

PARTIE FI : GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE SÉANCE DU 7 NOVEMBRE

2. Algèbres de Lie semi-simples compactes

2.1. G- et \mathfrak{g} -modules. — Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Commençons par rappeler les définitions et résultats suivants (cf. 1.15–1.19, séances des 9-10 octobre).

Soient V et W des G -modules de dimension finie. Alors

$$V \otimes W, \quad \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W), \quad V^*,$$

sont des G -modules, pour les actions définies par

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw, \quad (g\theta)(v) = g\theta(g^{-1}v), \quad (g\phi)(v) = \phi(g^{-1}v).$$

Bien sûr, le module dual V^* est un cas particulier de module d'homomorphismes, puisque

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}),$$

où \mathbb{R} est considéré comme G -module trivial, et l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

est un isomorphisme de G -modules. De plus, on a l'égalité

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)^G = \text{Hom}_G(V, W),$$

c.-à-d., une application \mathbb{R} -linéaire G -invariante (pour la structure de G -module sur $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$) n'est autre qu'un G -morphisme $V \rightarrow W$.

D'autre part, l'action dérivée de \mathfrak{g} sur

$$V \otimes W, \quad \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W), \quad V^*,$$

⁽⁰⁾version du 14/11/06

est donnée par

$$\begin{cases} X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw, \\ (X\theta)(v) = X\theta(v) - \theta(Xv), \\ (X\phi)(v) = -\phi(Xv), \end{cases}$$

et l'on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W),$$

c.-à-d., une application \mathbb{R} -linéaire \mathfrak{g} -invariante (pour la structure de \mathfrak{g} -module sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$) n'est autre qu'un \mathfrak{g} -morphisme $V \rightarrow W$.

2.2. Automorphismes et dérivations. — Soit L une \mathbb{R} -algèbre de Lie.

Définition 2.1. — On dit qu'un \mathbb{R} -endomorphisme $D : L \rightarrow L$ est une **dérivation** de L s'il vérifie :

$$(*) \quad \forall X, Y \in L, \quad D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)].$$

On note $\mathrm{Dér}(L)$ l'ensemble des dérivations de L ; on vérifie sans peine que c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(L)$.

Définition 2.2. — Soit $\mathrm{Aut}(L)$ le groupe des automorphismes de L , c.-à-d.,

$$\mathrm{Aut}(L) = \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid \forall X, Y \in L, [g(X), g(Y)] = g([X, Y])\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(L)$, donc un sous-groupe de Lie fermé de $\mathrm{GL}(L)$. On note $\mathrm{Aut}^0(L)$ sa composante connexe.

Afin de déterminer l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(L)$, notons θ le crochet de Lie de L , considéré comme application linéaire $L \otimes L \rightarrow L$. Alors, on obtient que $\mathrm{Aut}(L)$ est le groupe d'isotropie de θ dans $\mathrm{GL}(L)$, c.-à-d.,

$$\mathrm{Aut}(L) = G_{\theta}, \quad \text{où } G = \mathrm{GL}(L).$$

L'action dérivée de $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(L)$ sur $E := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(L \otimes L, L)$ est donnée, d'après le paragraphe 2.1, par

$$u \cdot \theta = u \circ \theta - \theta \circ u, \quad \forall u \in \mathfrak{g}, \theta \in E,$$

c.-à-d.,

$$\begin{aligned} (u \cdot \theta)(X \otimes Y) &= u([X, Y]) - \theta(u(X) \otimes Y + X \otimes u(Y)) \\ &= u([X, Y]) - [u(X), Y] - [X, u(Y)]. \end{aligned}$$

Donc, le stabilisateur de θ dans \mathfrak{g} est :

$$\mathfrak{g}_{\theta} = \mathrm{Dér}(L).$$

Par conséquent, d'après le théorème 1.33 (séance du 6/11), on obtient le théorème suivant (dans lequel L est notée \mathfrak{g}).

Théorème 2.3. — Soit \mathfrak{g} une \mathbb{R} -algèbre de Lie de dimension finie. Alors $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé (non nécessairement connexe) de $\text{GL}(\mathfrak{g})$, et l'on a

$$\text{Lie Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Dér}(\mathfrak{g}).$$

2.3. \mathbb{R} -algèbres de Lie semi-simples. — On rappelle qu'une algèbre de Lie est dite **simple** si elle est $\neq 0$, non abélienne et ne possède pas d'idéaux propres non nuls.

