

PARTIE II : ALGÈBRES DE LIE SÉANCES DU 17 ET 23 OCTOBRE

3. Racines d'une \mathbb{C} -algèbre de Lie semi-simple (suite)

3.7. Le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. — On voit facilement que $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie simple. Par exemple, tout idéal non nul I contient un vecteur propre de $\text{ad } h$, c.-à-d., contient f, h , ou e , d'où il résulte que $I = \mathfrak{sl}_2$. D'autre part, la sous-algèbre $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ est abélienne, et la décomposition en espaces de poids

$$\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f$$

montre, en même temps, que \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan et que les racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} sont α et $-\alpha$, où α est l'élément de \mathfrak{h}^* défini par $\alpha(h) = 2$. C'est le système de racines A_1 qui est décrit plus bas.

4. Systèmes de racines

4.1. Définitions. — Commençons par rappeler la définition des systèmes de racines.

Définition 4.1. — Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire euclidien (\cdot, \cdot) . On dit qu'un sous-ensemble fini R de V est un **système de racines** dans V s'il vérifie les quatres axiomes suivants :

(R1) R ne contient pas 0 et engendre V ;

(R2) Pour tout $\alpha \in R$, la réflexion orthogonale associée, définie par

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha, \quad \text{où } \alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)},$$

vérifie $s_\alpha(R) = R$;

(R3) Pour tout $\alpha, \beta \in R$, on a $(\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.

⁽⁰⁾version du 19/10/06

(R4) Soient $\alpha \in R$ et $t \in \mathbb{R}$. Si $t\alpha \in R$, alors $t = \pm 1$.

Alors, on appelle **rang de R** la dimension de V .

Notation 4.2. — Pour tout $\alpha \in R$, on appelle α^\vee la **coracine** associée à α .

Définition 4.3 (Isomorphismes). — Si R' est un système de racines dans un espace V' , on dit que R et R' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ appliquant R sur R' .

Il est clair qu'à isomorphisme près il n'existe qu'un seul système de racines de rang 1, formé d'un vecteur $\alpha \neq 0$ et de son opposé $-\alpha$; on le note A_1 . C'est le système de racines de la \mathbb{C} -algèbre de Lie simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Lemme 4.4 (Sous-systèmes de racines). — Soit X une partie de R et soit V_X le sous-espace engendré par X . Alors $R \cap V_X$ est un système de racines dans V_X .

Démonstration. — (R1) est vérifié car $R \cap V_X$ est fini, ne contient pas 0, et engendre V_X car il contient X . (R3) et (R4) sont évidents. Voyons (R2). Pour tout $\alpha \in R \cap V_X$, la réflexion s_α laisse stable V_X ; de plus, si $\beta \in R \cap V_X$, alors $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha$ appartient à $R \cap V_X$. Ceci montre que (R2) est vérifié. Le lemme est démontré. \square

En particulier, soit R un système de racines de rang ≥ 2 et soient $\alpha, \beta \in R$ non proportionnelles. Alors α et β engendrent un sous-système de racines de rang 2. On va voir dans le paragraphe suivant qu'on peut facilement classifier les systèmes de racines de rang 2.

Auparavant, notons le corollaire suivant.

Corollaire 4.5. — Soit V_1 un sous-espace de V . Alors $R \cap V_1$ est un système de racines dans le sous-espace V_2 engendré par $R \cap V_1$.

Démonstration. — Ceci résulte du lemme, appliqué à $X = R \cap V_1$. \square

4.2. Systèmes de racines de rang 2. — Soit R un système de racines de rang 2 et soient $\alpha, \beta \in R$ non proportionnelles. Notons θ l'angle (non-orienté) des droites $\mathbb{R}\alpha$ et $\mathbb{R}\beta$. On a

$$\theta \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad \frac{(\beta, \alpha)^2}{(\beta, \beta)(\alpha, \alpha)} = \cos^2 \theta.$$

On obtient donc que

$$4 \cos^2 \theta = (\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee)$$

est un entier ≥ 0 , et < 4 . (Comme α et β ne sont pas proportionnelles, on a $\theta > 0$ et donc $\cos^2 \theta < 1$.) On obtient donc que le produit d'entiers :

$$(\bullet) \quad P = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)}$$

vaut 0, 1, 2 ou 3. Il est nul si et seulement si $(\beta, \alpha) = 0$; dans ce cas il n'y pas de condition imposée sur les normes de α et β , et l'on obtient un système de racines noté $A_1 \times A_1$.

