$) *égale* G^0.

Démonstration. — 1) Considérons la variété $\mathrm{M} = \mathrm{G} \times \mathfrak{g}$ et le champ de vecteurs v sur M défini par

$$v(g, \mathrm{X}) = (d_1\ell_g(\mathrm{X}), 0) = (\mathbf{X}_g, 0).$$

Il est C^∞. Son flot est l'application

$$\Psi : \mathrm{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}, \qquad ((g, \mathrm{X}), t) \mapsto (\phi_t^{\mathrm{X}}(g), \mathrm{X}),$$

qui est donc C^∞. Notons pr_1 la projection $\mathrm{M} \to \mathrm{G}$ et τ l'inclusion de la sous-variété

$$\mathfrak{g} = \{e\} \times \mathfrak{g} \times \{1\} \quad \text{dans} \quad \mathrm{G} \times \mathfrak{g} \times \mathbb{R}.$$

Alors $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ égale $\mathrm{pr}_1 \circ \Psi \circ \tau$ donc est C^∞. Ceci prouve le point 1).

Montrons le point 2). Pour toute courbe C^∞ $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ telle que $f(0) = 0$, on a

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(f(t)) = (d_0 \exp)(f'(t)).$$

Appliquant ceci à la courbe $f(t) = t\mathrm{X}$, on obtient que

$$(d_0 \exp)(\mathrm{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{X}, \qquad \forall\, \mathrm{X} \in \mathfrak{g}.$$

Ceci montre que $d_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. La dernière assertion du point 2) résulte alors du théorème d'inversion locale.

Enfin, comme exp est continue et $\mathfrak{g}$ connexe, alors $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{G}^0$. D'autre part, comme V est un voisinage ouvert de e, le sous-groupe engendré par V égale G^0, d'après le lemme 6.18 (séance du 26/9) que nous rappelons ci-dessous. □

Lemme 1.14. — *Soit* G *un groupe topologique* **connexe** *et soit* V *un voisinage de* e. *Alors le sous-groupe engendré par* V *égale* G.

Démonstration. — Soit $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cup \mathrm{V}^{-1}$; c'est un voisinage de e stable par $g \mapsto g^{-1}$ (on peut aussi prendre $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap \mathrm{V}^{-1}$). Alors

$$\mathrm{H} := \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{W}^n$$

est un sous-groupe de G, et est ouvert. En effet, si $x \in \mathrm{H}$, il existe n tel que $x \in \mathrm{W}^n$ et alors $x\mathrm{W}$ est un voisinage de x contenu dans W^{n+1} donc dans H.

Ainsi, H est un sous-groupe ouvert, donc aussi fermé (car son complémentaire est la réunion des classes $g\mathrm{H}$ distinctes de H, qui sont aussi ouvertes). Comme G est supposé connexe, alors $\mathrm{H} = \mathrm{G}$. □

Théorème 1.15 **(Fonctorialité de** exp**).** — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes de Lie et soient* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H})$*. Alors, pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$*, on a :*

$$\exp_{\mathrm{H}}(d\phi(\mathrm{X})) = \phi(\exp_{\mathrm{G}}(\mathrm{X})),$$

c.-à-d., le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp_{\mathrm{G}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\mathrm{H}}} \\ \mathrm{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{H}. \end{array}$$

Démonstration. — L'application $\alpha : t \mapsto \phi(\exp(t\mathrm{X}))$ est un 1-psg de H, tel que $\alpha'(0) = d\phi(\mathrm{X})$, donc α est le 1-psg associé à $d\phi(\mathrm{X})$. □

On peut maintenant préciser le théorème 7.79 (séance du 3/10) de la façon suivante.

Théorème 1.16. — *Soient* G *un groupe de Lie,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *et* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Soit* H *le sous-groupe de Lie connexe de* G *associé à* $\mathfrak{h}$*. Alors,* H *est le sous-groupe de* G *engendré par* $\exp(\mathfrak{h})$*.*

Démonstration. — L'hypothèse signifie qu'il existe une immersion injective $\tau : \mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ telle que $d\tau$ soit l'inclusion de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Identifions H à son image dans G. Alors, il résulte du théorème 1.15 que $\exp_{\mathrm{H}}$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de $\exp = \exp_{\mathrm{G}}$.

