

## EXPOSÉ XX

### GROUPES RÉDUCTIFS DE RANG SEMI-SIMPLE 1

par M. DEMAZURE

#### 1. Systèmes élémentaires. Les groupes $U_\alpha$ et $U_{-\alpha}$

(0)

35

**Rappel 1.1.** — Soit  $S = \text{Spec}(k)$ , où  $k$  est un corps algébriquement clos, et soient  $G$  un  $S$ -groupe réductif de rang semi-simple 1,  $T$  un tore maximal (nécessairement déployé) de  $G$ . On a alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

où  $\alpha$  et  $-\alpha$  sont les racines de  $G$  par rapport à  $T$ . De plus, il existe deux monomorphismes de groupes

$$p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow G \quad \text{et} \quad p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow G$$

tels que

$$t p_\alpha(x) t^{-1} = p_\alpha(\alpha(t)x) \quad \text{et} \quad t p_{-\alpha}(x) t^{-1} = p_{-\alpha}(\alpha(t)^{-1}x),$$

pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $t \in T(S')$ ,  $x \in \mathbb{G}_a(S')$ , et que le morphisme

$$\mathbb{G}_{a,S} \times_S T \times_S \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow G,$$

défini par  $(y, t, x) \mapsto p_{-\alpha}(y) t p_\alpha(x)$ , soit radiciel et dominant (*Bible*, §13.4, cor. 2 au th. 3).

Comme l'application tangente à l'élément neutre est bijective, ce morphisme est également séparable, donc birationnel ; par le « Main Theorem » de Zariski (EGA III<sub>1</sub>, 4.4.9), c'est donc une immersion ouverte.

**Lemme 1.2.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -schéma en groupes,  $T$  un tore de  $G$ ,  $Q$  un sous-tore de  $T$ ,  $\alpha$  un caractère de  $T$  induisant sur  $Q$  un caractère non trivial sur chaque fibre. Soit  $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$  (resp.  $p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$ ) un morphisme de groupes normalisé par  $T$  avec le multiplicateur  $\alpha$  (resp.  $-\alpha$ ). Supposons que le morphisme

$$u : \mathbb{G}_{a,S} \times_S T \times_S \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow G$$

---

(0)N.D.E. : Version du 13/10/2024

défini ensemblistement par  $u(y, t, x) = p_{-\alpha}(y) t p_{\alpha}(x)$  soit une immersion ouverte. Soient enfin  $q$  un entier  $\geq 0$  et

$$p : \mathbb{G}_{a, S} \longrightarrow G$$

un morphisme de groupes tel que pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $t \in Q(S')$ ,  $x \in \mathbb{G}_a(S')$  on ait

$$\text{int}(t)^q(p(x)) = p(\alpha(t)x).$$

Il existe alors un unique  $\nu \in \mathbb{G}_a(S)$  tel que  $p(x) = p_{\alpha}(\nu x^q)$ .

Soient en effet  $\Omega$  l'image de  $u$  et  $U = p^{-1}(\Omega)$ . C'est un ouvert de  $\mathbb{G}_{a, S}$ , contenant la section nulle. Pour toute section  $t$  de  $Q$ , l'automorphisme de  $\mathbb{G}_{a, S}$  défini par la multiplication par  $\alpha(t)$  laisse fixe globalement  $U$ . On a  $U = \mathbb{G}_{a, S}$ ; en effet, il suffit de le vérifier lorsque  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos  $k$ ; alors  $\alpha : Q(k) \rightarrow k^*$  est surjectif, ce qui prouve aussitôt  $U(k) \supset k^*$ , donc  $U = \mathbb{G}_{a, k}$ . Il existe donc trois morphismes

$$a : \mathbb{G}_{a, S} \longrightarrow \mathbb{G}_{a, S}, \quad b : \mathbb{G}_{a, S} \longrightarrow T, \quad c : \mathbb{G}_{a, S} \longrightarrow \mathbb{G}_{a, S},$$

tels que

$$p(x) = p_{-\alpha}(a(x)) b(x) p_{\alpha}(c(x)).$$

La condition sur  $p$  se traduit par

$$\begin{aligned} a(\alpha(t)x) &= \alpha(t)^{-q} a(x), \\ b(\alpha(t)x) &= b(x), \\ c(\alpha(t)x) &= \alpha(t)^q c(x). \end{aligned}$$

**37** Pour la même raison que précédemment, on a donc pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $z \in \mathbb{G}_m(S')$ ,

$$a(zx) = z^{-q} a(x), \quad b(zx) = b(x), \quad c(zx) = z^q c(x),$$

donc

$$z^q a(z) = a(1), \quad b(z) = b(1), \quad c(z) = z^q c(1).$$

Comme  $\mathbb{G}_{m, S}$  est schématiquement dense dans  $\mathbb{G}_{a, S}$ , on a aussitôt pour tout  $x \in \mathbb{G}_a(S')$ ,  $S' \rightarrow S$  :

$$\begin{aligned} x^q a(x) &= a(1) = a(0) = 0, & \text{d'où } a &= 0, \\ c(x) &= x^q c(1) = \nu x^q, & \text{pour un } \nu &\in \mathbb{G}_a(S), \\ b(x) &= b(1) = b(0) = e, & \text{d'où } b &= e, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

**Définition 1.3.** — Soit  $S$  un schéma. On appelle *S-système élémentaire* un triplet  $(G, T, \alpha)$  où

- (i)  $G$  est un  $S$ -groupe réductif de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 2.7),
- (ii)  $T$  est un tore maximal de  $G$ ,
- (iii)  $\alpha$  est une racine de  $G$  par rapport à  $T$  (Exp. XIX 3.2).

On a donc une décomposition en somme directe (Exp. XIX 3.5) <sup>(1)</sup>

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

$\mathfrak{g}^\alpha$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  étant localement libres de rang un.

**1.4.** — Si  $(G, T, \alpha)$  est un  $S$ -système élémentaire, alors  $(G_{S'}, T_{S'}, \alpha_{S'})$  est un  $S'$ -système élémentaire pour tout  $S' \rightarrow S$ . Si  $(G, T, \alpha)$  est un  $S$ -système élémentaire, alors  $(G, T, -\alpha)$  en est aussi un.

Si  $S$  est un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe réductif,  $T$  un tore maximal de  $G$ ,  $\alpha$  une racine de  $G$  par rapport à  $T$ , alors (Exp. XIX 3.9),  $(Z_\alpha, T, \alpha)$  est un  $S$ -système élémentaire. 38

Soit  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire. Le module inversible  $\mathfrak{g}^\alpha$  est muni canoniquement d'une structure de  $T$ -module. On a donc également une structure de  $T$ -module sur le fibré vectoriel  $W(\mathfrak{g}^\alpha)$ . D'autre part, les automorphismes intérieurs de  $T$  définissent sur  $G$  une structure de groupe à groupe d'opérateurs  $T$ .

**Théorème 1.5.** — Soit  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire.

(i) Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs  $T$

$$\exp : W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

qui induise sur les algèbres de Lie le morphisme canonique  $\mathfrak{g}^\alpha \rightarrow \mathfrak{g}$ . <sup>(2)</sup>

Autrement dit,  $\exp$  est l'unique morphisme vérifiant les conditions suivantes : pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $t \in T(S')$ ,  $X, X' \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$ , on a

$$\begin{aligned} \exp(X + X') &= \exp(X) \exp(X'), \\ \text{int}(t)(\exp(X)) &= \exp(\alpha(t)X), \\ \underline{\text{Lie}}(\exp)(X) &= X. \end{aligned}$$

(ii) Si on définit de même (dans le  $S$ -système élémentaire  $(G, T, -\alpha)$ )

$$\exp : W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \longrightarrow G,$$

alors le morphisme

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \times_S T \times_S W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par  $(Y, t, X) \mapsto \exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)$  est une immersion ouverte.

Supposons avoir démontré l'existence des morphismes  $\exp$  demandés et démontrons les autres assertions du théorème. Prouvons d'abord (ii). Comme les deux membres sont de présentation finie et plats sur  $S$ , il suffit de le faire lorsque  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos (SGA 1, I 5.7 et VIII 5.5). Soit alors  $S = \text{Spec } k$ . Soient  $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ ,  $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$ . Il suffit de prouver que le morphisme 39

$$\mathbb{G}_{a,k} \times_k T \times_k \mathbb{G}_{a,k} \longrightarrow G \quad (y, t, x) \mapsto \exp(yY) t \exp(xX)$$

<sup>(1)</sup>N.D.E. : de  $\mathcal{O}_S$ -modules.

<sup>(2)</sup>N.D.E. : On verra plus loin (Cor. 5.9) que  $\exp$  est un isomorphisme de  $W(\mathfrak{g}^\alpha)$  sur un sous-groupe fermé de  $G$ .

est une immersion ouverte. Or d'après 1.1 et 1.2, il existe  $a, b \in k$  tels que

$$\exp(yY) = p_{-\alpha}(ay) \quad \text{et} \quad \exp(xX) = p_{\alpha}(bx).$$

Comme  $\exp : W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \rightarrow G$  induit un monomorphisme sur les algèbres de Lie, on a  $a \neq 0$ ; de même  $b \neq 0$  et on est ramené à 1.1.

L'unicité du morphisme  $\exp$  peut se démontrer localement sur  $S$ ; on se ramène alors au cas où  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  sont libres, et on n'a plus qu'à appliquer 1.2 (avec  $Q = T$  et  $q = 1$ ).

Reste donc à prouver l'existence du morphisme  $\exp$  demandé. Remarquons d'abord qu'en vertu de la théorie de la descente fidèlement plate et de l'assertion d'unicité précédente, il suffit de démontrer cette existence *localement* sur  $S$  pour la topologie (fpqc). Par les raisonnements habituels utilisant la présentation finie, on se ramène au cas où  $S$  est noethérien, puis au cas où il est noethérien local. En vertu de la remarque précédente, on peut donc se contenter de prouver l'existence du morphisme  $\exp$  cherché lorsque  $S = \text{Spec}(A)$ ,  $A$  local noethérien complet à corps résiduel  $k$  algébriquement clos. Soit alors  $p_0 : \mathbb{G}_{a,k} \rightarrow G_k$  un monomorphisme de  $k$ -groupes normalisé par  $T_k$  avec le multiplicateur  $\alpha_0 = \alpha \otimes_A k$  (il en existe par 1.1). On sait (1.1 et 1.2) que le morphisme  $T_k \cdot_{\alpha_0} \mathbb{G}_{a,k} \rightarrow G_k$  correspondant est une immersion, donc en particulier un monomorphisme. Admettons provisoirement les deux lemmes suivants :

40 **Lemme 1.6.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe de présentation finie,  $T$  un  $S$ -tore,  $\alpha$  un caractère non trivial sur chaque fibre de  $T$ ,  $s_0$  un point de  $S$ . Soit

$$f : T \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow G$$

un morphisme de  $S$ -groupes tel que  $f_{s_0}$  soit un monomorphisme et que la restriction de  $f$  à  $T$  soit un monomorphisme. Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $s_0$  tel  $f|_U$  soit un monomorphisme.

**Lemme 1.7.** — Soient  $A$  un anneau local complet noethérien à corps résiduel  $k$  algébriquement clos,  $(G, T, \alpha)$  un  $A$ -système élémentaire,  $p_0 : \mathbb{G}_{a,k} \rightarrow G_k$  un morphisme de  $k$ -groupes normalisé par  $T_k$  avec le multiplicateur  $\alpha \otimes_A k$ . Il existe un morphisme de groupes  $p : \mathbb{G}_{a,A} \rightarrow G$  normalisé par  $T$  avec le multiplicateur  $\alpha$ .

Soit  $p$  le morphisme dont l'existence est affirmée par 1.7. Soit  $f : T \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$  le morphisme correspondant. Il vérifie les hypothèses de 1.6, donc est un monomorphisme; en particulier  $p$  est un monomorphisme. On conclut alors par Exp. XIX 4.9.