Définition 2.4. — Soit \mathfrak{g} une \mathbb{R} -algèbre de Lie. Nous dirons que \mathfrak{g} est **semi-simple** si sa forme de Killing $K = K_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée. D'après le théorème 1.39 (séance des 9-10 octobre) ceci entraîne :

(i) \mathfrak{g} est somme directe d'algèbres de Lie simples :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

chaque \mathfrak{g}_i étant alors un idéal simple non abélien de \mathfrak{g} ;

(ii) \mathfrak{g} ne contient pas d'idéal résoluble $\neq 0$.

Remarque 2.5. — On peut montrer que la condition (ii) entraîne que $K_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée ; voir [Jac, § III.4] ou [BL1, § 6, Th. 1]. (On l'a montré pour les \mathbb{C} -algèbres de Lie : théorème 2.30 des 9-10 octobre).

Proposition 2.6. — Soit \mathfrak{g} une \mathbb{R} -algèbre de Lie semi-simple. Alors

$$\mathfrak{g} \cong \text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Dér}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — Comme \mathfrak{g} ne contient pas d'idéal abélien $\neq 0$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ et donc

$$\mathfrak{g} \cong \text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Dér}(\mathfrak{g});$$

l'inclusion résultant du fait que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(x)$ est une dérivation de \mathfrak{g} , d'après l'identité de Jacobi. Il s'agit donc de montrer l'inclusion réciproque.

Soit $D \in \text{Dér}(\mathfrak{g})$. Considérons la forme linéaire sur \mathfrak{g} donnée par

$$Y \mapsto \text{Tr}_{\mathfrak{g}}(D \circ \text{ad}(Y)).$$

Comme $K = K_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée, il existe un unique $X \in \mathfrak{g}$ tel que

$$K(X, Y) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}}(D \circ \text{ad}(Y)), \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Montrons que $D = \text{ad}(X)$. Pour tout $Z \in \mathfrak{g}$, on a

$$D([Y, Z]) = [D(Y), Z] + [Y, D(Z)],$$

d'où $\text{ad} D(Y) = D \circ \text{ad}(Y) - \text{ad}(Y) \circ D$. Donc, $K(D(Y), Z)$ égale :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{ad} D(Y) \text{ad}(Z)) &= \text{Tr}(D \circ \text{ad}(Y) \circ \text{ad}(Z)) - \text{Tr}(\text{ad}(Y) \circ D \circ \text{ad}(Z)) \\ &= \text{Tr}(D \circ \text{ad}(Y) \circ \text{ad}(Z)) - \text{Tr}(D \circ \text{ad}(Z) \circ \text{ad}(Y)) \\ &= \text{Tr}(D \circ \text{ad}([Y, Z])) = K(X, [Y, Z]) = K([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Comme K est non dégénérée, ceci entraîne $D(Y) = [X, Y]$, pour tout Y , d'où $D = \text{ad}(X)$. La proposition est démontrée. \square

Corollaire 2.7. — Soit $G = \text{Aut}^0(\mathfrak{g})$. C'est un sous-groupe de Lie fermé connexe de $\text{GL}(\mathfrak{g})$ et l'on a $\text{Lie}(G) \cong \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Ceci découle du théorème 2.3 et de la proposition précédente. \square

Définition 2.8. — Pour \mathfrak{g} semi-simple, on dira que $\text{Aut}^0(\mathfrak{g})$ est le groupe de Lie adjoint de \mathfrak{g} ; on le notera $\text{Ad}(\mathfrak{g})$.

Remarque 2.9. — Pour \mathfrak{g} arbitraire, il résulte du théorème 7.79 (séance du 3/10) qu'il existe un unique sous-groupe de Lie connexe H de $\text{GL}(\mathfrak{g})$ (non nécessairement fermé), tel que $\text{Lie}(H) = \text{ad}(\mathfrak{g})$. L'avantage de la proposition 2.6 et de son corollaire 2.7 est qu'ils montrent directement, pour \mathfrak{g} semi-simple, que $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, où G est le sous-groupe fermé $\text{Aut}^0(\mathfrak{g})$ de $\text{GL}(\mathfrak{g})$, sans faire appel au théorème 7.79 (que nous n'avons pas démontré).