Donc $\exp(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{H}$, et comme H est connexe il est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, d'après le point 3) du théorème 1.13. □

Remarque 1.17. — Dans le théorème précédent, on a supposé *l'existence de* H *établie* (grâce au théorème d'intégrabilité de Frobenius), et montré qu'alors H est nécessairement égal au sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$. Une autre approche consiste à montrer directement que le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, notons-le H', peut être muni d'une (unique) structure de groupe de Lie telle que l'inclusion $\mathrm{H}' \hookrightarrow \mathrm{G}$ soit un morphisme de groupes de Lie. C'est l'approche suivie dans [**Go**, § 6.13] et [**DK**, 1.10.3].

Corollaire 1.18. — *Soient* G *un groupe de Lie,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$*,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*, et soit* K *un sous-groupe de Lie* (*non nécessairement connexe*) *de* G *tel que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{K}) = \mathfrak{h}$*. Alors,* K^0 *est le sous-groupe de* G *engendré par* $\exp(\mathfrak{h})$*. En particulier, si* G *est connexe et si* $\mathrm{Lie}(\mathrm{K}) = \mathfrak{g}$*, alors* $\mathrm{K} = \mathrm{G}$*.*

Démonstration. — Soit H le sous-groupe de Lie connexe de G associé à $\mathfrak{h}$, c'est le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, d'après le théorème précédent.

Notons τ (resp. σ) l'inclusion de H (resp. K^0) dans G. Comme $\mathrm{Lie}(\mathrm{K}^0) = \mathrm{Lie}(\mathrm{K})$, l'hypothèse entraîne que $d\sigma = d\tau$ est l'inclusion de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors l'assertion d'unicité dans le théorème 7.79 (séance du 3/10) entraîne que $\mathrm{H} = \mathrm{K}^0$. Ceci prouve le corollaire. □

1.3. Calcul différentiel sur G. —

Lemme 1.19. — *Soit f une fonction C^∞ au voisinage d'un point $g \in \mathrm{G}$. Alors :*

1) *Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. Alors, pour t dans un voisinage de 0, et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\frac{d^k}{dt^k} f(g\exp(t\mathrm{X})) = (\mathrm{X}^k f)(g\exp(t\mathrm{X})). \tag{1}$$

En particulier,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(g\exp(t\mathrm{X})) = (\mathrm{X}f)(g). \tag{2}$$

2) *Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_s \in \mathfrak{g}$. Alors*

$$(\mathrm{X}_1 \cdots \mathrm{X}_s f)(g) = \left.\frac{\partial^s}{\partial t_1 \cdots \partial t_s}\right|_{t_1=\cdots=t_s=0} f(g\exp(t_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(t_s\mathrm{X}_s)). \tag{3}$$

Démonstration. — Par hypothèse, f est définie et C^∞ sur un voisinage ouvert V de g dans G, et comme $t \mapsto \exp(t\mathrm{X})$ est C^∞, *a fortiori* continue, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que $g\exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{V}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.

Pour toute fonction ϕ C^∞ sur V et tout $x \in \mathrm{V}$, on a, puisque $\mathrm{X} = \exp'_{\mathrm{X}}(0)$:

$$(\mathrm{X}\phi)(x) = (d_x\phi)(\mathrm{X}_x) = (d_x\phi \circ d_1\ell_x)(\mathrm{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(x\exp(t\mathrm{X})).$$

Fixons $t_0 \in \mathrm{I}$. Appliquant l'égalité précédente à $x = g\exp(t_0\mathrm{X})$, on obtient que

$$(\mathrm{X}\phi)(g\exp(t_0\mathrm{X})) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi(x\exp((t_0+s)\mathrm{X})) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \phi(x\exp(t\mathrm{X})).$$

Ceci montre que

$$\frac{d}{dt} f(g\exp(t\mathrm{X})) = (\mathrm{X}\phi)(g\exp(t\mathrm{X})), \qquad \forall\, t \in \mathrm{I}. \tag{†}$$

La formule (1) en découle aussitôt, par récurrence sur k. La formule (2) est, bien sûr, l'évaluation en $t = 0$ de (1).