*Démonstration de 1.6.* Désignons par  $\varepsilon : S \rightarrow T \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,S}$  la section unité. Comme  $f$  est non ramifié en  $\varepsilon(s_0)$ , il l'est en  $\varepsilon(s)$  pour tous les  $s$  d'un voisinage ouvert  $U$  de  $s_0$ ;  $f|_U$  est donc non ramifié (Exp. X 3.5)<sup>(3)</sup>, donc son noyau  $\text{Ker}(f)|_U$  non ramifié sur  $U$ . Pour prouver que  $f|_U$  est un monomorphisme, il suffit donc<sup>(4)</sup> de prouver que  $\text{Ker}(f)|_U$  est radiciel sur  $U$ , ce qui est une question ensembliste. On est donc ramené à prouver :

<sup>(3)</sup>N.D.E. : voir aussi VI<sub>B</sub>, 2.5

<sup>(4)</sup>N.D.E. : selon EGA IV<sub>4</sub>, 17.9.1.

**Lemme 1.8.** — Soit  $k$  un corps algébriquement clos ; soit  $N$  un sous-groupe invariant de  $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k}$  ( $\alpha$  caractère non trivial du tore  $T$ ), étale sur  $k$  et tel que  $N \cap T = \{e\}$ . Alors  $N = \{e\}$ . 41

On a  $\text{int}(t')(t, x) = (t, \alpha(t')x)$ . Si  $(t, x)$  est un point de  $N$ , avec  $x \neq 0$ , alors  $(t, zx)$  est aussi un point de  $N$  pour  $z \in k^*$  et  $(t, x)$  n'est pas isolé, donc  $N$  n'est pas quasi-fini. On a donc ensemblistement  $N \subset T$  et on a terminé.

*Démonstration de 1.7.* Soient  $\mathfrak{m}$  le radical de  $A$  et  $S_n = \text{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$ ,  $n \geq 0$ . Montrons d'abord, par récurrence sur  $n$ , que  $p_0$  peut se prolonger pour chaque  $n$  en un morphisme de  $S_n$ -groupes

$$p_n : \mathbb{G}_{a, S_n} \longrightarrow \mathbb{G}_{S_n}$$

normalisé par  $T_{S_n}$  avec le multiplicateur  $\alpha_{S_n}$ , les  $p_n$  vérifiant de plus la condition  $p_{n+1} \times_{S_{n+1}} S_n = p_n$ .

Soit  $H = T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a, S}$ . Le morphisme  $H_{S_n} \rightarrow \mathbb{G}_{S_n}$  défini par  $p_n$  est noté  $f_n$ . Admettons le lemme suivant :

**Lemme 1.9.** — Si  $(G, T, \alpha)$  est un  $k$ -système élémentaire,  $k$  algébriquement clos, et si  $p : \mathbb{G}_{a, k} \rightarrow G$  est un monomorphisme normalisé par  $T$  avec le multiplicateur  $\alpha$ , on a

$$H^2(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a, k}, \mathfrak{g}) = 0.$$

(On fait opérer  $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a, k}$  sur  $\mathfrak{g}$  par l'intermédiaire du morphisme  $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a, k} \rightarrow G$  défini par  $p$ , et de la représentation adjointe de  $G$ ).

Alors, en vertu de Exp. III 2.8,  $f_n$  se prolongera en un morphisme de  $S_{n+1}$ -groupes

$$f'_{n+1} : H_{S_{n+1}} \longrightarrow \mathbb{G}_{S_{n+1}}.$$

Or  $f'_{n+1}$  et l'immersion canonique de  $T_{S_{n+1}}$  dans  $\mathbb{G}_{S_{n+1}}$  ont même restriction à  $T_{S_n}$ . 42  
Par Exp. III 2.5, il existe un élément  $g \in G(S_{n+1})$  tel que  $g \times_{S_{n+1}} S_n = e$  et tel que  $f_{n+1} = \text{int}(g) \circ f'_{n+1}$  se restreigne à  $T_{n+1}$  suivant l'immersion canonique de  $T_{n+1}$ . Soit  $p_{n+1}$  la restriction de  $f_{n+1}$  à  $\mathbb{G}_{a, S_{n+1}}$ . C'est un morphisme normalisé par  $T_{S_{n+1}}$  avec le multiplicateur  $\alpha_{S_{n+1}}$ , qui prolonge  $p_n$ .

On a donc construit un système cohérent  $(f_n)$  et il nous faut maintenant l'algébriser. Or on a :

**Lemme 1.10.** — Soient  $A$  un anneau local noethérien complet,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $S = \text{Spec}(A)$ ,  $S_n = \text{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$ ,  $T$  un  $S$ -tore,  $\alpha$  un caractère non nul de  $T$ ,  $X$  un  $S$ -schéma affine sur lequel  $T$  opère. Faisons opérer  $T$  sur  $\mathbb{G}_{a, S}$  par l'intermédiaire de  $\alpha$ . Soit  $q$  un entier  $\geq 0$ , et soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  un système cohérent de morphismes

$$f_n : \mathbb{G}_{a, S_n}^q \longrightarrow X_{S_n}$$

d'objets à opérateurs  $T_{S_n}$ . Il existe un unique morphisme d'objets à opérateurs  $T$

$$f : \mathbb{G}_{a, S}^q \longrightarrow X$$

qui induise les  $f_n$  (comparer à Exp. IX 7.1).

**Corollaire 1.11.** — Si  $X$  est un groupe à groupe d'opérateurs  $T$  et si les  $f_n$  sont des morphismes de groupes,  $f$  en est aussi un.

Il suffit d'appliquer l'assertion d'unicité du lemme aux deux morphismes  $\mathbb{G}_{a,S}^{2q} \rightarrow X$  déduits de  $f$  à la manière habituelle.

43 *Démonstration de 1.10.* Supposons  $T$  déployé, ce qui d'ailleurs est le cas dans l'application de 1.10 à la démonstration de 1.5. On sait (Exp. I 4.7.3.1), que  $X \mapsto \mathcal{A}(X)$  réalise une équivalence de la catégorie des  $S$ -schémas affines munis d'une opération de  $T$  et de la catégorie opposée à celle des  $S$ -algèbres graduées de type  $M = \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(T, \mathbb{G}_{m,S})$ .

On a donc des graduations

$$B = \mathcal{A}(X) = \coprod_{m \in M} B_m \quad \text{et} \quad C = \mathcal{A}(\mathbb{G}_{a,S}^q) = \coprod_{m \in M} C_m.$$

On voit aussitôt que chaque  $C_m$  est libre de type fini sur  $A$ . (En effet, on a  $C_m = 0$  si  $m$  n'est pas multiple de  $\alpha$ , et si  $m = d\alpha$ ,  $C_m$  est isomorphe au  $A$ -module des polynômes homogènes de degré  $d$ , à  $q$  variables). Posons

$$\begin{aligned} \widehat{B}_m &= \varprojlim_n B_m \otimes_A (A/\mathfrak{m}^{n+1}), \\ \widehat{C}_m &= \varprojlim_n C_m \otimes_A (A/\mathfrak{m}^{n+1}), \\ \widehat{B} &= \coprod_{m \in M} \widehat{B}_m, \quad \widehat{C} = \coprod_{m \in M} \widehat{C}_m. \end{aligned}$$

On a alors des morphismes canoniques d'algèbres graduées de type  $M$

$$g_B : B \longrightarrow \widehat{B} \quad \text{et} \quad g_C : C \longrightarrow \widehat{C}.$$

Il résulte de la remarque faite plus haut que  $g_C$  est un *isomorphisme*. Se donner un système cohérent  $(f_n)$  comme dans l'énoncé est équivalent à se donner un morphisme de  $A$ -algèbres graduées

$$\widehat{F} : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{C}.$$

Trouver un morphisme  $f$  comme dans l'énoncé est équivalent à trouver un morphisme de  $A$ -algèbres graduées  $F : B \rightarrow C$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & C \\ g_B \downarrow & & \downarrow g_C \\ \widehat{B} & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{C}. \end{array}$$

Comme  $g_C$  est un isomorphisme, l'existence et l'unicité de  $F$  sont immédiates. Ceci prouve 1.10.

44 Pour achever la démonstration de 1.5, il ne reste donc qu'à prouver 1.9.

**1.12.** — *Preuve de 1.9.* On a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ . Comme expliqué en 1.9, considérons  $\mathfrak{g}$  comme un  $(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k})$ -module. Il est clair que  $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha$  est un sous-module de  $\mathfrak{g}$ , le quotient étant isomorphe à  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  comme  $k$ -espace vectoriel et même comme  $T$ -module. Il est clair que  $\mathbb{G}_{a,k}$  opère trivialement sur ce quotient qui est de dimension 1 (car

tout morphisme de groupes de  $\mathbb{G}_{a,k}$  dans  $\mathbb{G}_{m,k}$  est trivial). De même  $\mathfrak{g}^\alpha$  est un sous-module de  $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha$ , le quotient étant isomorphe à  $\mathfrak{t}$  comme  $T$ -module,  $\mathbb{G}_{a,k}$  y opérant trivialement. En résumé :

**Lemme 1.13.** — *Sous les conditions de 1.9,  $\mathfrak{g}$  admet une suite de composition comme  $(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k})$ -module dont les quotients successifs sont*

$$\mathfrak{g}^{-\alpha}, \quad \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}^\alpha,$$

considérés comme  $(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k})$ -modules grâce à la projection  $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k} \rightarrow T$ .

On est donc ramené à calculer la cohomologie de  $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k}$  opérant par l'intermédiaire de la projection  $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k} \rightarrow T$  et du caractère  $\beta$  de  $T$  (ici  $\beta = 0, \alpha$  ou  $-\alpha$ ) sur  $W(k)$ .<sup>(5)</sup> Notons  $k[x_1, \dots, x_n]$  l'algèbre des polynômes sur  $k$  en  $n$  variables et  $k_q[x_1, \dots, x_n]$  le sous-espace des polynômes homogènes de degré  $q$ .

**Lemme 1.14.** — *Avec les notations précédentes, on a  $H^n(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k}, k) = H^n(C_{\alpha, \beta}^*)$ , où le complexe  $C_{\alpha, \beta}^*$  est défini par*

45

$$C_{\alpha, \beta}^n = \begin{cases} k_q[x_1, \dots, x_n] & \text{si } \beta = q\alpha, \text{ avec } q \in \mathbb{N}^*; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \delta f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= f(x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

En effet, le foncteur  $M \mapsto H^0(T, M)$  est exact sur la catégorie des  $T$ -modules (et les  $H^q(T, -)$  nuls), par Exp. I 5.3.2. Il en résulte, comme dans le cas habituel de la cohomologie des groupes, que  $H^n(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,k}, k)$  peut se calculer comme le  $n$ -ième groupe de cohomologie du complexe des cochaines de  $\mathbb{G}_{a,k}$  dans  $k$ , invariantes par  $T$ , c'est-à-dire vérifiant

$$f(\alpha(t)x_1, \dots, \alpha(t)x_n) = \beta(t)f(x_1, \dots, x_n).$$

Cela donne bien le complexe annoncé.

Pour démontrer 1.9, il suffit donc de prouver que  $H^2(C_{\alpha, \beta}^*) = 0$ , pour  $\beta = 0, \alpha, -\alpha$ , ce qui se fait immédiatement.

**Remarque 1.15.** — On peut calculer explicitement les groupes  $H^n(C_{\alpha, \beta}^*)$  pour  $\beta = q\alpha$  (voir M. Lazard, Lois de groupes et analyseurs, Annales E.N.S., 1955). En particulier, on trouve  $H^n(C_{\alpha, q\alpha}^*) = 0$  pour  $n > q$ .

**Notations 1.16.** — L'image de l'immersion canonique

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \times_S T \times_S W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

<sup>(5)</sup>N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

sera notée  $\Omega$ . C'est un ouvert de  $G$  contenant la section unité. L'image de

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}), \quad \text{resp. } W(\mathfrak{g}^\alpha), \quad \text{resp. } W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \times_S T, \quad \text{resp. } T \times_S W(\mathfrak{g}^\alpha)$$

sera notée <sup>(6)</sup>

$$U_{-\alpha}, \quad \text{resp. } U_\alpha, \quad \text{resp. } U_{-\alpha} \cdot T, \quad \text{resp. } T \cdot U_\alpha.$$

Alors  $U_\alpha$  (resp.  $U_{-\alpha}$ ) est un sous-groupe de  $G$  canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel et on a

$$\text{int}(t)(x) = x^{\alpha(t)} \quad (\text{resp. } x^{-\alpha(t)}),$$

pour tous  $S' \rightarrow S$ ,  $t \in T(S')$ ,  $x \in U_\alpha(S')$  (resp.  $x \in U_{-\alpha}(S')$ ).