Lemme 2.10. — Soient G un groupe topologique connexe et D un sous-groupe discret normal. Alors D est central.

Démonstration. — Soit $d \in D$. Il existe un voisinage ouvert V de d dans G tel que $V \cap D = \{d\}$. L'application $\phi : G \rightarrow G$, $g \mapsto gdg^{-1}$ est continue, à valeurs dans D (car D est normal), et vérifie $\phi(e) = d$. Donc, il existe un voisinage ouvert U de e dans G tel que

$$\forall g \in U, \quad gdg^{-1} \in V \cap D = \{d\}.$$

Donc d commute à U , qui engendre G puisque G est connexe. Donc d est central. Le lemme est démontré. \square

Définition 2.11. — Soit G un groupe de Lie connexe. On dit que G est

- 1) **semi-simple** si $\text{Lie}(G)$ est semi-simple;
- 2) **quasi-simple** si $\text{Lie}(G)$ est simple.

2.4. Revêtements universels. — Dans la suite, on écrira parfois « 1-connexe » pour dire : « connexe et simplement connexe ».

Théorème 2.12 (Existence d'un revêtement universel). — Soit G un groupe de Lie connexe. Il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe \tilde{G} et un morphisme de groupes de Lie

$$\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$$

qui est un revêtement; alors $d\pi$ est un isomorphisme

$$\text{Lie}(\tilde{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(G)$$

et $\text{Ker } \pi$ est un sous-groupe normal discret, donc central. De plus, \tilde{G} est unique à isomorphisme unique près ; on l'appelle le revêtement universel de G .

Démonstration. — Pour la démonstration, on renvoie à [Go, §2] ou [Wa, 3.22–26]. \square

D'autre part, rappelons le théorème suivant (7.86, séance du 3/10).

Théorème 2.13. — Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie **connexes**, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ leurs algèbres de Lie, et $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ un morphisme d'algèbres de Lie.

1) Il existe au plus un morphisme de groupes de Lie $\sigma : G_1 \rightarrow G_2$ tel que $d\sigma = \phi$. Dans ce cas, $\text{Lie}(\text{Ker } \sigma) = \text{Ker } \phi$.

2) Si G_1 est **1-connexe**, un tel morphisme σ existe.

Corollaire 2.14. — Soient G, G' deux groupes de Lie **1-connexes**. Si $\text{Lie}(G) \cong \text{Lie}(G')$, alors $G \cong G'$.

Démonstration. — Soit ϕ un isomorphisme $\text{Lie}(G) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(G')$. D'après le théorème, il existe un (unique) morphisme de groupes de Lie

$$\sigma : G \longrightarrow G', \quad \text{resp.} \quad \tau : G' \longrightarrow G$$

tel que $d\sigma = \phi$, resp. $d\tau = \phi^{-1}$. Alors $\tau\sigma$ est un morphisme $G \rightarrow G$ tel que

$$d(\tau\sigma) = \text{id}_{\mathfrak{g}} = d(\text{id}_G).$$

Donc, d'après l'assertion d'unicité dans le théorème précédent, on a $\tau\sigma = \text{id}_G$, et de même $\sigma\tau = \text{id}_{G'}$. Ceci montre que $G \cong G'$. \square

2.5. Groupes de Lie semi-simples 1-connexes. — Soit \mathfrak{g} une \mathbb{R} -algèbre de Lie semi-simple. Alors (cf. 9-10 octobre, 1.37-38), \mathfrak{g} est somme directe d'idéaux simples non abéliens

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

et tout idéal de \mathfrak{g} est la somme des \mathfrak{g}_i qu'il contient. En particulier, les \mathfrak{g}_i sont uniquement déterminés.

Notons G le revêtement universel de $\text{Aut}^0(\mathfrak{g})$; alors on a

$$\text{Lie}(G) = \text{Lie } \text{Aut}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},$$

la seconde égalité résultant du corollaire 2.7 plus haut. De plus, d'après le corollaire 2.14, G est l'unique groupe de Lie 1-connexe (à isomorphisme près) tel que $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$.