Pour la suite de la discussion, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$(*) \quad (\alpha, \alpha) \leq (\beta, \beta) \quad \text{et} \quad (\beta, \alpha) < 0.$$

Si $P = 1$, on a alors $(\beta, \alpha^\vee) = -1 = (\alpha, \beta^\vee)$ et donc

$$\|\alpha\| = \|\beta\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

En prenant α et β de norme 1 dans le plan complexe $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on peut prendre $\alpha = 1$ et $\beta = \exp(i2\pi/3)$. Alors s_α est la réflexion orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées, et

$$s_\alpha(\beta) = \beta + \alpha = \exp(i\pi/3).$$

Désignant cette racine par γ , on a aussi $\gamma = s_\beta(\alpha)$, et on vérifie que

$$s_\gamma(\alpha) = \alpha - \gamma = -\beta.$$

On obtient ainsi que $R = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$ est un système de racines de rang 2, formé par les sommets d'un hexagone régulier. On le note A_2 . On verra plus loin que c'est le système de racines de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

Supposons maintenant $P = 2$. Alors, compte-tenu de notre hypothèse (*), on a $(\beta, \alpha^\vee) = -2$ et $(\alpha, \beta^\vee) = -1$, donc

$$\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Alors, dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on peut prendre $\alpha = 1$ et $\beta = -1 + i$. Alors s_α , resp. s_β est la réflexion orthogonale par rapport à la droite des ordonnés, resp. la première diagonale ($y = x$), et l'on a

$$s_\alpha(\beta) = \beta + 2\alpha = 1 + i; \quad s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = i.$$

Désignant ces racines par δ et γ , respectivement, on vérifie que

$$\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta\}$$

est un système de racines, qu'on désigne par B_2 ou C_2 . Les huit racines correspondent aux sommets et milieux des côtés d'un carré. On verra plus loin (peut-être...) que c'est le système de racines de l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \mid A + {}^t A = 0\}.$$

Supposons enfin $P = 3$. Alors, compte-tenu de notre hypothèse (*), on a $(\beta, \alpha^\vee) = -3$ et $(\alpha, \beta^\vee) = -1$, donc

$$\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Alors, dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on peut prendre $\alpha = 1$ et

$$\beta = \sqrt{3} \exp(i5\pi/6) = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient alors les racines

$$\begin{aligned} \gamma &= s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = \exp(i2\pi/3), \\ \delta &= s_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha = \sqrt{3} \exp(i\pi/6), \end{aligned}$$

puis les racines

$$\begin{aligned} \gamma' &= s_\alpha(s_\beta(\alpha)) = \beta + 2\alpha = \exp(i\pi/3), \\ \delta' &= s_\gamma(s_\alpha(\beta)) = 2\beta + 3\alpha = i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On vérifie qu'on obtient ainsi un système de racines formé de 6 racines **courtes** (de longueur 1) $\{\pm\alpha, \pm\gamma, \pm\gamma'\}$ formant les sommets d'un hexagone régulier de côté 1, et de 6 racines **longues** (de longueur $\sqrt{3}$) $\{\pm\beta, \pm\delta, \pm\delta'\}$, formant elles-aussi un hexagone régulier, mais de côté $\sqrt{3}$ et décalé d'un angle de $\pi/6$ par rapport au précédent. On note G_2 ce système de racines. C'est le système de racines de l'algèbre de Lie des dérivations de la \mathbb{C} -algèbre (non associative!) des octonions.

On obtient ainsi tous les systèmes de racines de rang 2. En effet, dans G_2 l'angle entre deux racines successives est $\pi/6$, qui est le plus petit possible, donc on ne peut y rajouter aucune racine.

De même, dans $B_2 = C_2$, l'angle entre deux racines successives est $\pi/4$, et on ne peut pas y intercaler une racine intermédiaire, car l'un des angles serait $\leq \pi/8$, impossible.

Dans A_2 , l'angle entre deux racines successives est $\pi/3$; on peut y intercaler une racine au milieu, formant ainsi deux angles de $\pi/6$: on se retrouve dans le cas G_2 .

Enfin, si on part de $A_1 \times A_1$, on peut y rajouter une racine, et l'on crée ainsi des angles de $\pi/4$ ou bien $\pi/3$ et $\pi/6$, et l'on se retrouve, respectivement, dans le cas B_2 ou bien G_2 .

On a donc obtenu la liste complète des systèmes de racines de rang 2 :

$$A_1 \times A_1, \quad A_2, \quad B_2, \quad G_2.$$

Les \mathbb{C} -algèbres de Lie correspondantes sont, respectivement,

$$\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2, \quad \mathfrak{sl}_3, \quad \mathfrak{so}_5$$

et l'algèbre de Lie simple exceptionnelle de dimension 14, notée G_2 .

Pour classifier les systèmes de racines de rang arbitraire, on aura besoin du résultat suivant, qui est un corollaire de la discussion précédente concernant le produit $P \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Corollaire 4.6. — *Supposons $(\alpha, \beta) > 0$. Alors $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ sont des racines.*

Démonstration. — Les entiers (α, β^\vee) et (β, α^\vee) sont positifs et leur produit est égal à 1, 2 ou 3. Quitte à échanger α et β , on peut donc supposer que $(\beta, \alpha^\vee) = 1$. Alors

$$s_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha = \beta - \alpha$$

est une racine, de même que $\alpha - \beta$. \square

4.3. Bases d'un système de racines. —

Définition 4.7. — Soit R un système de racines dans V . Une partie Δ de R est appelée une **base** de R si :

- (1) Δ est une base de l'espace vectoriel V ;
- (2) tout $\beta \in R$ s'écrit comme combinaison linéaire $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$, où les m_α sont des entiers de même signe (c.-à-d., tous ≥ 0 ou bien tous ≤ 0).