46 On a des isomorphismes canoniques

$$T \cdot U_\alpha \simeq T \cdot_\alpha U_\alpha \quad \text{et} \quad T \cdot U_{-\alpha} \simeq T \cdot_{-\alpha} U_{-\alpha}.$$

L'ouvert  $\Omega$  est stable sous  $\text{int}(T)$  : on a

$$\text{int}(t')(y \cdot t \cdot x) = y^{-\alpha(t')} \cdot t \cdot x^{\alpha(t')}.$$

**Corollaire 1.17.** — On a  $\mathcal{L}ie(U_\alpha/S) = \mathfrak{g}^\alpha$  et  $\mathcal{L}ie(U_{-\alpha}/S) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$ . Les isomorphismes

$$W(\mathfrak{g}^\alpha) \xrightarrow[\sim]{\text{exp}} U_\alpha \quad \text{et} \quad W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \xrightarrow[\sim]{\text{exp}} U_{-\alpha}$$

sont ceux de Exp. XIX 4.2.

**Corollaire 1.18.** — L'ouvert  $\Omega$  est relativement schématiquement dense dans  $G$  (cf. XVIII, §1).

Clair par Exp. XVIII, 1.3. <sup>(7)</sup>

**Corollaire 1.19.** — Le centre de  $G$  est  $\text{Centr}(G) = \text{Ker}(\alpha)$ . C'est donc un sous-groupe fermé de  $G$ , de type multiplicatif et de type fini.

La seconde assertion résulte de la première par Exp. IX 2.7. Prouvons donc celle-ci. L'automorphisme intérieur défini par une section de  $\text{Ker}(\alpha)$  opère trivialement sur  $\Omega$  (dernière formule de 1.16), donc sur  $G$  par 1.18. Réciproquement, si  $g \in G(S)$  centralise  $G$ , alors il centralise  $T$  et  $U_\alpha$ , donc est une section de  $T$  (Exp. XIX 2.8), qui annule  $\alpha$ ; comme ceci se fait aussi après tout changement de base, on a bien  $\text{Centr}(G) = \text{Ker}(\alpha)$ .

**Corollaire 1.20.** — Pour qu'il existe un monomorphisme  $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$  normalisé par  $T$  avec le multiplicateur  $\alpha$ , il faut et il suffit que le  $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathfrak{g}^\alpha$  soit libre. Plus précisément, on a une bijection donnée par

$$X_\alpha \mapsto (x \mapsto \exp(xX_\alpha)) \quad \text{et} \quad p_\alpha \mapsto \mathcal{L}ie(p_\alpha)$$

<sup>(6)</sup>N.D.E. : On a remplacé  $P_{-\alpha}$  et  $P_\alpha$  par  $U_{-\alpha}$  et  $U_\alpha$ .

<sup>(7)</sup>N.D.E. : voir aussi EGA IV<sub>3</sub>, 11.10.10.

entre  $\Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$  et l'ensemble des monomorphismes  $p_\alpha$  comme ci-dessus (qui est aussi l'ensemble des isomorphismes de schémas en groupes vectoriels  $\mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ ).<sup>(8)</sup>

**Corollaire 1.21.** — Les sous-groupes  $U_\alpha$  et  $U_{-\alpha}$  de  $G$  ne commutent sur aucune fibre. 47

En effet, si  $(U_\alpha)_s$  et  $(U_{-\alpha})_s$  commutent,  $\Omega_s$  est un sous-groupe de  $G_s$ , donc  $\Omega_s = G_s$ <sup>(9)</sup> et  $G_s$  est résoluble, ce qui contredit l'hypothèse que  $G_s$  est réductif de rang semi-simple 1.

## 2. Structure des systèmes élémentaires

**Théorème 2.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire. Il existe un morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$\mathfrak{g}^\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{g}^{-\alpha} \longrightarrow \mathcal{O}_S, \quad (X, Y) \longmapsto \langle X, Y \rangle,$$

et un morphisme de  $S$ -groupes

$$\alpha^* : \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow T$$

tels que pour tout  $S' \rightarrow S$ , et tous  $X \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^\alpha \otimes \mathcal{O}_{S'})$ ,  $Y \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^{-\alpha} \otimes \mathcal{O}_{S'})$  on ait l'équivalence :

$$\exp(X) \cdot \exp(Y) \in \Omega(S') \iff 1 + \langle X, Y \rangle \in \mathbb{G}_m(S'),$$

et sous ces conditions on a la formule :

$$(F) \quad \exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp\left(\frac{Y}{1 + \langle X, Y \rangle}\right) \alpha^*(1 + \langle X, Y \rangle) \exp\left(\frac{X}{1 + \langle X, Y \rangle}\right).$$

De plus les morphismes  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$  et  $\alpha^*$  sont uniquement déterminés, le premier est un isomorphisme, donc met les modules  $\mathfrak{g}^\alpha$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  en dualité, et on a  $\alpha \circ \alpha^* = 2$  (élévation au carré dans  $\mathbb{G}_{m,S}$ ).

Vu les assertions d'unicité du théorème, il suffit de faire la démonstration localement 48 sur  $S$ . On peut donc supposer  $\mathfrak{g}^\alpha$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  libres sur  $S$ . Prenons alors  $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ ,  $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$  et posons  $p_\alpha(x) = \exp(xX)$ ,  $p_{-\alpha}(y) = \exp(yY)$ , pour  $x, y \in \mathbb{G}_a(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . Par 1.5 et 1.21, il suffit de prouver :

**Proposition 2.2.** — Soient  $S$  un schéma,  $G$  un  $S$ -groupe,  $T$  un tore de  $G$ ,  $\alpha$  un caractère de  $T$  non trivial sur chaque fibre,  $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$  (resp.  $p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$ ) un monomorphisme de groupes normalisé par  $T$  avec le multiplicateur  $\alpha$  (resp.  $-\alpha$ ). On suppose que :

(i) Le morphisme  $\mathbb{G}_{a,S} \times_S T \times_S \mathbb{G}_{a,S} \rightarrow G$  défini par  $(y, t, x) \mapsto p_{-\alpha}(y) t p_\alpha(x)$  est une immersion ouverte. On note  $\Omega$  son image.

(ii) Pour tout  $s \in S$ ,  $(p_\alpha)_s(\mathbb{G}_{a, \kappa(s)})$  et  $(p_{-\alpha})_s(\mathbb{G}_{a, \kappa(s)})$  ne commutent pas.

<sup>(8)</sup>N.D.E. : En effet, d'une part,  $\mathcal{L}ie(\mathbb{G}_{a,S}) = \mathcal{O}_S$  et  $\mathcal{L}ie(p_\alpha)$  est un élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathfrak{g}^\alpha) = \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)$ .

<sup>(9)</sup>N.D.E. : d'après 1.18

Alors, il existe  $a \in \mathbb{G}_a(S)$  et  $\alpha^* \in \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(\mathbb{G}_{m,S}, T)$ , *uniquement déterminés, ayant les propriétés suivantes* : pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $x, y \in \mathbb{G}_a(S')$ , on a

$$p_\alpha(x)p_{-\alpha}(y) \in \Omega(S') \iff 1 + axy \in \mathbb{G}_m(S'),$$

et, sous cette condition, on a la formule

$$p_\alpha(x)p_{-\alpha}(y) = p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+axy}\right) \alpha^*(1+axy) p_\alpha\left(\frac{x}{1+axy}\right).$$

De plus,  $a$  est inversible (i.e.  $a \in \mathbb{G}_m(S)$ ) et  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ .

*Démonstration* :

**A)** Considérons le morphisme

$$\mathbb{G}_{a,S}^2 \longrightarrow G$$

49 défini par  $(x, y) \mapsto p_\alpha(x)p_{-\alpha}(y)$ . Soit  $U$  l'image inverse de  $\Omega$  par ce morphisme. C'est un ouvert de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$ , contenant  $0 \times_S \mathbb{G}_{a,S}$  et  $\mathbb{G}_{a,S} \times_S 0$ . Il existe donc des morphismes de  $S$ -schémas, *uniquement déterminés*,

$$\begin{aligned} A : U &\longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}, & C : U &\longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}, \\ B : U &\longrightarrow T \end{aligned}$$

vérifiant la relation ensembliste :

$$p_\alpha(u)p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}(A(u, v)) B(u, v) p_\alpha(C(u, v)).$$

On a immédiatement les relations

$$\begin{aligned} A(0, v) = v, \quad A(u, 0) = 0, \quad C(u, 0) = u, \quad C(0, v) = 0, \\ B(u, 0) = B(0, v) = e. \end{aligned}$$

Soit  $S'$  un  $S$ -schéma séparé et soit  $t \in T(S')$  un point de  $T$ . Comme  $\Omega_{S'}$  est stable par  $\text{int}(t)$ , alors, d'après la dernière formule de 1.16,  $U_{S'}$  est stable sous l'automorphisme  $(x, y) \mapsto (\alpha(t)x, \alpha(t)^{-1}y)$  de  $\mathbb{G}_{a,S'}^2$ , et on a les relations :

$$\begin{aligned} A(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v) = \alpha(t)^{-1}A(u, v), & \quad C(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v) = \alpha(t)C(u, v), \\ B(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v) = B(u, v). \end{aligned}$$

Comme  $\alpha$  est fidèlement plat, on en déduit que pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $z \in \mathbb{G}_m(S')$ ,  $U_{S'}$  est stable par la transformation  $(x, y) \mapsto (zx, z^{-1}y)$  et que l'on a

$$\begin{aligned} A(zu, z^{-1}v) = z^{-1}A(u, v), & \quad C(zu, z^{-1}v) = zC(u, v), \\ B(zu, z^{-1}v) = B(u, v). \end{aligned}$$

Supposons d'abord que  $v$  soit inversible ; faisant  $z = v$ , on en déduit que si  $(u, v)$  est une section de  $U$ , alors  $(uv, 1)$  en est aussi une et que l'on a

$$A(uv, 1) = v^{-1}A(u, v), \quad B(uv, 1) = B(u, v).$$

Soit alors  $V$  l'ouvert de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  défini par <sup>(10)</sup>

$$(u, v) \in V(S') \iff (u, v), (uv, 1) \text{ et } (1, uv) \text{ appartiennent à } U(S').$$

<sup>(10)</sup>N.D.E. : On a rajouté la condition : «  $(1, uv) \in U(S')$  ».

Comme  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  contenant  $0 \times_S \mathbb{G}_{a,S}$  et  $\mathbb{G}_{a,S} \times_S 0$ , alors  $V$  est un voisinage de la section nulle de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  et on vient de voir que les morphismes

$$(u, v) \mapsto A(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto vA(uv, 1) \\ \text{resp.} \quad (u, v) \mapsto B(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto B(uv, 1)$$

coïncident dans  $V \cap (\mathbb{G}_{a,S} \times_S \mathbb{G}_{m,S})$ . Comme  $\mathbb{G}_{a,S} \times_S \mathbb{G}_{m,S}$  est schématiquement dense dans  $\mathbb{G}_{a,S}^2$ , ces morphismes coïncident donc dans  $V$ .