On obtient de même, pour chaque \mathfrak{g}_i , un unique groupe de Lie quasi-simple 1-connexe G_i tel que $\text{Lie}(G_i) = \mathfrak{g}_i$. Alors,

$$G_1 \times \cdots \times G_n$$

est un groupe de Lie 1-connexe dont l'algèbre de Lie est

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},$$

d'où, par unicité, $G_1 \times \cdots \times G_n \cong G$. On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.15. — *L'application $G \mapsto \text{Lie}(G)$ établit une bijection :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{groupes de Lie semi-simples 1-connexes,} \\ \text{à isomorphisme près} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-algèbres de Lie semi-simples,} \\ \text{à isomorphisme près} \end{array} \right\},$$

dont la bijection réciproque associe à \mathfrak{g} le revêtement universel de $\text{Aut}^0(\mathfrak{g})$. De plus, cette bijection induit une bijection entre groupes quasi-simples et algèbres de Lie simples, et préserve les produits.

2.6. Groupes et algèbres de Lie semi-simples compacts. — Soit maintenant G un groupe de Lie compact connexe et soit $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Comme G -module, \mathfrak{g} est complètement réductible (Prop. 4.1, séance 19/9), donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

où chaque \mathfrak{g}_i est une algèbre de Lie simple. Posons

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

alors $\mathfrak{g}' = \mathcal{D}(\mathfrak{g}') = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, où $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre de Lie dérivée (séances 9-10 octobre, 1.4).

Pour tout $g \in G$, notons $\text{Ad}'(g)$ la restriction à \mathfrak{g}' de $\text{Ad}(g)$. Alors, relativement à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$, la matrice de $\text{Ad}(g)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{Ad}'(g) \end{pmatrix}.$$

Donc la projection sur le bloc inférieur droit induit un isomorphisme

$$\text{Ad}(G) \xrightarrow{\sim} \text{Ad}'(G),$$

et $\text{Ker Ad}' = \text{Ker Ad} = \text{Z}(G)$, et $\text{Lie}(\text{Ker Ad}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

D'autre part, comme G est compact connexe, son image $\text{Ad}'(G)$ est un sous-groupe fermé connexe de $\text{Aut}^0(\mathfrak{g}')$ et donc Ad' et sa différentielle ad' se factorisent comme suit :

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \text{Ad}'(G) \hookrightarrow \text{Aut}^0(\mathfrak{g}') \\ \mathfrak{g} & \rightarrow & \text{Lie}(\text{Ad}'(G)) \hookrightarrow \text{Dér}(\mathfrak{g}') \cong \mathfrak{g}'. \end{array}$$

Comme $\text{Ker}(\text{ad}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, il en résulte, pour une raison de dimension, que

$$\text{ad}'(\mathfrak{g}) = \text{Lie}(\text{Ad}'(G)) = \text{Dér}(\mathfrak{g}') \cong \mathfrak{g}'.$$

Donc $\text{Ad}(G) \cong \text{Ad}'(G)$ est un groupe de Lie compact connexe semi-simple (i.e. , son algèbre de Lie \mathfrak{g}' est semi-simple).

Notons, de plus, que $\text{Ad}'(\mathbf{G}) = \text{Aut}^0(\mathfrak{g}')$, d'après le corollaire 1.18 (séance 6/11).

Théorème 2.16. — *Soit \mathbf{G} un groupe de Lie compact connexe semi-simple. Alors son revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}}$ est compact (et semi-simple, puisque $\text{Lie}(\tilde{\mathbf{G}}) = \text{Lie}(\mathbf{G})$).*

La démonstration utilise les deux lemmes suivants, pour lesquels on renvoie à [BI7-8, § VII.3, Prop. 4 & Lemme 3].

Lemme 2.17. — *Soient \mathbf{G} un groupe de Lie connexe, \mathbf{D} un sous-groupe fermé central tel que \mathbf{G}/\mathbf{D} soit compact. Alors tout morphisme de groupes de Lie $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend en un morphisme de groupes de Lie $\tilde{\phi} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Lemme 2.18. — *Soient \mathbf{G} un groupe de Lie connexe et \mathbf{D} un sous-groupe discret central tel que \mathbf{G}/\mathbf{D} soit compact. Alors \mathbf{D} est un groupe abélien de type fini.*