On va montrer qu'il existe des bases de R . Plus précisément, on va montrer que tout hyperplan \mathcal{H} de V ne rencontrant pas R détermine une base de R , et que toute base est obtenue de cette façon. En fait, \mathcal{H} détermine deux demi-espaces \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- , chacun contient une base, disons Δ^+ et Δ^- , et l'on a $\Delta^- = -\Delta^+$. Pour spécifier le demi-espace « positif » \mathcal{H}^+ , on choisit l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à \mathcal{H} . Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 4.8. — On dit que $y \in V$ est **régulier** si $(y, \alpha) \neq 0$, pour tout $\alpha \in R$. Dans ce cas, on a une partition

$$R = R^+(y) \sqcup R^-(y),$$

$$\text{où } R^+(y) = \{\alpha \in R \mid (y, \alpha) > 0\}, \text{ et } R^-(y) = -R^+(y),$$

et l'on note $\Delta(y)$ l'ensemble des $\alpha \in R^+(y)$ qui sont **indécomposables**, c.-à-d., qui ne peuvent pas s'écrire $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \in R^+(y)$.

Lemme 4.9. — *Tout élément de $R^+(y)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers ≥ 0 d'éléments de $\Delta(y)$. En particulier, $\Delta(y)$ engendre V .*

Démonstration. — Notons \mathcal{S} l'ensemble des $\gamma \in R^+(y)$ qui ne sont pas somme d'éléments de $\Delta(y)$, et supposons $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Alors, il existe $\gamma \in \mathcal{S}$ tel que (y, γ) soit minimal, et γ n'est pas indécomposable (sinon il serait dans $\Delta(y)$), donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+(y)$ tels que $\gamma = \alpha + \beta$, et donc

$$(y, \gamma) = (y, \alpha) + (y, \beta).$$

Comme $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+(y)$, chaque terme du membre de droite est > 0 et donc chacun est $< (y, \gamma)$. Par minimalité de γ on a donc $\alpha \notin \mathcal{S}$ et $\beta \notin \mathcal{S}$, d'où il résulte que $\gamma \notin \mathcal{S}$, contradiction. Ceci montre que $\mathcal{S} = \emptyset$, d'où la première assertion. La seconde en résulte, puisque $\mathbf{R}^+(y)$ engendre V . \square

Lemme 4.10. — Soient y régulier et $\alpha, \beta \in \Delta(y)$. Alors $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Démonstration. — Sinon, d'après le corollaire 4.6, $\gamma := \alpha - \beta$ et $-\gamma$ seraient des racines. On aurait alors : ou bien $\gamma \in \mathbf{R}^+(y)$, et $\alpha = \gamma + \beta$ serait décomposable, ou bien $-\gamma \in \mathbf{R}^+(y)$ et $\beta = -\gamma + \alpha$ serait décomposable ; une contradiction dans les deux cas. Ceci prouve le lemme. \square

Lemme 4.11. — Soient $y \in V$ et A une partie de V tels que :

(i) $(z, a) > 0$, pour tout $a \in A$;

(ii) $(b, c) \leq 0$, pour tout $b, c \in A$.

Alors les éléments de A sont linéairement indépendants.

Démonstration. — Sinon, on aurait une égalité

$$\sum_{b \in B} t_b b = \sum_{c \in C} u_c c,$$

où B et C sont des parties finies, disjointes, de A et où les t_b , les u_c sont des réels > 0 , et, disons, $B \neq \emptyset$. Posons $x = \sum_{b \in B} t_b b$. Alors

$$(x, x) = \sum_{b, c} t_b u_c (b, c) \leq 0,$$

d'après (ii), d'où $x = 0$. Donc

$$0 = (z, x) = \sum_{b \in B} t_b (z, b).$$

Or, par hypothèse, $B \neq \emptyset$ et les t_b et (z, b) sont > 0 , d'où une contradiction. Ceci prouve le lemme. \square

Théorème 4.12 (Bases de R). — Il existe des bases de R . Plus précisément, pour tout $y \in V$ régulier, $\Delta(y)$ est une base de R , et réciproquement, toute base est de cette forme.

Démonstration. — Si $y \in V$ est régulier, il résulte des trois lemmes précédents que $\Delta(y)$ est une base de R . Montrons la réciproque.

Soit Δ une base de R et soit R^+ , resp. R^- , l'ensemble des $\gamma \in R$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers ≥ 0 , resp. ≤ 0 , des éléments de Δ . Comme Δ est une base de V , il existe $y \in V$ tel que $(y, \alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Alors y est régulier et l'on a

$$R^+ \subseteq R^+(y) \quad \text{et} \quad R^- \subseteq R^-(y).$$

Puisque $R = R^+ \cup R^-$ et $R^+(y) \cap R^-(y) = \emptyset$, on en déduit que $R^+ = R^+(y)$.