On sait que  $A(0, 1) = 1$ , il en résulte qu'il existe un ouvert  $W_1$  de  $\mathbb{G}_{a,S}$  contenant la section nulle, tel que pour toute section  $x$  de  $W_1$ ,  $A(x, 1)$  soit inversible; posant  $A(x, 1)^{-1} = F(x)$ , on obtient que si  $(u, v) \in V(S')$  <sup>(11)</sup> et  $uv \in W_1(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , alors  $A(u, v) = vA(uv, 1) = vF(uv)^{-1}$ . Raisonnant de même pour  $C$ , on obtient qu'il existe un ouvert  $W_2$  de  $\mathbb{G}_{a,S}$  contenant la section nulle, et un élément  $E$  <sup>(12)</sup> de  $\mathcal{O}(W_2)^\times$ , tels que  $C(u, v) = uC(1, uv) = uE(uv)^{-1}$ , si  $(u, v) \in V(S')$  et  $uv \in W_2(S')$ . Par conséquent, posant  $W = W_1 \cap W_2$ , on obtient :

Il existe un ouvert  $W$  de  $\mathbb{G}_{a,S}$  contenant la section nulle, et des  $S$ -morphisms

$$F : W \rightarrow \mathbb{G}_{m,S} \quad , \quad F(0) = 1, \\ H : W \rightarrow T \quad , \quad H(0) = e, \\ E : W \rightarrow \mathbb{G}_{m,S} \quad , \quad E(0) = 1,$$

tels que si  $(u, v) \in V(S')$  et  $uv \in W(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , on ait

$$(+) \quad p_\alpha(u) p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}(vF(uv)^{-1}) H(uv) p_\alpha(uE(uv)^{-1}).$$

**B)** Utilisons maintenant l'associativité de  $G$  pour écrire

$$p_\alpha(u) p_{-\alpha}(v) p_{-\alpha}(w) = p_\alpha(u) p_{-\alpha}(v + w).$$

Il existe un ouvert  $L$  de  $\mathbb{G}_{a,S}^3$ , contenant la section unité tel que  $(u, v, w) \in L(S')$  soit équivalent à

$$(u, v) \in V(S'), \quad (uE(uv)^{-1}, w) \in V(S'), \quad (u, v + w) \in V(S'), \\ uv \in W(S'), \quad uwE(uv)^{-1} \in W(S'), \quad u(v + w) \in W(S').$$

Utilisant alors la formule (+), on écrit aussitôt pour  $(u, v, w) \in L(S')$  les relations :

$$(1) \quad E(uv + uw) = E(uwE(uv)^{-1})E(uv), \\ (2) \quad H(uv + uw) = H(uwE(uv)^{-1})H(uv), \\ (3) \quad (v + w)F(uv + uw)^{-1} = \alpha(H(uv)^{-1}) w F(uwE(uv)^{-1})^{-1} + vF(uv)^{-1}.$$

Il est immédiat sur la définition de  $L$  que  $(1, 0, 0) \in L(S)$ . Considérons donc

$$L \cap \left( 1 \times_S \mathbb{G}_{a,S} \times_S \mathbb{G}_{a,S} \right) = 1 \times_S M;$$

$M$  est un ouvert de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$ , contenant la section  $(0, 0)$ , et pour  $(v, w) \in M(S')$ , on a  $v, wE(v)^{-1}, v + w \in W(S')$  et

<sup>(11)</sup>N.D.E. : ici et dans la suite, on a remplacé  $U(S')$  par  $V(S')$ .

<sup>(12)</sup>N.D.E. : On a noté  $E$  l'élément noté  $G$  dans l'original, puisque  $G$  désigne déjà le  $S$ -groupe considéré.

$$\begin{aligned}
(1') \quad & E(v+w) = E(wE(v)^{-1})E(v), \\
(2') \quad & H(v+w) = H(wE(v)^{-1})H(v), \\
(3') \quad & (v+w)F(v+w)^{-1} = \alpha(H(v))^{-1}wF(wE(v)^{-1})^{-1} + vF(v)^{-1}.
\end{aligned}$$

Considérons enfin le morphisme de  $M$  dans  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  défini ensemblistement par  $(v, w) \mapsto (v, wE(v)^{-1})$ .<sup>(13)</sup> Il conserve la section  $(0, 0)$  et induit un isomorphisme de  $M$  sur un ouvert  $N$  de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  contenant la section nulle (l'isomorphisme inverse étant donné par  $(x, y) \mapsto (x, yE(x))$ )<sup>(14)</sup>. On a donc prouvé l'assertion suivante :

Il existe un ouvert  $N$  de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$ , contenant la section nulle, tel que si  $(x, y) \in N(S')$ , alors  $x, y$  et  $x + yE(x)$ <sup>(15)</sup> appartiennent à  $W(S')$  et :

$$\begin{aligned}
(1'') \quad & E(x + yE(x)) = E(x)E(y), \\
(2'') \quad & H(x + yE(x)) = H(x)H(y), \\
(3'') \quad & (x + yE(x))F(x + yE(x))^{-1} = xF(x)^{-1} + \alpha(H(x))^{-1}yE(x)F(y)^{-1}.
\end{aligned}$$

**C)** En raisonnant de même avec l'associativité à gauche, on démontre l'assertion suivante :<sup>(16)</sup>

Il existe un ouvert  $N'$  de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$ , contenant la section nulle, tel que si  $(x, y) \in N'(S')$ , alors  $x, y$  et  $x + yF(x)$ <sup>(17)</sup> appartiennent à  $W(S')$ , et

52

$$\begin{aligned}
(4'') \quad & F(x + yF(x)) = F(x)F(y), \\
(5'') \quad & H(x + yF(x)) = H(x)H(y), \\
(6'') \quad & (x + yF(x))E(x + yF(x))^{-1} = xE(x)^{-1} + \alpha(H(x))^{-1}yF(x)E(y)^{-1}.
\end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre « l'équation fonctionnelle » (1'').

**Lemme 2.3.** — Soient  $S$  un schéma,  $W$  un ouvert de  $\mathbb{G}_{a,S}$  contenant la section unité,  $F : W \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$  un  $S$ -morphisme. On suppose que  $F(0) = 1$  et qu'il existe un ouvert  $N$  de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  contenant la section nulle tel que pour  $(x, y) \in N(S')$ ,  $x, y$  et  $x + yF(x)$ <sup>(17)</sup> appartiennent à  $W(S')$  et que l'on ait :

$$(\dagger) \quad F(x + yF(x)) = F(x)F(y).$$

- (i) Si  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ , il existe  $a \in k$  tel que  $F(x) = 1 + ax$ .
- (ii) Si  $a = F'(0) \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  est inversible, alors  $F(x) = 1 + ax$ .

En vertu des hypothèses, nous pouvons dériver l'équation donnée pour  $x = 0$  (resp. pour  $y = 0$ ) et nous trouvons que

$$(*) \quad F'(y)(1 + yF'(0)) = F'(0)F(y) \quad \text{pour } (0, y) \in N(S'),$$

resp.

$$F'(x)F(x) = F(x)F'(0) \quad \text{pour } (x, 0) \in N(S').$$

<sup>(13)</sup>N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

<sup>(14)</sup>N.D.E. : c.-à-d., on a fait le « changement de variables »  $x = v, y = wE(v)^{-1}$ , soit  $v = x, w = yE(x)$ .

<sup>(15)</sup>N.D.E. : On a corrigé  $yE(x)$  en  $x + yE(x)$ .

<sup>(16)</sup>N.D.E. : c.-à-d., on écrit les égalités résultant de  $p_\alpha(t)p_\alpha(u)p_{-\alpha}(v) = p_\alpha(t+u)p_{-\alpha}(v)$  et l'on fait  $v = 1$  et  $x = u, t = yF(u)$  (i.e.  $y = tF(u)^{-1}$ ).

<sup>(17)</sup>N.D.E. : On a corrigé  $yF(x)$  en  $x + yF(x)$ .

Comme  $F$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{G}_m$ , la seconde relation nous donne

$$(*)' \quad F'(x) = F'(0) \quad \text{pour } (x, 0) \in N(S');$$

d'où, par la première

$$F'(0)(1 + yF'(0)) = F'(0)F(y) \quad \text{pour } (y, 0), (0, y) \in N(S').$$

Si  $a = F'(0)$  est inversible, cela nous donne

53

$$F(y) = 1 + ay,$$

pour  $y$  section d'un ouvert de  $W$  contenant la section unité, donc schématiquement dense dans  $W$ , ce qui prouve (ii). Cela prouve aussi (i) lorsque  $F'(0) \neq 0$ .

Si  $F'(0) = 0$ , alors, d'après  $(*)'$ ,  $F'(x) = 0$  lorsque  $x$  est « voisin de 0 », donc  $F' = 0$  par densité schématique. Si  $k$  est de caractéristique 0,  $F$  est une fraction rationnelle à dérivée nulle, donc constante et égale à  $F(0) = 1$ .

Si  $k$  est de caractéristique  $p$ , et si  $F$  n'est pas constante, <sup>(18)</sup> il existe un entier  $n > 0$  et une fraction rationnelle  $F_1 \in k(X)$  tels que  $F_1'(X) \neq 0$  et

$$F(X) = F_1(X^{p^n}) = F_1(X)^{p^n}.$$

Reportant dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$(\dagger_1) \quad F_1(x + yF_1(x)^{p^n}) = F_1(x)F_1(y).$$

Dérivant pour  $x = 0$ , on trouve

$$(*_1) \quad F_1'(y) = F_1'(0)F_1(y),$$

et dérivant  $(\dagger_1)$  pour  $y = 0$ , on obtient

$$(*'_1) \quad F_1'(x)F_1(x)^{p^n} = F_1(x)F_1'(0).$$

Comme, par hypothèse,  $F_1'(X)$  est un élément inversible de  $k(X)$ , on déduit de ces deux égalités que

$$F_1(X)^{p^n} = 1,$$

donc  $F_1$  est une constante, contredisant l'hypothèse de départ. Ceci montre que  $F$  est constante, et égale à  $1 = F(0)$ .

**D)** *Supposons que  $S$  soit le spectre d'un corps.* Si  $F'(0) = 0$ , alors  $F = 1$ . La formule  $(5'')$  nous donne alors  $H(x + y) = H(x)H(y)$ , ce qui montre que  $H$  se prolonge en un morphisme de groupes  $\mathbb{G}_{a,S} \rightarrow T$  (Exp. XVIII 2.3), qui est nécessairement constant de valeur  $e$ . D'autre part, d'après le lemme 2.3, on aura aussi  $E(x) = 1 + bx$ , pour un certain  $b \in k$ . Mais alors  $(6'')$  donne, pour  $(x, y) \in N(S')$ ,

$$(x + y)E(x + y)^{-1} = xE(x)^{-1} + yE(y)^{-1},$$

donc, <sup>(19)</sup> d'après Exp. XVIII 2.3 à nouveau,  $x \mapsto xE(x)^{-1}$  se prolonge en un morphisme de  $k$ -groupes  $\mathbb{G}_{a,k} \rightarrow \mathbb{G}_{a,k}$ , donc  $x/(1 + bx) = cx$  pour un certain  $c \in k$ , d'où  $b = 0$  (et  $c = 1$ ).

<sup>(18)</sup>N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

<sup>(19)</sup>N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit. On peut aussi voir par un calcul direct que l'égalité précédente entraîne  $0 = xyb(2 + (x + y)b)$ , d'où  $0 = b(2 + (x + y)b)$ , et finalement  $b = 0$ .

Ceci montre que  $F, H, E$  sont constants de valeur  $(1, e, 1)$ , dans un voisinage de la section unité, donc partout, ce qui par  $(+)$  montre que  $U_\alpha$  et  $U_{-\alpha}$  commutent, contrairement à l'hypothèse (ii).