Démonstration du théorème. — Soit $\mathbf{D} = \text{Ker}(\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G})$. C'est un sous-groupe discret normal, donc central. Par hypothèse, $\tilde{\mathbf{G}}/\mathbf{D} \cong \mathbf{G}$ est compact. Donc, d'après le lemme 2.18, \mathbf{D} est un groupe abélien de type fini, donc de la forme

$$\mathbf{D} = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbf{D}_1, \quad \text{où } \mathbf{D}_1 \text{ est un groupe fini.}$$

Montrons que $r = 0$. Supposons $r \geq 1$. Alors, on a un morphisme de groupes (de Lie)

$$\phi : \mathbf{D} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

tel que $\phi(\mathbf{D}) = \mathbb{Z}$. D'après le lemme 2.17, ϕ s'étend en un morphisme de groupes de Lie

$$\tilde{\phi} : \tilde{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors $d\tilde{\phi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle car $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Comme

$$\forall g \in \tilde{\mathbf{G}}, \quad d_g \tilde{\phi} \circ d_1 \ell_g = d_1 \ell_{\tilde{\phi}(g)} \circ d_1 \tilde{\phi},$$

alors $d_g \tilde{\phi} = 0$ pour tout $g \in \tilde{\mathbf{G}}$. Donc $\tilde{\phi}$ est le morphisme constant $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \{0\}$, d'après la proposition plus bas. Mais ceci est une contradiction, puisque $\tilde{\phi}(\mathbf{G})$ contient $\phi(\mathbf{D}) = \mathbb{Z}$. Cette contradiction montre que $r = 0$, et donc $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$ est un groupe (abélien) fini. Il en résulte que $\tilde{\mathbf{G}}$ est compact. Ceci prouve le théorème, modulo la proposition ci-dessous. \square

Proposition 2.19. — *Soit $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ un morphisme de variétés C^∞ , avec \mathbf{M} connexe. On suppose que $d_m f = 0$, pour tout $m \in \mathbf{M}$. Alors f est constante.*

Démonstration. — Comme \mathbf{M} est supposée connexe, il suffit de montrer que f est localement constante. En prenant des cartes locales, on se ramène ainsi à montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $d_x f = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est constante. Ceci ne présente pas de difficulté, voir par exemple [Wa, 1.24]. \square

Lemme 2.20. — Soit L une algèbre de Lie de dimension finie. Sa forme de Killing K est invariante par tout automorphisme de L .

Démonstration. — Soit ϕ un automorphisme de L . Alors, pour tout $X, Z \in L$ on a $[\phi(X), \phi(Z)] = \phi([X, Z])$, d'où

$$\text{ad } \phi(X) \circ \phi = \phi \circ \text{ad}(X), \quad \forall X \in L.$$

Donc

$$\begin{aligned} K(\phi(X), \phi(Y)) &= \text{Tr}_L(\text{ad } \phi(X) \text{ ad } \phi(Y)) = \text{Tr}_L(\phi \circ \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y) \circ \phi^{-1}) \\ &= \text{Tr}_L(\text{ad}(X) \text{ ad}(Y)) = K(X, Y). \end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. \square

Proposition 2.21. — Soit G un groupe de Lie semi-simple compact et soit $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Alors, la forme de Killing $K = K_{\mathfrak{g}}$ est définie négative.

Démonstration. — Comme G est compact, il existe sur \mathfrak{g} un produit scalaire défini positif G -invariant $(-, -)$. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a

$$(\text{ad}(x)(y), z) = -(y, \text{ad}(x)(z)).$$

Munissons $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ du produit scalaire hermitien ϕ prolongeant $(-, -)$. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\phi(i \text{ad}(x)(y), z) = i(\text{ad}(x)(y), z) = -i(y, \text{ad}(x)(z)) = \phi(y, i \text{ad}(x)(z)).$$

Par conséquent, chaque $i \text{ad}(x)$ est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (relativement à ϕ), donc est diagonalisable, avec des valeurs propres réelles. Donc, $\text{ad}(x)^2$ est diagonalisable dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, avec des valeurs propres réelles ≤ 0 . Il en résulte que

$$K_{\mathfrak{g}}(x, x) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(x)^2) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\text{ad}(x)^2)$$

est ≤ 0 . Comme $K_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée, puisque \mathfrak{g} est semi-simple, on obtient donc que $K_{\mathfrak{g}}$ est définie négative. \square

Définition 2.22. — Soit \mathfrak{g} une \mathbb{R} -algèbre de Lie semi-simple. On dit que \mathfrak{g} est **compacte** si $K_{\mathfrak{g}}$ est définie négative.