Alors, comme les éléments de Δ sont indécomposables dans R^+ , ils le sont aussi dans $R^+(y)$, c.-à-d., on a l'inclusion $\Delta \subseteq \Delta(y)$. Comme ces ensembles ont même cardinal (la dimension de V), il en résulte $\Delta = \Delta(y)$. Ceci termine la démonstration du théorème. \square

4.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin. — Soit R un système de racines et soit Δ une base de R .

Définition 4.13. — On appelle **matrice de Cartan de R** (relativement à Δ) la matrice $((\beta, \alpha^\vee))_{\alpha, \beta \in \Delta}$, c.-à-d., si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une numérotation des éléments de Δ , c'est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & (\alpha_1, \alpha_2^\vee) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n^\vee) \\ (\alpha_2, \alpha_1^\vee) & 2 & & (\alpha_2, \alpha_n^\vee) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1^\vee) & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 4.14. — On appelle **graphe de Coxeter de R** (relativement à Δ), et l'on note $\mathcal{C}(R)$, le graphe dont les sommets sont les éléments de Δ , deux sommets distincts α et β étant reliés par 0, 1, 2 ou 3 arêtes suivant que le produit $(\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee)$ est égal à 0, 1, 2 ou 3.

Remarque 4.15. — On verra plus loin que $\mathcal{C}(R)$ ne dépend pas du choix de la base Δ , ce qui justifie la notation.

Définition 4.16. — On dit que R est **irréductible** si le graphe $\mathcal{C}(R)$ est connexe.

Définition 4.17. — On appelle **diagramme de Dynkin de R** (relativement à Δ) le diagramme noté $D(R)$ et obtenu à partir du graphe de Coxeter de R de la façon suivante. Soient α, β deux sommets tels que :

$$P = (\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee) = 2 \text{ ou } 3;$$

alors on a :

$$(\beta, \alpha^\vee) = -P \Leftrightarrow (\beta, \beta) = P \cdot (\alpha, \alpha),$$

et dans ce cas on rajoute sur l'arête (de multiplicité P) reliant α à β , un signe $>$ pointant vers α (c.-à-d., le signe $>$ indique que $(\beta, \beta) > (\alpha, \alpha)$).

Remarque 4.18. — On verra plus loin que $D(R)$ ne dépend pas de Δ , ce qui justifie la notation. D'autre part, il est clair que $D(R)$ contient exactement la même information que la matrice de Cartan de R .

Définition 4.19. — On dit que $D(R)$ est connexe si le graphe de Coxeter sous-jacent l'est.

Pour classifier les graphes de Coxeter (et les diagrammes de Dynkin), il est commode d'introduire la notion suivante.

Définition 4.20. — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien. On appelle **ensemble de vecteurs admissible** dans E un ensemble $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de vecteurs *unitaires* linéairement indépendants et tels que, pour tout $i \neq j$, on ait

$$(e_i, e_j) \leq 0, \quad \text{et} \quad 4(e_i, e_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

À un tel \mathcal{E} on associe le graphe $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$ dont les sommets sont les e_i , et où deux sommets distincts e_i et e_j sont reliés par $4(e_i, e_j)^2$ arêtes. Un tel graphe est appelé un **graphe admissible**.

Si R est un système de racines et Δ une base de R , alors l'ensemble \mathcal{E} des vecteurs unitaires $\alpha/|\alpha|$, $\alpha \in \Delta$, est admissible, et $\Gamma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}(R)$. Par conséquent, pour classifier les graphes de Coxeter $\mathcal{C}(R)$, il suffit de classifier les graphes admissibles. Ceci est l'objet de la section suivante.

5. Classification des graphes admissibles

5.1. Premières réductions. — Soit \mathcal{E} un ensemble de vecteurs admissibles et soit $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$.

Définition 5.1. — Si x est un sommet de Γ , on appelle **valence de x** , et on note $v(x)$, le nombre d'arêtes partant de x , comptées avec leur multiplicité.

Lemme 5.2. — Si \mathcal{E}' est un sous-ensemble de \mathcal{E} , alors \mathcal{E}' est admissible et $\Gamma(\mathcal{E}')$ est le sous-graphe de $\Gamma(\mathcal{E})$ supporté par \mathcal{E}' .

Démonstration. — C'est clair. □

Lemme 5.3. — Le nombre $p(E)$ de paires de sommets dans $\Gamma(\mathcal{E})$ reliés par au moins une arête est $< \#\mathcal{E}$.

Démonstration. — Posons $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $\varepsilon = \sum_{i=1}^n e_i$. Comme les e_i sont linéairement indépendants, on a $\varepsilon \neq 0$ et donc

$$(*) \quad 0 < (\varepsilon, \varepsilon) = n + 2 \sum_{i < j} (e_i, e_j).$$

Si deux sommets distincts e_i et e_j sont reliés, $4(e_i, e_j)^2$ est égal à 1, 2 ou 3, et donc $2(e_i, e_j)$ est ≤ -1 . Par conséquent, (*) montre qu'il y a au plus $n - 1$ paires de sommets reliés. \square

Lemme 5.4. — $\Gamma(\mathcal{E})$ ne contient pas de cycles.