Montrons (3). Posons

$$\mathrm{F}(t_1, \ldots, t_s) = f(g\exp(t_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(t_s\mathrm{X}_s)).$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que F soit définie et C^∞ sur le voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^s$ suivant :

$$\mathrm{I}^s_\varepsilon = \{(t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s \mid \forall\, i = 1, \ldots s, \quad |t_i| < \varepsilon\}.$$

D'après (1), on a :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t_s}(t_1, \dots, t_{s-1}, 0) = f(g \exp(t_1 \mathrm{X}_1) \cdots \exp(t_{s-1} \mathrm{X}_{s-1})),$$

pour tout $(t_1, \dots, t_{s-1}) \in \mathrm{I}_\varepsilon^{s-1}$, et (3) en découle par récurrence sur s. $\square$

***Théorème 1.20* (Produits d'exponentielles)**. — *Soient* $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_s \in \mathfrak{g}$. *Alors, pour* $t \to 0$, *on a*

$$(*) \qquad \exp(t\mathrm{X}_1) \cdots \exp(t\mathrm{X}_s) = \exp\left(t \sum_{i=1}^{s} \mathrm{X}_i + \frac{t^2}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant s} [\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j] + \mathrm{O}(t^3) \right).$$

En particulier,

$$(i) \qquad \exp(t\mathrm{X}) \exp(t\mathrm{Y}) = \exp\left(t(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) + \frac{t^2}{2}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] + \mathrm{O}(t^3) \right).$$

$$(ii) \qquad \exp(t\mathrm{X}) \exp(t\mathrm{Y}) \exp(-t\mathrm{X}) = \exp\left(t\mathrm{Y} + t^2[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] + \mathrm{O}(t^3) \right).$$

$$(iii) \qquad \exp(t\mathrm{X}) \exp(t\mathrm{Y}) \exp(-t\mathrm{X}) \exp(-t\mathrm{Y}) = \exp\left(t^2[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] + \mathrm{O}(t^3) \right).$$

(cf. Prop. 6.5, séance du 26/9)

Démonstration. — On renvoie pour le moment à [**Va**, Th. 2.12.4]. $\square$

1.4. G-variétés et représentations d'isotropie. —

***Définition 1.21* (Actions)**. — Soient Γ un groupe quelconque et E un ensemble. Une **action** de Γ sur E est une application

$$\mu : \Gamma \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \qquad (g, x) \mapsto gx$$

telle que $1x = x$ et $g(hx) = (gh)x$, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g, h \in \Gamma$. Dans ce cas, on dit que E est un Γ-ensemble. On notera μ_g, resp. μ^x, les applications

$$\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \quad x \mapsto gx, \qquad \text{resp.} \quad \Gamma \longrightarrow \mathrm{E}, \quad g \mapsto gx.$$

***Définition 1.22* (Actions C^∞)**. — Soient G un groupe de Lie et M une variété C^∞. On dit que M est une **G-variété** si l'on s'est donné une action $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ qui est une application C^∞. Dans ce cas, chaque $\mu_g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est un difféomorphisme de M, d'inverse $\mu_{g^{-1}}$.

***Théorème 1.23* (Représentation d'isotropie)**. — *Soit* M *une* G*-variété et soit* $p \in \mathrm{M}$ *un point fixe de* G *(c.-à-d.,* $gp = p$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$*). Alors*

$$g \mapsto d_p\mu_g \in \mathrm{GL}(\mathrm{T}_p\mathrm{M})$$

est une représentation C^∞ *de* G *dans l'espace tangent* $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$.

Démonstration. — Pour tout $g \in \mathrm{G}$, μ_g est un difféomorphisme de M, donc la différentielle $d_p\mu_g$ applique bijectivement $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$ sur $\mathrm{T}_{gp}\mathrm{M} = \mathrm{T}_p\mathrm{M}$. De plus, $d_p\mu_1 = \mathrm{id}$ et pour $g, h \in \mathrm{G}$ l'on a :

$$d_p\mu_{gh} = d_p(\mu_g \circ \mu_h) = d_{hp}\mu_g \circ d_p\mu_h = d_p\mu_g \circ d_p\mu_h.$$

Ceci montre que $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_p\mathrm{M})$, $g \mapsto d_p\mu_g$ est un morphisme de groupes. Reste à voir que c'est une application C^∞.