54 *Si  $S$  est maintenant quelconque*, on a donc prouvé que  $F'(0)$  n'est nul sur aucune fibre, donc est inversible. Il en est évidemment de même pour  $E'(0)$ , ce qui par le lemme 2.3, montre qu'il existe  $a, b \in \mathbb{G}_m(S)$  tels que

$$(\diamond_1) \quad F(x) = 1 + ax, \quad E(x) = 1 + bx, \quad \text{pour } x \in W(S').$$

**E)** Le reste est maintenant facile. Reportant les résultats précédents dans  $(3'')$ , on trouve

$$y \alpha(H(x)) (1 + ay) = y \left( 1 + ax + ay(1 + bx) \right) (1 + ax).$$

Cette formule est valable pour toute section  $(x, y)$  de  $N$ . Mais comme  $\mathbb{G}_{a,S} \times_S \mathbb{G}_{m,S}$  est schématiquement dense dans  $\mathbb{G}_{a,S}^2$ , on en déduit

$$(1 + ay) \alpha(H(x)) = \left( 1 + ax + ay(1 + bx) \right) (1 + ax).$$

Faisant  $y = 0$ , cela donne  $\alpha(H(x)) = (1 + ax)^2$ . Reportant ceci dans l'égalité précédente, on trouve <sup>(20)</sup>

$$a^2 xy = abxy.$$

Comme  $\mathbb{G}_{m,S}$  est schématiquement dense dans  $\mathbb{G}_{a,S}$ , on en déduit  $a^2 = ab$ , d'où, comme  $a$  est inversible,

$$(\diamond_2) \quad a = b \quad \text{et} \quad \alpha(H(x)) = (1 + ax)^2.$$

Comme  $a$  est inversible,  $x \mapsto 1 + ax$  est un automorphisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$ ; on peut donc trouver un ouvert  $W'$  de  $\mathbb{G}_{a,S}$  contenant la section 1 et un morphisme

$$P : W' \longrightarrow T$$

tel que  $P(1 + ax) = H(x)$ . <sup>(21)</sup>

Reportant dans la relation  $(2')$ , on trouve aussitôt pour  $(x, y) \in N(S')$ ,

$$P(1 + ax + ay) = P \left( \frac{1 + ax + ay}{1 + ax} \right) P(1 + ax),$$

ce qui prouve qu'il existe un voisinage ouvert de 1 dans  $\mathbb{G}_{m,S}$  tel que l'on ait pour  $x$  et  $y$  dans ce voisinage  $P(x)P(y) = P(xy)$ . En vertu de Exp. XVIII 2.3, il existe un morphisme de groupes

$$(\diamond_3) \quad \alpha^* : \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow T$$

55 qui prolonge  $P$ . Comme  $\alpha(H(x)) = (1 + ax)^2$  au voisinage de la section 0, on a  $\alpha(\alpha^*(z)) = z^2$  au voisinage de la section 1, donc

$$(\diamond_4) \quad \alpha \circ \alpha^* = 2.$$

<sup>(20)</sup>N.D.E. : Dans les trois égalités précédentes, on a corrigé l'original en remplaçant le facteur  $(1 + bx)$  à droite par  $1 + ax$ . Reportant la 3ème égalité dans la seconde et tenant compte de ce que  $1 + ax$  est inversible, on obtient bien l'égalité  $a^2 xy = abxy$ .

<sup>(21)</sup>N.D.E. : c.-à-d., on a fait le changement de variables  $x' = 1 + ax$ , soit  $x = (x' - 1)/a$ .

**F)** <sup>(22)</sup> Rassemblant les résultats (+) et ( $\diamond_1 - \diamond_4$ ), on voit qu'il existe  $a \in \mathbb{G}_m(S)$  et  $\alpha^* \in \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(\mathbb{G}_{m,S}, \mathbb{T})$  tels que  $\alpha \circ \alpha^* = 2$  et que, si  $(u, v) \in V(S')$  et  $uv \in W(S')$ , alors  $1 + auv$  est inversible et

$$p_\alpha(u)p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}\left(\frac{v}{1+auv}\right) \alpha^*(1+auv) p_\alpha\left(\frac{u}{1+auv}\right).$$

Considérons l'ouvert  $V'$  de  $\mathbb{G}_{a,S}^2$  défini par «  $1 + auv$  inversible », i.e.  $V' = (\mathbb{G}_{a,S}^2)_f$  où  $f(u, v) = 1 + auv$ . Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de  $V'$  dans  $\mathbb{G}$  qui coïncident dans un voisinage de la section 0, donc coïncident dans  $V'$ . La formule précédente est donc valable pour toute section  $(u, v)$  de  $V'$ . Il en résulte en particulier que  $V' \subset U$ , où  $U$  est l'ouvert introduit au début de **A**).

Prouvons que  $U = V'$ . Revenant aux notations de **A**), on a un morphisme

$$A : U \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}$$

qui, sur  $V'$ , est défini par  $A(u, v) = v(1 + auv)^{-1}$ . Pour montrer que  $U = V'$ , ce qui est une question ensembliste, on est ramené au cas où  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ , donc à l'assertion évidente suivante : l'ensemble de définition de l'application rationnelle  $\mathbb{G}_{a,k}^2 \rightarrow \mathbb{G}_{a,k}$  définie par la fraction rationnelle  $\frac{Y}{1+aXY}$  est l'ouvert défini par la fonction  $1 + aXY$ .

**G)** On a donc démontré l'existence de  $a$  et de  $\alpha^*$ , ainsi que les deux propriétés supplémentaires annoncées. Reste à prouver l'unicité. Soient donc  $a'$  et  $\alpha'^*$ , vérifiant aussi les conditions exigées. Si  $u, v \in \mathbb{G}_a(S')^2$ , on a aussitôt : 56

$$1 + auv \text{ inversible} \implies 1 + a'uv \text{ inversible et } \frac{v}{1+auv} = \frac{v}{1+a'uv};$$

on a donc pour toute section  $u$  de  $\mathbb{G}_a(S')$

$$1 + au \text{ inversible} \implies 1 + au = 1 + a'u,$$

ce qui prouve aussitôt  $a = a'$ .

Avec les mêmes notations, on a alors

$$1 + au \text{ inversible} \implies \alpha^*(1 + au) = \alpha'^*(1 + au),$$

donc également  $\alpha^* = \alpha'^*$ .

**Corollaire 2.4.** — Soient  $\exp(Y) t \exp(X)$  et  $\exp(Y') t' \exp(X')$  deux éléments de  $\Omega(S')$ . Alors leur produit est dans  $\Omega(S')$  si et seulement si  $u = 1 + \langle X, Y' \rangle$  est inversible, et on a alors

$$(F') \quad \exp(Y) t \exp(X) \cdot \exp(Y') t' \exp(X') = \exp(Y + u^{-1}\alpha(t)^{-1}Y') \cdot tt' \alpha^*(u) \cdot \exp(u^{-1}\alpha(t')^{-1}X + X').$$

---

<sup>(22)</sup>N.D.E. : On a légèrement modifié ce qui suit, car un ouvert  $V$  a déjà été introduit en **A**).

**Remarque 2.5.** — On peut aussi écrire la formule (F) du théorème 2.1 sans faire intervenir les morphismes  $\exp$ . En effet, transportant par ces morphismes la dualité  $\mathfrak{g}^\alpha \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} \rightarrow \mathcal{O}_S$ , on obtient un accouplement canonique de fibrés vectoriels :

$$U_\alpha \times_S U_{-\alpha} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S},$$

que nous noterons encore  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ . On a donc

$$\langle \exp X, \exp Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Si  $x \in U_\alpha(S')$ ,  $y \in U_{-\alpha}(S')$  et si  $1 + \langle x, y \rangle \in \mathbb{G}_m(S')$ , on a

$$(F) \quad x \cdot y = y^{(1+\langle x, y \rangle)^{-1}} \cdot \alpha^*(1 + \langle x, y \rangle) \cdot x^{(1+\langle x, y \rangle)^{-1}}.$$

**Corollaire 2.6.** — *L'accouplement*

$$W(\mathfrak{g}^\alpha) \times_S W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}$$

57 définit un accouplement de fibrés principaux sous  $\mathbb{G}_{m,S}$

$$W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \times_S W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}.$$

Cet accouplement sera noté  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ , ou plus simplement  $(X, Y) \mapsto XY$ .

Pour toute section  $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ , il existe donc une unique section  $X^{-1}$  de  $\Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$  telle que  $XX^{-1} = 1$ . On a  $(zX)^{-1} = z^{-1}X^{-1}$ . Le morphisme

$$s : W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \longrightarrow W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$$

ainsi défini est donc un isomorphisme de schémas, compatible avec l'isomorphisme  $s : z \mapsto z^{-1}$  sur les groupes d'opérateurs.

**Définition 2.6.1.** — On dira que  $X$  et  $s(X) = X^{-1}$  sont *appariés*.

Appliquons le corollaire 2.4 à  $Y = 0 = X'$  et  $Y' = aX^{-1}$ ,  $a \in \mathcal{O}_S(S)$ . Alors  $u = 1 + a$  et  $u^{-1}Y' = u^{-1}(u - 1)X^{-1} = (1 - u^{-1})X^{-1}$ , d'où :

**Corollaire 2.7.** — Soient  $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$  et  $u \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ . On a

$$\alpha^*(u) = \exp((u^{-1} - 1)X^{-1}) \exp(X) \exp((u - 1)X^{-1}) \exp(-u^{-1}X).$$

**Définition 2.8.** — Le morphisme  $\alpha^*$  est appelé la *coracine associée à la racine  $\alpha$* .

**Remarque 2.9.** — Si  $(G, T, \alpha)$  est un  $S$ -système élémentaire,  $(G, T, -\alpha)$  en est aussi un. On a donc par le théorème 2.1 une dualité entre  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  et  $\mathfrak{g}^\alpha$ , et une coracine  $(-\alpha)^*$ . Prenant l'inverse de la formule (F), on prouve aussitôt

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle, \quad (-\alpha)^* = -\alpha^*.$$

Passons maintenant à l'algèbre de Lie de  $G$ . La racine  $\alpha$  et la coracine  $\alpha^*$  définissent les formes linéaires

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{\bar{\alpha}^*} \mathfrak{t} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{O}_S.$$

58 On notera  $H_\alpha = \bar{\alpha}^*(1)$ . On appelle  $\bar{\alpha}$  la *racine infinitésimale* associée à  $\alpha$ , et  $H_\alpha$  la *coracine infinitésimale* correspondante.

**Lemme 2.10.** — Soient  $S' \rightarrow S$  et  $X, X' \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$ ,  $H \in W(\mathfrak{t})(S')$ ,  $Y, Y' \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})(S')$ ,  $t \in T(S')$ . On a

$$(1) \quad \text{Ad}(t)H = H, \quad \text{Ad}(t)X = \alpha(t)X, \quad \text{Ad}(t)Y = \alpha(t)^{-1}Y.$$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Ad}(\exp(X))H = H - \bar{\alpha}(H)X, & \text{Ad}(\exp(X))X' = X', \\ \text{Ad}(\exp(X))Y = Y + \langle X, Y \rangle H_\alpha - \langle X, Y \rangle X. \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} \text{Ad}(\exp(Y))H = H + \bar{\alpha}(H)Y, & \text{Ad}(\exp(Y))Y' = Y', \\ \text{Ad}(\exp(Y))X = X + \langle X, Y \rangle H_{-\alpha} - \langle X, Y \rangle Y. \end{cases}$$

$$(3) \quad [H, X] = \bar{\alpha}(H)X, \quad [H, Y] = -\bar{\alpha}(H)Y, \quad [X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha.$$

$$(4) \quad H_{-\alpha} = -H_\alpha.$$

$$(5) \quad \bar{\alpha}(H_\alpha) = 2.$$

La démonstration de ces différentes formules est soit triviale, soit conséquence immédiate de la formule (F) de 2.1.

**Corollaire 2.11.** — Supposons  $H_\alpha$  non nul sur toute fibre (ce qui est en particulier le cas si 2 est inversible sur  $S$ , par (5)). Alors  $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$  et  $X_{-\alpha} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$  sont appariés si et seulement si  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ .

**2.12.** — Soit  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire. Nous savons (1.19) que le centre de  $G$  est  $\underline{\text{Centr}}(G) = \text{Ker}(\alpha)$ , groupe de type multiplicatif et de type fini. Si  $Q$  est un sous-groupe de type multiplicatif de  $\underline{\text{Centr}}(G)$ , le quotient  $G/Q$  est affine sur  $S$  (Exp. IX 2.5), lisse sur  $S$  (Exp. VI<sub>B</sub> 9.2) à fibres connexes et réductives de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 1.8). 59

Posons  $G' = G/Q$ , c'est un  $S$ -groupe réductif de rang semi-simple 1 ;  $T' = T/Q$  en est un tore maximal. L'ouvert  $U_{-\alpha} \cdot T \cdot U_\alpha$  de  $G$  est stable par  $Q$  et on voit aussitôt que le quotient est isomorphe à  $U_{-\alpha} \times_S (T/Q) \times_S U_\alpha$ . Si on note  $\alpha'$  le caractère de  $T'$  induit par  $\alpha$ , il en résulte que le morphisme dérivé du morphisme canonique  $G \rightarrow G'$  induit des isomorphismes

$$\mathfrak{g}^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{\alpha'} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{-\alpha'}.$$

En particulier,  $\alpha'$  est une racine de  $G'$  par rapport à  $T'$ . Donc, notant  $\alpha/Q$  le caractère  $T/Q \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$  induit par  $\alpha$ , on a :

**Lemme 2.13.** — Si  $Q$  est un sous-groupe de type multiplicatif de  $\text{Ker}(\alpha)$ , alors

$$(G/Q, T/Q, \alpha/Q)$$

est un système élémentaire.