Théorème 2.23. — Soit \mathfrak{g} une \mathbb{R} -algèbre de Lie semi-simple compacte. Écrivons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

où chaque \mathfrak{g}_i est simple. Alors, il existe un unique groupe de Lie compact semi-simple 1-connexe G (resp. G_i) tel que $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ (resp. $\text{Lie}(G_i) = \mathfrak{g}_i$), et l'on a

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_n.$$

Démonstration. — Chaque $K_{\mathfrak{g}_i}$ est la restriction à \mathfrak{g}_i de $K_{\mathfrak{g}}$ donc est définie négative. Donc chaque \mathfrak{g}_i est simple compacte.

Comme \mathfrak{g} est semi-simple, $G_0 = \text{Aut}^0(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $\text{GL}(\mathfrak{g})$, tel que $\text{Lie}(G_0) = \mathfrak{g}$. De plus, G_0 préserve la forme de Killing $K_{\mathfrak{g}}$, qui est définie négative, donc G_0 est un sous-groupe fermé du groupe orthogonal $O(\mathfrak{g})$, qui est compact. Donc G_0 est compact et semi-simple. D'après le théorème 2.16, son revêtement universel G est encore compact semi-simple, et vérifie $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Il est unique pour cette propriété, d'après le corollaire 2.14.

De même, pour $k = 1, \dots, n$, il existe un unique groupe de Lie semi-simple compact 1-connexe G_k tel que $\text{Lie}(G_k) = \mathfrak{g}_k$. Alors, le groupe de Lie

$$G_1 \times \dots \times G_k$$

est semi-simple compact et 1-connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , donc il est isomorphe, par unicité, à G . Le théorème est démontré. \square

On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.24. — *L'application $G \mapsto \text{Lie}(G)$ établit une bijection :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{groupes de Lie 1-connexes} \\ \text{semi-simples compacts,} \\ \text{à isomorphisme près} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-algèbres de Lie} \\ \text{semi-simples compactes,} \\ \text{à isomorphisme près} \end{array} \right\},$$

dont la bijection réciproque associe à \mathfrak{g} le revêtement universel de $\text{Aut}^0(\mathfrak{g})$. De plus, cette bijection induit une bijection entre groupes quasi-simples et algèbres de Lie simples, et préserve les produits.

Remarque 2.25. — On verra dans la séance suivante qu'il y a aussi une bijection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-algèbres de Lie semi-simples} \\ \text{compactes, à isomorphisme près} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}\text{-algèbres de Lie semi-simples} \\ \text{complexes, à isomorphisme près} \end{array} \right\}.$$

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 18/9	1
1. Groupes topologiques	1
2. Interlude sur les représentations de groupes finis	3
3. Mesure de Haar sur un groupe compact	5
3.1. Représentations régulières gauche et droite	5
3.2. Intégration invariante	6
3.3. Théorème du point fixe de Kakutani	6
Séance du 19/9	9
3. Mesure de Haar sur un groupe compact (suite)	9
3.4. Mesures de Radon	11
3.5. Mesure de Haar sur un groupe compact	12
4. Représentations unitaires et théorème de Peter-Weyl	16
4.1. Représentations continues	16
4.2. Représentations unitaires	17
4.3. Opérateurs compacts	18
4.4. Opérateurs à noyaux	19
Séance du 25/9	21
5. L'algèbre des « fonctions représentatives »	21
5.1. Coefficients matriciels	21
5.2. Fonctions représentatives	23
5.3. Cas des groupes compacts	24
5.4. Schur, Burnside et produits tensoriels	25
5.5. Résultats sur les modules semi-simples	26
5.6. Appendice : preuve du théorème de Burnside	28
4. Théorème de Peter-Weyl (suite)	29
4.4. Opérateurs à noyaux	29