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées locales sur un voisinage V de p dans M. Soit

$$(dx_1, \dots, dx_n)$$

la base correspondante de l'espace cotangent $\mathrm{T}_p^*\mathrm{M} = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, et soit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

la base correspondante de $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$. Il faut montrer que les coefficients matriciels

$$g \mapsto \langle dx_i, d_p\mu_g(\partial/\partial x_j)\rangle$$

sont des fonctions C^∞ de g.

Comme $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est C^∞, il existe des fonctions C^∞ $f_1, \dots, f_n$, de $\mathrm{G} \times \mathrm{V}$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\mu(g, x) = (f_1(g, x), \dots, f_n(g, x)), \qquad \forall\, (g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{V},$$

c.-à-d., on a $f_i = x_i \circ \mu$. D'autre part, on a

$$d_{(g,x)}\mu = d_x\mu_g + d_g\mu^x, \qquad \forall\, (g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{M},$$

d'où

$$(d_{(g,p)}\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (d_p\mu_g)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G},\ j = 1, \dots, n.$$

Il en résulte que

$$\langle dx_i \circ d_p\mu_g, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = d_{(g,p)}(x_i \circ \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g, p)$$

est une fonction C^∞ de g. Le théorème est démontré. □

1.5. Action adjointe. — Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Alors G agit sur lui-même par conjugaison, car l'application

$$\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad (g, x) \mapsto gxg^{-1}$$

est C^∞. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'application μ_g correspondante est notée $\mathrm{Int}(g)$; c'est l'« *automorphisme intérieur* » de conjugaison par g. Alors, e est un point fixe de cette action et donc, d'après le théorème 1.23, on obtient une représentation de G dans $\mathfrak{g}$, appelée la **représentation adjointe** de G et notée :

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \qquad g \mapsto \mathrm{Ad}(g) = d_e\,\mathrm{Int}(g).$$

Lemme 1.24. — 1) *Soient* $g \in \mathrm{G}$ *et* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$g \exp(t\mathrm{X}) g^{-1} = \mathrm{Int}(g)(\exp(t\mathrm{X})) = \exp(t \, \mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})).$$

2) *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ *et* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\mathrm{Ad}(\exp_{\mathrm{G}}(t\mathrm{X})) = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(t\mathrm{X})).$$

Démonstration. — 1) Fixons $g \in \mathrm{G}$. Alors, $\mathrm{Int}(g) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme de groupes de Lie dont la différentielle est $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Donc 1) découle du théorème 1.15, appliqué à $\phi = \mathrm{Ad}(g)$.

2) De même, $\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes de Lie dont la différentielle est $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Donc 2) découle du théorème 1.15, appliqué à $\phi = \mathrm{Ad}$. □

***Définition 1.25* (Représentation adjointe de $\mathfrak{g}$)**. — La différentielle de Ad, notée

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}),$$

est un morphisme d'algèbres de Lie (cf. Th. 7.61, séance du 3/10). On obtient donc une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

***Notation 1.26* (Centres)**. — 1) On note $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ le **centre** de G, c.-à-d.,

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{g \in \mathrm{G} \mid gh = hg, \quad \forall\, h \in \mathrm{G}\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de G, invariant par tout automorphisme de G.

2) On note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{g}$, c.-à-d.,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 0, \quad \forall\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}\}.$$

C'est un idéal de $\mathfrak{g}$, stable par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$.