**Lemme 2.14.** — *Sous les conditions précédentes, les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccccc}
 W(\mathfrak{g}^\alpha) & \xrightarrow{\text{exp}} & G & \xleftarrow{\text{exp}} & W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \\
 \text{can} \downarrow \wr & & \text{can} \downarrow & & \text{can} \downarrow \wr \\
 W(\mathfrak{g}'^{\alpha'}) & \xrightarrow{\text{exp}} & G' & \xleftarrow{\text{exp}} & W(\mathfrak{g}'^{-\alpha'}) \\
 \\ 
 \mathfrak{g}^\alpha \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_S & & \\
 \text{can} \downarrow \wr & & \downarrow \text{id} & & \\
 \mathfrak{g}'^{\alpha'} \otimes \mathfrak{g}'^{-\alpha'} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_S & & \\
 \\ 
 \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha^*} & T & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_{m,S} \\
 & \searrow \alpha'^* & \downarrow \text{can} & \nearrow \alpha' & \\
 & & T' & & 
 \end{array}$$

60

### 3. Le groupe de Weyl

**Notations 3.0.** — <sup>(23)</sup> Si  $(G, T, \alpha)$  est un  $S$ -système élémentaire, on notera

$$N = \underline{\text{Norm}}_G(T), \quad W = \underline{\text{Norm}}_G(T)/T,$$

(cf. Exp. XIX 6.3) ;  $N$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , lisse sur  $S$ . On notera  $N^\times = N - T$  le sous-schéma ouvert de  $N$  induit sur le complémentaire de  $T$ . <sup>(24)</sup> Notons  $R$  le tore maximal (unique) de  $\text{Ker}(\alpha)$ , et  $T'$  l'image de  $\alpha^* : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow T$ , qui est un sous-tore de dimension 1 de  $T$ .

Le morphisme

$$T' \times_S R \longrightarrow T$$

induit par le produit dans  $T$  est surjectif (donc fidèlement plat) ; en effet, on est ramené à le vérifier sur les fibres géométriques, et cela résulte aussitôt de la formule  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ .

**Théorème 3.1.** — *Avec les notations précédentes :*

- (i)  $W$  est isomorphe au groupe constant  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_S$ .

<sup>(23)</sup>N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.0, pour des références ultérieures.

<sup>(24)</sup>N.D.E. : On a remplacé  $Q$  par la notation  $N^\times$ , plus suggestive.

(ii)  $N^\times$  est un fibré principal homogène localement trivial sous  $T$ , à gauche par la loi  $(t, q) \mapsto tq$  (resp. à droite par la loi  $(q, t) \mapsto qt$ ).

(iii) On a la formule

$$\text{int}(w)t = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})$$

pour  $w \in N^\times(S')$ ,  $t \in T(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . Dans la décomposition  $T_{S'} = T'_{S'} \cdot R_{S'}$ ,  $\text{int}(w)$  61 induit l'identité sur  $R_{S'}$  et la symétrie sur  $T'_{S'}$ . On a les relations

$$\alpha \circ \text{int}(w) = \alpha^{-1}, \quad \text{int}(w) \circ \alpha^* = (\alpha^*)^{-1}.$$

(iv) Pour  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , posons

$$w_\alpha(X) = \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(X).$$

Alors  $w_\alpha(X) \in N^\times(S')$  et le morphisme  $w_\alpha : W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \rightarrow N^\times$  ainsi défini vérifie

$$w_\alpha(zX) = \alpha^*(z) w_\alpha(X) = w_\alpha(X) \alpha^*(z)^{-1},$$

pour  $z \in \mathbb{G}_m(S')$ ,  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ .

(v) <sup>(25)</sup> Pour  $X, Y \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , on a, avec les notations de 2.6,

$$w_\alpha(X) w_\alpha(Y) = \alpha^\vee(-XY^{-1}).$$

En particulier,

$$w_\alpha(X)^2 = \alpha^*(-1) \in {}_2T(S) \cap \underline{\text{Centr}}(G)(S),$$

$$w_\alpha(X)^{-1} = w_\alpha(-X) = \alpha^*(-1) w_\alpha(X).$$

(vi) Si on définit de même pour  $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times(S')$ ,

$$w_{-\alpha}(Y) = \exp(Y) \exp(-Y^{-1}) \exp(Y),$$

on a (en plus des formules analogues aux précédentes)

$$w_{-\alpha}(X^{-1}) = w_\alpha(X)^{-1} = w_\alpha(-X),$$

$$w_\alpha(X) w_{-\alpha}(Y) = \alpha^*(XY).$$

*Démonstration.* (i) a déjà été vu en Exp. XIX 2.4; il en résulte aussitôt que  $N^\times$  est 62 bien un fibré principal homogène sous  $T$  pour les lois définies dans (ii); le fait qu'il soit localement trivial (pour la topologie de Zariski) résulte notamment de (iv).

Démontrons (iii); si  $w \in N^\times(S)$ , il est clair que  $\alpha \circ \text{int}(w)$  est une racine de  $G$  par rapport à  $T$ , qui est donc localement égale à  $\alpha$  ou  $-\alpha$ ; comme sur chaque fibre c'est  $-\alpha$  (*Bible*, 12-05, démonstration du cor. à la prop. 1), on a  $\alpha \circ \text{int}(w) = -\alpha$ . Par transport de structure, on en déduit

$$-\alpha^* = \text{int}(w)^{-1} \circ \alpha^* = \text{int}(w) \circ \alpha^*,$$

car  $\text{int}(w)^2 = \text{int}(w^2)$  et  $w^2$  est une section de  $T$ . Donc  $\text{int}(w)$  induit la symétrie sur  $T'$ ; comme  $R$  est central,  $\text{int}(w)$  induit l'identité sur  $R$ . La formule de (iii) définit un morphisme  $T \rightarrow T$  qui vérifie les mêmes propriétés, donc coïncide avec  $\text{int}(w)$ .

<sup>(25)</sup>N.D.E. : On a corrigé la 1ère formule de l'original.

Démontrons (iv). On a successivement

$$\begin{aligned} w_\alpha(X) t w_\alpha(X)^{-1} &= \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(X) t \exp(-X) \exp(X^{-1}) \exp(-X) \\ &= \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(X - \alpha(t)X) \exp(\alpha(t)^{-1}X^{-1}) \exp(-\alpha(t)X) t. \end{aligned}$$

Par application de la formule (F), on a

$$\exp(-X^{-1}) \exp((1 - \alpha(t))X) = \exp((\alpha(t)^{-1} - 1)X) \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \exp(-\alpha(t)^{-1}X^{-1}).$$

Reportant dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \text{int}(w_\alpha(X)) t &= \exp(\alpha(t)^{-1}X) \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \exp(-\alpha(t)X) t \\ &= \exp(aX) \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) t, \end{aligned}$$

où

$$a = \alpha(t)^{-1} - (\alpha \circ \alpha^*)(\alpha(t)^{-1}) \alpha(t),$$

mais  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ , ce qui donne aussitôt  $a = 0$  et  $w_\alpha(X) \in N^\times(S')$ .

Prouvons maintenant la seconde assertion de (iv). On a <sup>(26)</sup>

$$\begin{aligned} \alpha^*(z) w_\alpha(X) &= \exp(z^2X) \exp(-z^{-2}X^{-1}) \exp(z^2X) \alpha^*(z) \\ &= \exp(zX) \exp((z^2 - z)X) \exp(-z^{-2}X^{-1}) \exp(z^2X) \alpha^*(z) \\ &= \exp(zX) \exp(-z^{-1}X^{-1}) \alpha^*(z)^{-1} \exp((z^3 - z^2)X) \exp(z^2X) \alpha^*(z) \\ &= \exp(zX) \exp(-z^{-1}X^{-1}) \exp(zX) = w_\alpha(zX). \end{aligned}$$

**63** Prouvons (v). En vertu du résultat précédent, la première formule de (v) résulte aussitôt de la seconde ; prouvons celle-ci :

$$\begin{aligned} w_\alpha(X)^2 &= \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(2X) \exp(-X^{-1}) \exp(X) \\ &= \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(X^{-1}) \alpha^*(-1) \exp(-2X) \exp(X) \\ &= \exp(X) \alpha^*(-1) \exp(-X) = \alpha^*(-1), \end{aligned}$$

car  $\alpha(\alpha^*(-1)) = (-1)^2 = 1$ , ce qui prouve que  $\alpha^*(-1) \in \underline{\text{Centr}}(G)(S)$ .

Prouvons enfin (vi). La première assertion est un cas particulier de la seconde, démontrons celle-ci. Les deux membres de cette formule définissent des morphismes de  $W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \times_S W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$  dans  $G$ . Pour prouver qu'ils coïncident, il suffit de le faire sur un ouvert non vide sur chaque fibre (Exp. XVIII 1.4) ; il suffit donc de vérifier la

---

<sup>(26)</sup>N.D.E. : La première égalité découle de 1.5 (i) qui, combiné avec l'égalité  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ , donne les formules

$$(\dagger) \quad \alpha^*(z) \exp(X) \alpha^*(z)^{-1} = \exp(z^2X), \quad \alpha^*(z) \exp(X^{-1}) \alpha^*(z)^{-1} = \exp(z^{-2}X),$$

la troisième égalité découle de la formule (F), et la quatrième de ( $\dagger$ ), à nouveau. Enfin, un calcul analogue montre que  $w_\alpha(X) \alpha^*(z^{-1}) = w_\alpha(zX)$ .

relation lorsque  $1 + XY$  est inversible. On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
w_\alpha(X) w_{-\alpha}(Y) &= \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(X) \exp(Y) \exp(-Y^{-1}) \exp(Y) \\
&= \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp\left(\frac{Y}{1+XY}\right) \alpha^*(1+XY) \exp\left(\frac{X}{1+XY}\right) \exp(-Y^{-1}) \exp(Y) \\
&= \exp(X) \exp\left(\frac{-X^{-1}}{1+XY}\right) \alpha^*(1+XY) \exp\left(\frac{-Y^{-1}}{1+XY}\right) \exp(Y) \\
&= \exp(-X^{-2}Y^{-1}) \alpha^*\left(\frac{XY}{1+XY}\right) \exp(X+Y^{-1}) \alpha^*(1+XY) \exp\left(\frac{-Y^{-1}}{1+XY}\right) \exp(Y) \\
&= \exp(-X^{-2}Y^{-1}) \alpha^*(XY) \exp\left(\frac{Y^{-1}+X}{(1+XY)^2}\right) \exp\left(\frac{-Y^{-1}}{1+XY}\right) \exp(Y) \\
&= \alpha^*(XY) \exp(-Y) \exp(Y) = \alpha^*(XY).
\end{aligned}$$

**Corollaire 3.2.** — Soit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . Pour tout  $w \in G(S)$ , les conditions suivantes 64 sont équivalentes :

- (i)  $w \in N^\times(S)$ ,
- (ii) on a  $\text{int}(w) \circ n\alpha^* = -n\alpha^*$  (on rappelle que  $(n\alpha^*)(z) = \alpha^*(z)^n$ ).

On a (i)  $\Rightarrow$  (ii) (assertion (iii) du théorème 3.1) ; réciproquement, on peut supposer que  $N^\times$  possède une section et on est ramené à prouver :

**Lemme 3.3.** — On a  $\text{Centr}_G(n\alpha^*) = T$  pour  $n \neq 0$ .

En effet, l'image  $T'$  de  $n\alpha^*$  est un sous-tore de  $G$ . Il en résulte (Exp. XIX 2.8) que  $\text{Centr}_G(n\alpha^*)$  est un sous-groupe réductif de  $G$ , contenant  $T$ . Comme sur chaque fibre on a  $\text{Centr}_{G_{\overline{s}}}(n\alpha_{\overline{s}}^*) \neq G_{\overline{s}}$ , alors  $\text{Centr}_{G_{\overline{s}}}(n\alpha_{\overline{s}}^*) = T_{\overline{s}}$  (Exp. XIX 1.6.3 <sup>(27)</sup>), donc  $\text{Centr}_G(n\alpha^*) = T$ , car il s'agit de sous-groupes lisses de  $G$ .