Séance du 26/9	35
4.5. Une conséquence du théorème de Peter-Weyl	35
6. Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$	36
6.1. Algèbres de Lie	36
6.2. Propriétés de l'exponentielle	36
6.3. L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$	39
6.4. Composante connexe d'un groupe topologique	40
7. Groupes de Lie	42
7.1. Variétés différentiables	42
Séance du 2 octobre	45
7. Groupes de Lie (suite)	45
7.1. Variétés différentiables (suite)	45
7.2. « Rappels » de calcul différentiel	47
7.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de \mathbb{R}^N	50
7.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant	52
Séance du 3 octobre	55
7. Groupes de Lie (suite)	55
7.5. Dérivations et champs de vecteurs	55
7.6. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	63
7.7. Retour aux sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$	65
7.8. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie	69
7.9. Représentations	73
Partie II : Algèbres de Lie	
Séances du 9 et 10 octobre	75
1. Algèbres de Lie : définitions et premières propriétés	75
1.1. Algèbres de Lie, idéaux, modules	75
1.2. Algèbres de Lie résolubles ou nilpotentes	80
1.3. Formes invariantes et forme de Killing	82
1.4. Théorème d'Engel et applications	85
2. Théorème de Lie et critère de Cartan	87
2.1. Théorème de Lie et conséquences	87
2.2. Poids des algèbres de Lie nilpotentes	90
2.3. Sous-algèbres de Cartan	93
2.4. Critère de Cartan	97
Partie II : Algèbres de Lie	
Séances du 16 et 17 octobre	99
3. Racines d'une \mathbb{C} -algèbre de Lie semi-simple	99
3.1. Racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g}	99
3.2. Algèbre enveloppante d'une k -algèbre de Lie	102

3.3. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	104
3.4. Retour à la preuve du théorème d'intégralité	105
3.5. Passage à un \mathbb{R} -espace euclidien	106
3.6. Le système de racines $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$	107

Partie II : Algèbres de Lie

Séances du 17 et 23 octobre	109
3. Racines d'une \mathbb{C} -algèbre de Lie semi-simple (suite)	109
3.7. Le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	109
4. Systèmes de racines	109
4.1. Définitions	109
4.2. Systèmes de racines de rang 2	110
4.3. Bases d'un système de racines	113
4.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin	115
5. Classification des graphes admissibles	116
5.1. Premières réductions	116
5.2. Fin de la classification des graphes admissibles	118
5.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes	121
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines	122

Partie II : Algèbres de Lie

Séance du 24 octobre	125
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines (suite) ...	125
6.1. Groupe de Weyl et conjugaison des bases	125
6.2. Isomorphismes de systèmes de racines	128
6.3. Fin de la classification des systèmes de racines	128
7. Classification des \mathbb{C} -algèbres de Lie semi-simples	129
7.1. Le système de racines de \mathfrak{g}	129
7.2. Théorème d'existence et d'unicité	130
7.3. Type $A_{n-1} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	131
7.4. Types B et D : groupes orthogonaux	132
7.5. Type C : groupes symplectiques	135

Partie FI : Groupes et algèbres de Lie

Séance du 6 novembre	1
1. Exponentielle et action adjointe	1
1.0. Un « rappel » sur espaces tangents et différentielles	1
1.1. Champs de vecteurs et flots	2
1.2. Exponentielle d'un groupe de Lie	4
1.3. Calcul différentiel sur G	8
1.4. G -variétés et représentations d'isotropie	9
1.5. Action adjointe	10
1.6. Le yoga des -zateurs	12

Partie FI : Groupes et algèbres de Lie

Séance du 7 novembre	17
2. Algèbres de Lie semi-simples compactes	17
2.1. G - et \mathfrak{g} -modules	17
2.2. Automorphismes et dérivations	18
2.3. \mathbb{R} -algèbres de Lie semi-simples	19
2.4. Revêtements universels	20
2.5. Groupes de Lie semi-simples 1-connexes	21
2.6. Groupes et algèbres de Lie semi-simples compacts	22
Bibliographie	v

Bibliographie

- [Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
- [Am] Y. Amice, Les nombres p -adiques, P.U.F., 1975.
- [Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
- [BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
- [BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.
- [BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4-6, 1968.
- [BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.
- [BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
- [BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
- [Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
- [Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
- [Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
- [DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
- [Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
- [Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
- [GH] M. J. Greenberg, J.R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.
- [He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
- [Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.
- [Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
- [Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
- [Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
- [La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
- [Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
- [Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.
- [MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

- [Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.
- [Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.
- [Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.
- [Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.
- [Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
- [Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.
- [Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.
- [Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.