***Théorème 1.27* (Représentation adjointe et centres)**. — 1) *Pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$, *on a* $\mathrm{ad}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

2) *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, *on a*

$$\mathrm{Ad}(\exp_{\mathrm{G}}(\mathrm{X})) = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(\mathrm{X})) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\mathrm{ad}(\mathrm{X})^k}{k!}.$$

3) *Supposons* G **connexe**. *Alors*

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Z}(\mathrm{G}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}(\mathrm{G})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — 1) Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$. Considérons le sous-groupe à un paramètre

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \qquad t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(t\mathrm{X})).$$

Sa dérivée en 0 est $\phi'(0) = d_1 \, \mathrm{Ad}(\exp'_{\mathrm{X}}(0)) = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$. Par définition de la dérivée, on a donc, dans $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, l'égalité

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \mathrm{O}(t^2), \qquad \text{pour} \ \ t \longrightarrow 0.$$

Appliquant à cette égalité l'application linéaire d'évaluation en Y,

$$\varepsilon_{\mathrm{Y}} : \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad u \mapsto u(\mathrm{Y}),$$

on obtient, en posant $g_t = \exp(t\mathrm{X})$,

$$\mathrm{Ad}(g_t)(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y} + t\,\mathrm{ad}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) + \mathrm{O}(t^2), \qquad \text{pour } \ t \longrightarrow 0. \tag{1}$$

D'autre part, d'après le point 1) du lemme 1.24 et le théorème 1.20, on a :

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{Ad}(g_t)(t\mathrm{Y})) &= \exp(t\mathrm{X})\exp(t\mathrm{Y})\exp(-t\mathrm{X}) \\ &= \exp\left(t\mathrm{Y} + t^2[\mathrm{X},\mathrm{Y}] + 0(t^3)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

En comparant (1) et (2), on obtient que $\mathrm{ad}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X},\mathrm{Y}]$. Ceci prouve le point 1).

Le point 2) découle du lemme 1.24 et du fait que l'application exponentielle pour $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est l'exponentielle usuelle d'une matrice (1.12).

Montrons le point 3). Pour tout morphisme $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de groupes de Lie, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\phi) = \mathrm{Ker}(d\phi),$$

d'après le théorème 7.74 (séance du 3/10). Appliquant ceci à $\phi = \mathrm{Ad}$ et tenant compte du point 1), on obtient :

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Il reste à montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Z}(\mathrm{G})$, lorsque G est connexe. On a toujours l'inclusion $\mathrm{Z}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$. En effet, si $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{Int}(g) = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ et donc $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, d'où $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$.

Réciproquement, supposons G connexe et soit $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$. Alors, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, on a

$$g\exp(\mathrm{X})g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})) = \exp(\mathrm{X}),$$

et donc g commute au sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{g})$, qui égale $\mathrm{G}^0 = \mathrm{G}$ d'après le point 3) du théorème 1.13. Ceci achève la preuve du théorème 1.27. □

1.6. Le yoga des -zateurs. — Soient G un groupe de Lie, V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ un morphisme de groupes de Lie, c.-à-d., une représentation de G dans V. Soit θ le morphisme d'algèbres de Lie $d\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$.

Dans la suite, on écrira souvent $g \cdot v$ ou gv au lieu de $\rho(g)(v)$, et de même $\mathrm{X} \cdot v$ ou $\mathrm{X}v$ au lieu de $\theta(\mathrm{X})(v)$, pour $g \in \mathrm{G}$, $v \in \mathrm{V}$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$.

Lemme 1.28. — *Pour tout $v \in \mathrm{V}$, la différentielle en e de $g \mapsto gv$ est l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}v$.*

Démonstration. — Posons $\phi_v(g) = gv$ et notons η_v l'application

$$\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}v.$$

Sa différentielle en tout point $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ est l'application linéaire

$$\varepsilon_v : \mathrm{End}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Y}(v).$$

Comme $\phi_v = \eta_v \circ \rho$ alors, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, on a

$$(d_e\phi_v)(\mathrm{X}) = (\varepsilon_v \circ d_e\rho)(\mathrm{X}) = \mathrm{X}v.$$

Ceci prouve le lemme. □

Soient W un sous-espace de V et $g \in \mathrm{G}$ tels que

$$\rho(g)(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W}.$$

Comme $\rho(g)$ est inversible, $\rho(g)(\mathrm{W})$ a même dimension que W, et donc on a l'égalité $\rho(g)(\mathrm{W}) = \mathrm{W}$, d'où aussi $\mathrm{W} = \rho(g^{-1})(\mathrm{W})$. Posons alors les définitions suivantes, où l'égalité $(*)$ résulte de ce qui précède.