**Remarque 3.4.** — La construction de  $w_\alpha$  et le fait que  $w_\alpha(X)$  normalise  $T$  ne s'appliquent que sur la formule (F). En particulier, si  $G$  est un  $S$ -groupe vérifiant les conditions de 2.2,  $\text{Norm}_G(T)$  est différent de  $T$  sur chaque fibre. Il en résulte que si  $G$  est un  $S$ -groupe affine à fibres connexes vérifiant les conditions de 2.2, il est *réductif* de rang semi-simple 1. En effet, il est lisse au voisinage de la section unité, donc lisse et on peut appliquer le critère de Exp. XIX 1.11.

**3.5.** — Avant d'énoncer le théorème suivant, faisons quelques remarques. Nous identifions comme d'habitude  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  à  $(\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes -1}$ . De même, nous identifierons  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\alpha)$  à  $(\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}$  et donc 65

$$\text{Isom}_{\mathcal{O}_S\text{-mod.}}(W(\mathfrak{g}^{-\alpha}), W(\mathfrak{g}^\alpha)) \simeq W((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times.$$

Si  $w \in N^\times(S)$ , alors  $\text{Ad}(w)$  permute  $\mathfrak{g}^\alpha$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  (3.1, (iii)), donc définit un isomorphisme :

$$a_\alpha(w) : \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha,$$

<sup>(27)</sup>N.D.E. : L'hypothèse  $\text{Centr}_{G_{\overline{s}}}(n\alpha_{\overline{s}}^*) \neq G_{\overline{s}}$  entraîne que  $\dim \text{Centr}_{G_{\overline{s}}}(n\alpha_{\overline{s}}^*) - \dim T_{\overline{s}} < 2$ , or cette différence est paire, d'après *loc. cit.*

que nous identifierons donc à une section  $a_\alpha(w) \in \Gamma(S, (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times$ . Cette construction est compatible avec le changement de base et définit donc un morphisme

$$a_\alpha : N^\times \longrightarrow W((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times,$$

tel que  $a_\alpha(w)Y = \text{Ad}(w)Y$  pour tous  $w \in N^\times(S')$ ,  $Y \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$ ,  $S' \rightarrow S$ .

**Théorème 3.6.** — (i) On a

$$\text{int}(w) \exp(Y) = \exp(a_\alpha(w)Y)$$

pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $w \in N^\times(S')$ ,  $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})(S')$ .

(ii) On a

$$a_\alpha(tw) = \alpha(t) a_\alpha(w), \quad a_\alpha(wt) = \alpha(t)^{-1} a_\alpha(w).$$

(iii) Si on définit de même  $a_{-\alpha} : N^\times \rightarrow W((\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes 2})^\times$ , on a

$$a_{-\alpha}(w) = a_\alpha(w)^{-1}. \quad (28)$$

(iv) Pour tout  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , on a

$$a_\alpha(w_\alpha(X)) = -X^2.$$

66

L'assertion (i) est triviale, par la caractérisation des morphismes  $\exp$  donnée en 1.5. L'assertion (ii) est immédiate, ainsi que (iii). Prouvons (iv) : soient  $X \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ ,  $Z \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^\alpha)$  ; on a par définition <sup>(29)</sup>

$$a_\alpha(w_\alpha(X))^{-1}(Z) = \text{Ad}(w_\alpha(X))(Z) = \text{Ad}(\exp(X)) \text{Ad}(\exp(-X^{-1})) \text{Ad}(\exp(X))(Z).$$

Appliquant les formules (2') et (2) du lemme 2.10, ainsi que les égalités  $H_{-\alpha} = -H_\alpha$ ,  $\overline{\alpha}(H_\alpha) = 2$  (*loc. cit.* (4) et (5)) et  $\langle X, X^{-1} \rangle = 1$  (2.6), on obtient que le terme de droite égale, successivement :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(X)) \text{Ad}(\exp(-X^{-1}))(Z) &= \text{Ad}(\exp(X))(Z + \langle X^{-1}, Z \rangle (H_\alpha - X^{-1})) \\ &= Z + \langle X^{-1}, Z \rangle (H_\alpha - 2X - X^{-1} - H_\alpha + X) \\ &= Z - \langle X^{-1}, Z \rangle X - \langle X^{-1}, Z \rangle X^{-1}. \end{aligned}$$

Mais  $Z = \langle X^{-1}, Z \rangle X$  et  $\langle X^{-1}, Z \rangle X^{-1} = X^{-2}Z$ , donc ceci montre que  $a_\alpha(w_\alpha(X))^{-1} = -X^{-2}$ , d'où  $a_\alpha(w_\alpha(X)) = -X^2$ .

**Corollaire 3.7.** — On a en particulier

$$\text{int}(w_\alpha(X)) \exp(X) = \exp(-X^{-1}),$$

d'où (par la définition de  $w_\alpha(X)$ ) :

$$w_\alpha(X) \exp(X) w_\alpha(X)^{-1} = \exp(-X) w_\alpha(X) \exp(-X),$$

soit, par un calcul immédiat

$$(w_\alpha(X) \exp(X))^3 = e.$$

**Corollaire 3.8.** — Soient  $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . Alors  $w_\alpha(X)$  est l'unique section  $w \in G(S)$  qui vérifie

<sup>(28)</sup>N.D.E. : c.-à-d.,  $a_{-\alpha}(w)$  et  $a_{-\alpha}(w)$  sont appariés, cf. 2.6.1.

<sup>(29)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

- (i)  $\text{int}(w) \circ n\alpha^* = -n\alpha^*$ .
- (ii)  $(w \exp(X))^3 = e$ .

On sait que  $w_\alpha(X)$  vérifie bien ces conditions. Réciproquement, soit  $w \in G(S)$  67 vérifiant (i) et (ii). Par 3.2 et 3.1 (ii), on sait qu'il existe  $t \in T(S)$  tel que  $w = w_\alpha(X) t$ . Posons  $u = \exp(X)$ . On a alors

$$w u w^{-1} = w_\alpha(X) t \exp(X) t^{-1} w_\alpha(X)^{-1} = \exp(-\alpha(t)X^{-1}),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} u^{-1} w u^{-1} &= \exp(-X) w_\alpha(X) t \exp(-X) \\ &= \exp(-X) w_\alpha(X) \exp(-X) \exp(X - \alpha(t)X) t \\ &= \exp(-X^{-1}) \exp(X - \alpha(t)X) t = \exp(-X^{-1}) t \exp(H). \end{aligned}$$

Or  $(wu)^3 = e \Leftrightarrow w u w^{-1} = u^{-1} w u^{-1}$ ; comparant les deux décompositions de cet élément sur  $U_{-\alpha} \cdot T \cdot U_\alpha$ , on en tire  $t = e$ .

**Remarque 3.9.** — On peut résumer un certain nombre des résultats de ce numéro par le diagramme suivant de fibrés principaux homogènes (à gauche)

$$\begin{array}{ccccc} W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times & \xrightarrow{w_\alpha} & N^\times & \xrightarrow{a_\alpha} & W((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times \\ & & \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha^*} & T & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_{m,S} \end{array}$$

Remarquons que  $a_\alpha$  est fidèlement plat ( $\alpha$  l'étant) et que  $w_\alpha$  est un *monomorphisme* si et seulement si  $\alpha^*$  est un *monomorphisme*. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les diagrammes correspondants pour les structures de fibrés principaux à droite, ainsi que les diagrammes du même genre pour la racine  $-\alpha$ , et d'étudier les relations entre ces différents diagrammes.

**Lemme 3.10.** — Soient  $S$  un schéma,  $q$  un entier  $> 0$  tel que  $x \mapsto x^q$  définisse un endomorphisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$ ,  $(G, T, \alpha)$  et  $(G', T', \alpha')$  deux  $S$ -systèmes élémentaires,  $f : G \rightarrow G'$  68 un morphisme de  $S$ -groupes. Soient

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{\alpha'}$$

un isomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules et

$$h^\vee : (\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{-\alpha'}$$

l'isomorphisme contragrédient. Pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$ , on suppose :

$$f(\exp(X)) = \exp(h(X^q)).$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f(\alpha^*(z)) = \alpha'^*(z)^q$ .
- (ii)  $f(w_\alpha(Z)) = w_{\alpha'}(h(Z^q))$ .
- (iii)  $f(\exp(Y)) = \exp(h^\vee(Y^q))$ .

(Chaque condition doit se lire : pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $z \in \mathbb{G}_m(S')$ ,  $Z \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ ,  $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})(S')$ , on a ...).

En effet, (i)  $\Rightarrow$  (ii) par 3.8, (ii)  $\Rightarrow$  (iii) par 3.7, (iii)  $\Rightarrow$  (i) par 2.7.

**Proposition 3.11.** — Soient  $S$  un schéma,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$ , tel que  $x \mapsto x^q$  définisse un endomorphisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$ ,  $(G, T, \alpha)$  et  $(G', T', \alpha')$  deux  $S$ -systèmes élémentaires,  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de  $S$ -groupes. Les conditions suivantes sur  $f$  sont équivalentes :

(i) La restriction de  $f$  à  $T$  se factorise en un morphisme  $f_T : T \rightarrow T'$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha^*} & T & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_{m,S} \\ q \downarrow & & f_T \downarrow & & q \downarrow \\ \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha'^*} & T' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathbb{G}_{m,S}. \end{array}$$

69 (ii) Il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules (unique)

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\alpha'}$$

tel que  $f(\exp(X)) = \exp(h(X^q))$ ,  $f(\exp(Y)) = \exp(h^\vee(Y^q))$  pour tous  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$ ,  $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})(S')$ ,  $S' \rightarrow S$  (il en résulte que  $f$  vérifie également les conditions équivalentes de 3.10).

On a (ii)  $\Rightarrow$  (i). En effet, par 3.10, la condition (ii) entraîne  $f \circ \alpha^* = q \alpha'^*$  donc, par 3.3,  $f|_T$  se factorise par  $T'$ . Reste à prouver  $\alpha'(f(t)) = \alpha(t)^q$ , ce qui résulte aussitôt du fait que  $f$  induit un morphisme de groupes  $T \cdot U_\alpha \rightarrow T' \cdot U_{\alpha'}$ .

Prouvons (i)  $\Rightarrow$  (ii). Soient  $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)$ ,  $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})$ . Posons  $p_+(x) = f(\exp(xX))$  et  $p_-(x) = f(\exp(yY))$ , ce sont des morphismes de groupes

$$p_+, p_- : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow G.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \text{int}(\alpha'^*(z))^q(p_+(x)) &= \text{int}((f_T(\alpha^*(z))) (f(\exp(xX)))) \\ &= f(\text{int}(\alpha^*(z))(\exp(xX))) \\ &= f(\exp(z^2xX)) = p_+(z^2x). \end{aligned}$$

Appliquant le lemme 1.2 (avec  $Q = \alpha'^*(\mathbb{G}_{m,S})$ ), on en déduit qu'il existe une section  $X' \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{\alpha'})$  telle que

$$f(\exp(xX)) = p_+(x) = \exp(x^q X').$$

De même, il existe une section  $Y' \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha'})$  telle que

$$f(\exp(yY)) = \exp(y^q Y').$$

Écrivant maintenant que  $f$  est un morphisme de groupes, donc qu'il respecte la formule (F), on obtient aussitôt

$$X^q Y^q = (XY)^q = X' Y'.$$

70 On en conclut aisément que  $X^q \mapsto X'$  et  $Y^q \mapsto Y'$  définissent des isomorphismes  $h$  et  $h^\vee$  comme annoncé.