Démonstration. — Supposons que $\Gamma(\mathcal{E})$ contienne un cycle C, de cardinal $m \geq 3$. Soit \mathcal{E}' le support de C. Alors \mathcal{E}' est un ensemble admissible, et l'on a $p(\mathcal{E}') \geq m = \#\mathcal{E}'$, contradiction. \square

Lemme 5.5. — (a) Tout sommet de Γ est de valence ≤ 3 .

(b) Si Γ est connexe et contient une arête triple, alors Γ est le graphe $\mathfrak{O} \equiv 0$.

Démonstration. — Soit x un sommet de Γ , et soient y_1, \dots, y_r les sommets reliés à x . On a $(x, y_i) < 0$ pour tout i . Soient F le sous-espace engendré par les y_i , et x' la projection orthogonale de x sur F. Comme x et les y_i sont linéairement indépendants, on a $x \neq x'$ et donc $(x', x') < (x, x) = 1$.

D'autre part, comme Γ ne contient pas de cycles, on a $(y_i, y_j) = 0$ pour $i \neq j$. Il en résulte que $x' = \sum_i (x, y_i) y_i$. Par conséquent, on a

$$\sum_i (x, y_i)^2 = (x', x') < 1, \quad \text{d'où} \quad \sum_i 4(x, y_i)^2 < 4.$$

Or $\sum_i 4(x, y_i)^2$ est la valence de x , d'où l'assertion (a).

S'il existe dans Γ deux sommets x et y reliés par une arête triple, c.-à-d., si $4(x, y) = 3$, alors l'argument précédent montre que x et y ne sont reliés à aucun autre sommet de Γ . L'assertion (b) en découle. \square

Lemme 5.6. — Soit $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ un sous-ensemble de \mathcal{E} tel que $\Gamma(\mathcal{E}')$ soit une chaîne formée d'arêtes simples. Posons

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}') \cup \{\varepsilon\}.$$

Alors $\text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$ est admissible, et son graphe est obtenu à partir de celui de $\Gamma(\mathcal{E})$ en contractant $\Gamma(\mathcal{E}')$ en un seul point.

Démonstration. — Par hypothèse, on a $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$ pour $i = 1, \dots, r - 1$, et les autres produits scalaires entre les ε_i sont nuls. Par conséquent, on a

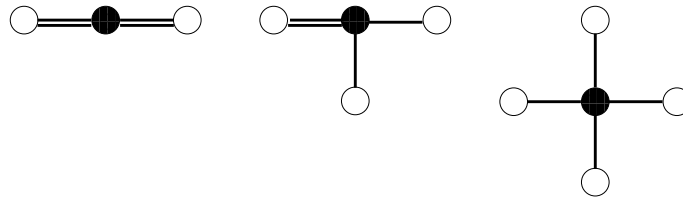
$$(\varepsilon, \varepsilon) = r - 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = r - (r - 1) = 1.$$

D'autre part, soit x un élément de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ relié dans $\Gamma(\mathcal{E})$ à un élément ε_i de \mathcal{E}' . Comme $\Gamma(\mathcal{E})$ ne contient pas de cycles, alors ε_i est l'unique élément de \mathcal{E}' relié à x . Par conséquent, on a $(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon_i)$. Ceci montre que $\text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$ est admissible, et que son graphe a la forme annoncée. \square

Définition 5.7. — On appelle **point de bifurcation** un sommet de Γ qui est relié à au moins 3 autres sommets.

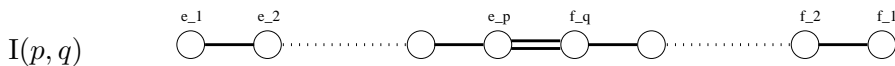
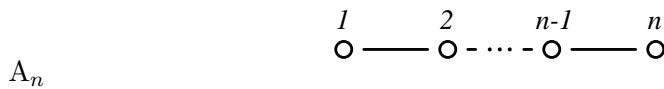
Lemme 5.8. — Si Γ est connexe, il ne peut posséder deux arêtes doubles, ni une arête double et un point de bifurcation, ni deux points de bifurcation.