***Définition 1.29* (Stabilisateurs dans G).** — Soient $v \in \mathrm{V}$ et W un sous-espace de V. On introduit leurs stabilisateurs dans G :

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v) &= \{g \in \mathrm{G} \mid gv = v\};\\ \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}) &= \{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{W} = \mathrm{W}\} \overset{(*)}{=} \{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{W} \subseteq \mathrm{W}\}.\end{aligned}$$

Ce sont des sous-groupes de G. On dit aussi que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v)$ est le *fixateur* de v, noté $\mathrm{Fix}_{\mathrm{G}}(v)$, ou le *groupe d'isotropie* (dans G) de v, noté G_v. De même, $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ est aussi noté G_{W}.

***Lemme 1.30*.** — $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v)$ *et* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ *sont des sous-groupes fermés de* G*, donc des sous-groupes de Lie fermés.*

Démonstration. — Pour tout $v \in \mathrm{V}$, l'application $\mu_v : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv$ est continue, et l'on a

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v) = \mu_v^{-1}(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}) = \bigcap_{w \in \mathrm{W}} \mu_w^{-1}(\mathrm{W}),$$

ce qui montre que ce sont des sous-groupes fermés de G. Ce sont donc des sous-groupes de Lie fermés, d'après le théorème 7.69 (séance du 3/10). □

***Notation 1.31*.** — On note $\mathrm{Stab}^0_{\mathrm{G}}(v)$, resp. $\mathrm{Stab}^0_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$, la composante connexe de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v)$, resp. $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$. On les appelle les « stabilisateurs connexes ».

On introduit aussi les stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$. (La définition ci-dessous est valable pour toute représentation $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$.)

***Définition 1.32* (Stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$).** — Soient $v \in \mathrm{V}$ et W un sous-espace de V. On introduit leurs stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(v) &= \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{X} \cdot v = 0\};\\ \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{W}) &= \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{X} \cdot \mathrm{W} \subseteq \mathrm{W}\}.\end{aligned}$$

Ce sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ (vérification immédiate). On les note aussi $\mathfrak{g}_v$, resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{W}}$.

Théorème 1.33. — *On a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v$ (*resp.* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\mathrm{W}}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{W}}$) *et donc* G_v^0 (*resp.* $\mathrm{G}_{\mathrm{W}}^0$) *est le sous-groupe de Lie connexe* (*et ici, fermé*) *associé à* $\mathfrak{g}_v$ (*resp.* $\mathfrak{g}_{\mathrm{W}}$).

Démonstration. — L'application $\mathrm{G}_v \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv = v$ est constante, donc sa différentielle est nulle. Par conséquent, d'après le lemme 1.28, on a

$$\mathrm{X}v = 0, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) \subseteq \mathfrak{g}_v.$$

De même, pour tout $w \in \mathrm{W}$, on a $\phi_w(g) \in \mathrm{W}$ pour tout $g \in \mathrm{G}_{\mathrm{W}}$, d'où

$$\mathrm{X}w = d_e\phi_w(\mathrm{X}) \in \mathrm{W}, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\mathrm{W}}), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\mathrm{W}}) \subseteq \mathfrak{g}_{\mathrm{W}}.$$

Montrons les inclusions réciproques.

Soit S (resp. H) le sous-groupe connexe de G associé à $\mathfrak{g}_v$ (resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{W}}$) ; il est engendré par $\exp(\mathfrak{g}_v)$ (resp. $\exp(\mathfrak{g}_{\mathrm{W}})$), d'après le théorème 1.16.