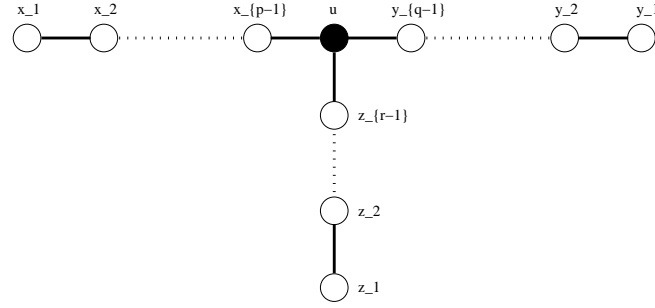
Démonstration. — Sinon, on déduirait du lemme précédent qu'il existe des sous-ensembles $\mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}''$ tels que l'ensemble admissible $\text{cont}_{\mathcal{E}''}(\mathcal{E}')$ ait pour graphe l'un des graphes suivants :



Mais alors le sommet \bullet serait de valence 4, contradiction. \square

5.2. Fin de la classification des graphes admissibles. — Il résulte de ce qui précède que tout graphe admissible connexe est de l'un des types suivants.





$\text{II}(p, q, r)$

Lemme 5.9. — Soit Γ un graphe admissible de type $\text{I}(p, q)$, avec $p \geq q \geq 1$. Alors $q = 1$ ou bien $q = 2 = p$.

Démonstration. — Posons $e = \sum_{i=1}^p i e_i$ et $f = \sum_{j=1}^q j f_j$. On a $2(e_i, e_{i+1}) = -1$, pour $i = 1, \dots, p-1$, et $(e_i, e_j) = 0$ pour $j \neq i+1$. Donc

$$(e, e) = \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2} \quad \text{et, de même,} \quad (f, f) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

D'autre part, comme

$$(e_i, f_j)^2 = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i = p \text{ et } j = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a $(e, f)^2 = (pq)^2 (e_p, f_q)^2 = (pq)^2/2$.

Comme ε et η sont linéairement indépendants, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que $(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta)$, d'où $2(pq)^2 < pq(p+1)(q+1)$. On en déduit que $(p-1)(q-1) < 2$.

Comme $p \geq q \geq 1$, ceci n'est possible que si $q = 1$, ou $q = 2 = p$. \square

Lemme 5.10. — Soit Γ un graphe admissible de type $\text{II}(p, q, r)$, avec $p \geq q \geq r \geq 2$. Alors ou bien $q = r = 2$, ou bien (p, q, r) est l'un des triplets suivants : $(5, 3, 2)$, $(4, 3, 2)$, $(3, 3, 2)$.

Démonstration. — Posons $x = \sum_i i x_i$, $y = \sum_j j y_j$, et $z = \sum_k k z_k$. Comme dans le lemme précédent, on obtient :

$$(x, x) = \frac{(p-1)p}{2}, \quad (y, y) = \frac{(q-1)q}{2}, \quad (z, z) = \frac{(r-1)r}{2},$$

et

$$\begin{cases} (u, x) = (p-1)(u, x_{p-1}) = (p-1)/2, \\ (u, y) = (q-1)(u, y_{q-1}) = (q-1)/2, \\ (u, z) = (r-1)(u, z_{r-1}) = (r-1)/2. \end{cases}$$

Soit V' le sous-espace engendré par x, y, z , et soit u' la projection orthogonale de u sur V' . Puisque x, y, z sont deux à deux orthogonaux, on a

$$u' = (u, x) \frac{x}{(x, x)} + (u, y) \frac{y}{(y, y)} + (u, z) \frac{z}{(z, z)},$$

d'où

$$\begin{aligned} (u', u') &= \frac{(u, x)^2}{(x, x)} + \frac{(u, y)^2}{(y, y)} + \frac{(u, z)^2}{(z, z)} \\ &= \frac{(p-1)^2}{4} \frac{2}{(p-1)p} + \frac{(q-1)^2}{4} \frac{2}{(q-1)q} + \frac{(r-1)^2}{4} \frac{2}{(r-1)r} \\ &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Enfin, comme $u \notin V'$, on a $(u', u') < (u, u) = 1$. On en déduit que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Comme $p \geq q \geq r \geq 2$, ceci entraîne que $r = 2$ et $q \leq 3$. Si $q = 2$ alors p est arbitraire, et si $q = 3$ alors

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

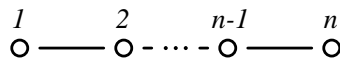
et donc $p \leq 5$. Le lemme est démontré. \square

On a donc obtenu que les graphes admissibles connexes sont les suivants. (La numérotation est celle de Bourbaki [BL4-6, Planches I-IX].)

G_2



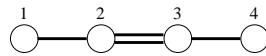
A_n

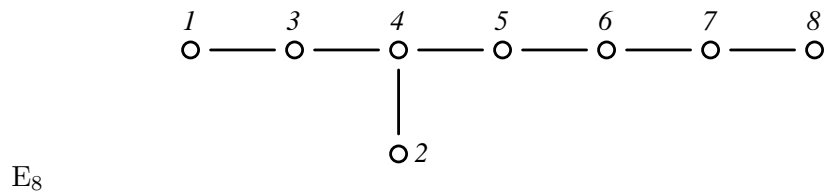
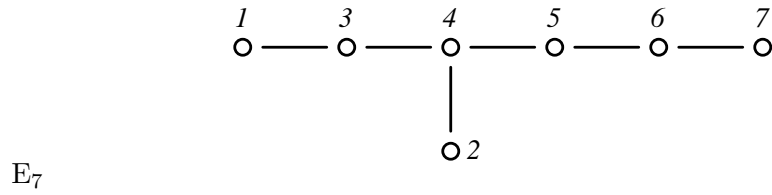
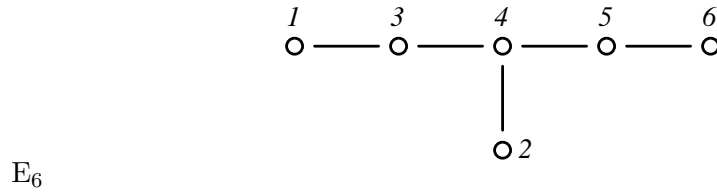
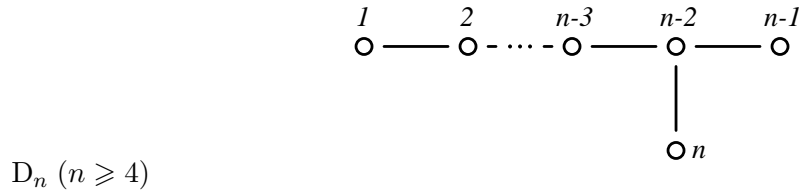


B_n



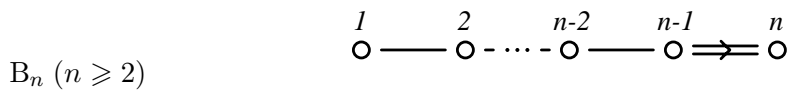
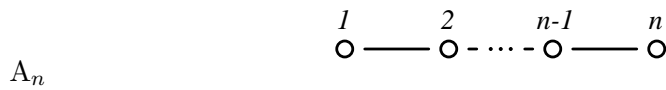
F_4

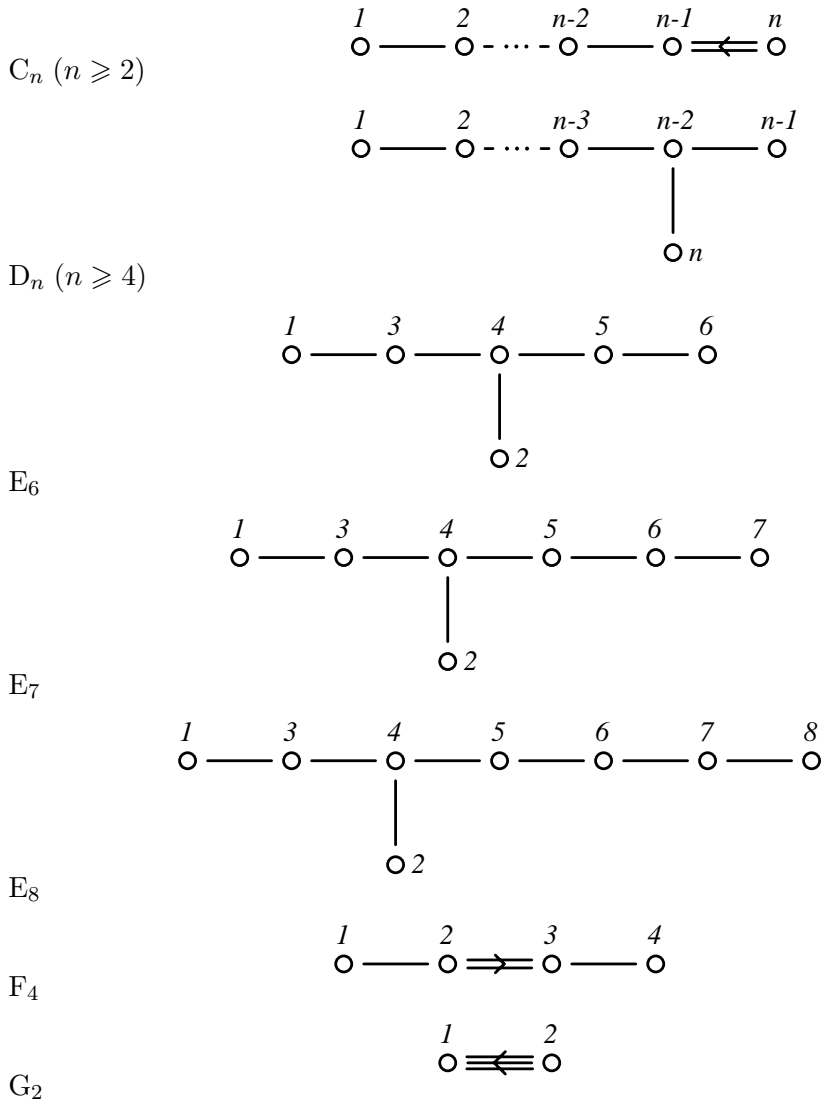




5.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes. — On obtient finalement le théorème ci-dessous, où la numérotation est celle de Bourbaki [BL4-6, Planches I-IX].