D'après le théorème 1.15 et l'exemple 1.12 on a, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(\exp(\mathrm{X})) = \exp(\theta(\mathrm{X})) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\theta(\mathrm{X})^k}{k!}.$$

Par conséquent, v est fixé par $\exp(\mathfrak{g}_v)$, donc par S, et, de même, W est laissé stable par $\exp(\mathfrak{g}_{\mathrm{W}})$, donc par H. Donc

$$(*) \qquad \mathrm{S} \subseteq \mathrm{G}_v^0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}_{\mathrm{W}}^0$$

d'où les inclusions

$$\mathfrak{g}_v = \mathrm{Lie}(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}_{\mathrm{W}} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\mathrm{W}}).$$

On obtient donc les égalités

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\mathrm{W}}) = \mathfrak{g}_{\mathrm{W}},$$

et donc les inclusions dans $(*)$ sont des égalités, d'après le corollaire 1.18. □

Remarque 1.34. — Voici une autre démonstration de l'égalité $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v$, qui n'utilise pas l'application exponentielle (mais utilise à la place le théorème du rang constant). On a vu plus haut que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) \subseteq \mathfrak{g}_v$, donc il suffit de montrer que ces deux espaces ont même dimension.

L'application $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv$ est C^∞. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \ell_g = \rho(g) \circ \phi$, d'où

$$d_g\phi \circ d_1\ell_g = \rho(g) \circ d_1\phi.$$

Comme $d_1\ell_g$ et $\rho(g)$ sont inversibles, $d_g\phi$ a même rang que $d_1\phi$. Or $d_1\phi$ est l'application

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} \cdot v,$$

dont le noyau est $\mathfrak{g}_v$. Ceci prouve que ϕ est de rang constant égal à

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_v.$$

Donc, d'après le théorème du rang constant (voir 7.35, séance du 2 octobre), $\mathrm{G}_v = \phi^{-1}(v)$ est une sous-variété fermée de dimension $\dim \mathfrak{g}_v$. Par conséquent, on a l'égalité $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v$.

***Définition 1.35* (Vecteurs invariants)**. — Soit V une représentation de dimension finie de G. On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{V}^{\mathrm{G}} &= \{v \in \mathrm{V} \mid gv = v, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}\} \\ \mathrm{V}^{\mathfrak{g}} &= \{v \in \mathrm{V} \mid \mathrm{X}v = 0, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.36. — *Supposons* G **connexe**.

1) *On a* $\mathrm{V}^{\mathfrak{g}} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$.

2) *Soit* W *un sous-espace de* V *stable par* $\mathfrak{g}$. *Alors* W *est stable par* G.

Démonstration. — 1) Il est clair que $\mathrm{V}^{\mathrm{G}} \subseteq \mathrm{V}^{\mathfrak{g}}$. Réciproquement, soit $v \in \mathrm{V}^{\mathfrak{g}}$. Alors, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}$. Donc, d'après le corollaire 1.18, $\mathrm{G}_v = \mathrm{G}$, d'où $v \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$. Ceci prouve 1).

De même, on a $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_\mathrm{W}) = \mathfrak{g}$, d'où $\mathrm{G}_\mathrm{W} = \mathrm{G}$, c.-à-d., W est stable par G. □

Théorème 1.37. — *Soient* G *un groupe de Lie* **connexe**, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$, *et* H *le sous-groupe de Lie connexe de* G *associé à* $\mathfrak{h}$. *On a les équivalences suivantes :*

1) $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g} \Leftrightarrow$ H *est normal dans* G.

2) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \mathrm{H} \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — 1) Si H est normal, alors $\mathfrak{h}$ est stable par $\mathrm{Ad}(\mathrm{G})$ donc *a fortiori* par $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{h}$ soit un idéal de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., que son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$, pour la représentation adjointe, égale $\mathfrak{g}$. Alors, d'après le théorème précédent, $\mathfrak{h}$ est stable par $\mathrm{Ad}(\mathrm{G})$.

De plus, d'après le théorème 1.15, l'application exponentielle de H est la restriction à $\mathfrak{h}$ de celle de $\mathfrak{g}$. Donc, utilisant le lemme 1.24, on obtient que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$ et $g \in \mathrm{G}$,

$$g \exp(\mathrm{X}) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})) \in \mathrm{H}.$$

Donc G normalise le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, qui égale H d'après le théorème 1.16. Ceci montre que H est normal dans G. Le point 1) est démontré.

La preuve du point 2) est analogue et est laissée au lecteur. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.