Théorème 5.11. — *Les diagrammes de Dynkin connexes sont exactement les diagrammes suivants, qui sont deux à deux non isomorphes, à l'exception de $B_2 \cong C_2$:*





6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines

Pour terminer la classification des systèmes de racines, il reste à voir les deux points suivants.

(1) Le diagramme de Dynkin (ainsi que le graphe de Coxeter) ne dépend pas de la base de R choisie. Pour cela, on introduit le **groupe de Weyl de R** et l'on montre que toutes les bases de R sont conjuguées par W .

(2) Chacun des diagrammes de Dynkin obtenus plus haut provient d'un unique système de racines.

Pour ces deux points, on renvoie pour le moment au livre de Serre [Se, Ch. V, §§ 10–11 & 16] ou celui de Humphreys [Hu, §§ 10–12], voir aussi [BL4-6, Planches I–IX] pour une description plus détaillée des systèmes de racines.

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 18/9	1
1. Groupes topologiques	1
2. Interlude sur les représentations de groupes finis	3
3. Mesure de Haar sur un groupe compact	5
3.1. Représentations régulières gauche et droite	5
3.2. Intégration invariante	6
3.3. Théorème du point fixe de Kakutani	6
Séance du 19/9	9
3. Mesure de Haar sur un groupe compact (suite)	9
3.4. Mesures de Radon	11
3.5. Mesure de Haar sur un groupe compact	12
4. Représentations unitaires et théorème de Peter-Weyl	16
4.1. Représentations continues	16
4.2. Représentations unitaires	17
4.3. Opérateurs compacts	18
4.4. Opérateurs à noyaux	19
Séance du 25/9	21
5. L'algèbre des « fonctions représentatives »	21
5.1. Coefficients matriciels	21
5.2. Fonctions représentatives	23
5.3. Cas des groupes compacts	24
5.4. Schur, Burnside et produits tensoriels	25
5.5. Résultats sur les modules semi-simples	26
5.6. Appendice : preuve du théorème de Burnside	28
4. Théorème de Peter-Weyl (suite)	29
4.4. Opérateurs à noyaux	29

Séance du 26/9	35
4.5. Une conséquence du théorème de Peter-Weyl	35
6. Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$	36
6.1. Algèbres de Lie	36
6.2. Propriétés de l'exponentielle	36
6.3. L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$	39
6.4. Composante connexe d'un groupe topologique	40
7. Groupes de Lie	42
7.1. Variétés différentiables	42
Séance du 2 octobre	45
7. Groupes de Lie (suite)	45
7.1. Variétés différentiables (suite)	45
7.2. « Rappels » de calcul différentiel	47
7.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de \mathbb{R}^N	50
7.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant	52
Séance du 3 octobre	55
7. Groupes de Lie (suite)	55
7.5. Dérivations et champs de vecteurs	55
7.6. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	63
7.7. Retour aux sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$	65
7.8. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie	69
7.9. Représentations	73
Partie II : Algèbres de Lie	
Séances du 9 et 10 octobre	75
1. Algèbres de Lie : définitions et premières propriétés	75
1.1. Algèbres de Lie, idéaux, modules	75
1.2. Algèbres de Lie résolubles ou nilpotentes	80
1.3. Formes invariantes et forme de Killing	82
1.4. Théorème d'Engel et applications	85
2. Théorème de Lie et critère de Cartan	87
2.1. Théorème de Lie et conséquences	87
2.2. Poids des algèbres de Lie nilpotentes	90
2.3. Sous-algèbres de Cartan	93
2.4. Critère de Cartan	97
Partie II : Algèbres de Lie	
Séances du 16 et 17 octobre	99
3. Racines d'une \mathbb{C} -algèbre de Lie semi-simple	99
3.1. Racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g}	99
3.2. Algèbre enveloppante d'une k -algèbre de Lie	102

3.3. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	104
3.4. Retour à la preuve du théorème d'intégralité	105
3.5. Passage à un \mathbb{R} -espace euclidien	106
3.6. Le système de racines $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$	107
Partie II : Algèbres de Lie	
Séances du 17 et 23 octobre	109
3. Racines d'une \mathbb{C} -algèbre de Lie semi-simple (suite)	109
3.7. Le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	109
4. Systèmes de racines	109
4.1. Définitions	109
4.2. Systèmes de racines de rang 2	110
4.3. Bases d'un système de racines	113
4.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin	115
5. Classification des graphes admissibles	116
5.1. Premières réductions	116
5.2. Fin de la classification des graphes admissibles	118
5.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes	121
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines	122
Bibliographie	i

Bibliographie

- [Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
- [Am] Y. Amice, Les nombres p -adiques, P.U.F., 1975.
- [Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
- [BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
- [BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.
- [BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
- [BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
- [BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
- [Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
- [Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
- [Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
- [DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
- [Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
- [Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
- [GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.
- [He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
- [Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.
- [Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
- [Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
- [Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
- [La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
- [Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
- [MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.
- [Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

- [Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.
- [Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.
- [Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.
- [Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
- [Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.
- [Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.
- [Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.