**Proposition 3.12.** — Soient  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire,  $w \in N^\times(S)$ , posons

$$\Omega_0 = \Omega \cap \text{int}(w^{-1})(\Omega).$$

Soit  $d$  la fonction sur  $\Omega$  définie par

$$d(\exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)) = \alpha(t)^{-1} + XY.$$

Alors  $\Omega_0 = \Omega_d$  et on a pour  $\exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X) \in \Omega_0(S')$  la formule suivante (on pose  $z = d(\exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X))$ ) :

$$(\star) \quad \text{int}(w)(\exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)) = \exp(z^{-1}a_\alpha(w)^{-1}X) \cdot t \alpha^*(z) \cdot \exp(z^{-1}a_\alpha(w)Y).$$

De plus, on a  $d \circ \text{int}(w) = d^{-1}$ .

En effet, on a aussitôt <sup>(30)</sup>

$$\begin{aligned} \text{int}(w)(\exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)) &= \exp(a_\alpha(w)Y) \cdot t \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \cdot \exp(a_\alpha(w)^{-1}X) \\ &= \exp(a_\alpha(w)Y) \cdot \exp(\alpha(t)a_\alpha(w)^{-1}X) \cdot t \alpha^*(\alpha(t)^{-1}). \end{aligned}$$

D'après 2.1, c'est une section de  $\Omega$  si et seulement si  $1 + \alpha(t)XY$  est inversible, ce qui prouve bien l'égalité  $\Omega_0 = \Omega_d$ ; appliquant ensuite la formule (F) de *loc. cit.*, on en déduit par un calcul immédiat la formule  $(\star)$  annoncée. Enfin, il résulte de  $(\star)$  que l'on a

$$(d \circ \text{int}(w))(\exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)) = \alpha(t \alpha^*(z))^{-1} + z^{-2}XY = z^{-2}(\alpha(t)^{-1} + XY) = z^{-1},$$

d'où la dernière assertion.

N. B. On remarquera que la fonction  $d$  est indépendante du choix de  $w$ .

#### 4. Le théorème d'isomorphisme

**Théorème 4.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$  tel que  $x \mapsto x^q$  soit un endomor- 71  
phisme de  $\mathbb{G}_{a,S}$ ,  $(G, T, \alpha)$  et  $(G', T', \alpha')$  deux  $S$ -systèmes élémentaires. Soient

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\alpha'} \quad \text{et} \quad h^\vee : (\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{-\alpha'}$$

deux isomorphismes contragrédients l'un de l'autre. Soit  $f_T : T \rightarrow T'$  un morphisme de  $S$ -groupes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{q} & \mathbb{G}_{m,S} \\ \alpha^* \downarrow & & \downarrow \alpha'^* \\ T & \xrightarrow{f_T} & T' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{q} & \mathbb{G}_{m,S} \end{array}$$

<sup>(30)</sup>N.D.E. : On a corrigé l'original en échangeant  $a_\alpha(w)$  et  $a_\alpha(w)^{-1}$ , et l'on a détaillé la preuve de l'égalité  $d \circ \text{int}(w) = d^{-1}$ .

Il existe un unique morphisme de  $S$ -groupes  $f : G \rightarrow G'$  qui prolonge  $f_T$  et vérifie

$$f(\exp(X)) = \exp(h(X^q))$$

pour tout  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ . De plus, ce morphisme vérifie aussi

$$f(\exp(Y)) = \exp(h^\vee(Y^q)) \quad \text{et} \quad f(w_\alpha(Z)) = w_\alpha(h(Z^q)),$$

pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $Y \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^{-\alpha})$ ,  $Z \in \Gamma(S', \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ .

Si  $f : G \rightarrow G'$  prolonge  $f_T$ , alors  $f \circ \alpha^* = (\alpha'^*)^q$ . Si de plus  $f$  vérifie la seconde condition, alors il vérifie aussi les deux autres par 3.10. Il en résulte que  $f$  est déterminé sur  $\Omega$  par la relation

$$f(\exp(Y) t \exp(X)) = \exp(h^\vee(Y^q)) f_T(t) \exp(h(X^q)).$$

72 Comme  $\Omega$  est schématiquement dense dans  $G$ , ceci démontre déjà l'unicité de  $f$ . Pour en prouver l'existence, il suffit, en vertu de Exp. XVIII 2.3, de prouver que la formule précédente définit un morphisme « génériquement multiplicatif » de  $\Omega$  dans  $G'$ . Or, par 2.4, cela revient à vérifier que  $\alpha' \circ f = \alpha^q$ , ce qui résulte de ce que  $f$  prolonge  $f_T$ .

**Scholie 4.2.** — On peut aussi interpréter 4.1 de la façon suivante : on considère la catégorie  $\mathcal{E}$  des  $S$ -systèmes élémentaires et la catégorie  $\mathcal{D}$  des couples

$$(\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\alpha^*} T \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,S}, \mathcal{L}),$$

où  $T$  est un tore,  $\alpha$  et  $\alpha^*$  des morphismes de groupes tels que  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ , et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible (le lecteur précisera les morphismes des deux catégories envisagées). On définit un foncteur  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  par

$$(G, T, \alpha) \mapsto (\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\alpha^*} T \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,S}, \mathfrak{g}^\alpha).$$

Le théorème précédent dit que ce foncteur est *pleinement fidèle*. C'est en fait une équivalence de catégories comme on le verra au numéro suivant. On a déjà :

**Corollaire 4.3.** — Si  $q = 1$  et si  $f_T$  est un isomorphisme, alors  $f$  est un isomorphisme.

**Corollaire 4.4.** — Si  $q = 1$  et si  $f_T$  est fidèlement plat de noyau  $Q$  (cf. Exp. IX 2.7), alors  $f$  est fidèlement plat (quasi-compact) de noyau  $Q$ , donc identifie  $G'$  à  $G/Q$ .

En effet, si  $f_T$  est fidèlement plat de noyau  $Q$ , alors

$$Q = \text{Ker}(f_T) \subset \text{Ker}(f_T \circ \alpha') = \text{Ker}(\alpha).$$

Introduisant le  $S$ -système élémentaire  $(G/Q, T/Q, r/Q)$  de 2.13, on est ramené par 2.14 à prouver que  $f/Q$  induit un isomorphisme de  $G/Q$  sur  $G'$ , ce qui résulte aussitôt de 4.3.

73

### 5. Exemples de systèmes élémentaires, applications

**5.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible. Considérons le groupe  $G_{\mathcal{L}}$  sur  $S$  défini par

$$G_{\mathcal{L}}(S') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{G}_a(S'), \begin{matrix} b \in W(\mathcal{L})(S') \\ c \in W(\mathcal{L}^{-1})(S') \end{matrix}, ad - bc \in \mathbb{G}_m(S') \right\}$$

muni de la loi de multiplication habituelle des matrices. Il est localement isomorphe à  $GL_{2,S}$ . C'est donc un  $S$ -schéma en groupes, affine et lisse sur  $S$ , à fibres connexes.

**Remarque.** — Soient  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}''$  deux faisceaux inversibles sur  $S$ , tels que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}''^{-1}$ .<sup>(31)</sup> Alors on a un isomorphisme de  $S$ -groupes :

$$G_{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} GL(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'')$$

défini comme suit : si  $x$  (resp.  $y$ ) est une section de  $\mathcal{L}'$  (resp.  $\mathcal{L}''$ ) sur un ouvert  $V$  de  $S$ , on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

**5.2.** — On notera  $S_{\mathcal{L}}$  le sous-groupe fermé de  $G_{\mathcal{L}}$  défini par la relation  $ad - bc = 1$ . C'est aussi un  $S$ -schéma en groupes, affine et lisse sur  $S$ , à fibres connexes (isomorphe à  $SL(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'')$  par l'isomorphisme précédent).

De même, considérons le morphisme  $\mathbb{G}_{m,S} \rightarrow G_{\mathcal{L}}$  défini par  $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ . C'est un monomorphisme central ; par passage au quotient, on en déduit un groupe  $P_{\mathcal{L}}$ , lisse et affine sur  $S$ , à fibres connexes (cf. Exp. VIII 5.7)

On peut voir que, par passage au quotient à partir de l'isomorphisme de la remarque précédente,  $P_{\mathcal{L}}$  s'identifie au groupe des automorphismes du fibré projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'')$  (cf. EGA, II 4.2.7). On notera  $i$  et  $p$  les morphismes canoniques

74

$$S_{\mathcal{L}} \xrightarrow{i} G_{\mathcal{L}} \xrightarrow{p} P_{\mathcal{L}} ;$$

$i$  est une immersion fermée,  $p$  est fidèlement plat et affine.

**5.3.** — Considérons les morphismes de groupes

$$t_G : \mathbb{G}_{m,S}^2 \longrightarrow G_{\mathcal{L}}, \quad t_G(z, z') = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix};$$

$$t_S : \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow S_{\mathcal{L}}, \quad t_S(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix};$$

$$t_P : \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}, \quad t_P(z) = p(t_G(z, 1)).$$

Ce sont des monomorphismes de groupes, qui définissent dans chaque groupe un tore (déployé) de codimension relative 2. Pour tout  $s \in S$ , soit

$$X \in \Gamma(\overline{s}, \mathcal{L} \otimes \overline{s})^{\times};$$

<sup>(31)</sup>N.D.E. : On a corrigé  $\mathcal{L}'' \otimes \mathcal{L}'^{-1}$  en  $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}''^{-1}$  et l'on a détaillé la phrase qui suit.

alors la section  $\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^{-1} & 0 \end{pmatrix}$  de  $G_{\mathcal{L}, \bar{s}}$  normalise  $t_G(\mathbb{G}_{m, \bar{s}}^2)$  et ne le centralise pas ; on conclut alors de Exp. XIX 1.6 que  $G_{\mathcal{L}}$  est *réductif*, de *rang semi-simple* 1, de *tore maximal*  $t_G(\mathbb{G}_{m, S}^2)$ .

On raisonne de même pour  $S_{\mathcal{L}}$  et  $P_{\mathcal{L}}$ , et on voit que  $S_{\mathcal{L}}$  (resp.  $P_{\mathcal{L}}$ ) est réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal  $t_S(\mathbb{G}_{m, S})$  (resp.  $t_P(\mathbb{G}_{m, S})$ ).

**5.4.** — En raisonnant comme d'habitude, on détermine aussitôt l'algèbre de Lie de ces différents groupes et l'opération adjointe du tore maximal choisi. Faisons-le pour  $G_{\mathcal{L}}$  ; c'est immédiat par Exp. II 4.8 :  $\mathcal{L}ie(G_{\mathcal{L}}/S)$  est l'algèbre de Lie des matrices ci-dessous :

$$\mathcal{L}ie(G_{\mathcal{L}}/S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a \text{ et } d \text{ sections de } \mathcal{O}_S, b \text{ section de } \mathcal{L}, c \text{ section de } \mathcal{L}^{-1} \right\}$$

avec le crochet habituel ; on a

$$\text{Ad}(t_G(z, z')) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & zz'^{-1}b \\ z'z^{-1}c & d \end{pmatrix}.$$

75 Notons  $\mathcal{L}ie(G_{\mathcal{L}}/S) = \mathfrak{g}$ . Soit  $\alpha_G : t_G(\mathbb{G}_{m, S}^2) \rightarrow \mathbb{G}_{m, S}$  le caractère défini par

$$\alpha_G(t_G(z, z')) = zz'^{-1}.$$

On voit aussitôt sur la relation précédente que  $\alpha_G$  est une racine de  $G_{\mathcal{L}}$  par rapport à  $t_G(\mathbb{G}_{m, S}^2)$  et que le morphisme

$$u : \mathcal{L} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (\text{resp. } u_- : \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathfrak{g})$$

défini par  $u(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (resp.  $u_-(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix}$ ) est un isomorphisme de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathfrak{g}^{\alpha_G}$  (resp. de  $\mathcal{L}^{-1}$  sur  $\mathfrak{g}^{-\alpha_G}$ ).

On a donc prouvé que  $(G, t_G(\mathbb{G}_{m, S}^2), \alpha_G)$  est un *S-système élémentaire*.

Posant de même

$$\alpha_S(t_S(z)) = z^2, \quad \alpha_P(t_P(z)) = z,$$

on démontre que  $(S_{\mathcal{L}}, t_S(\mathbb{G}_{m, S}), \alpha_S)$  et  $(P_{\mathcal{L}}, t_P(\mathbb{G}_{m, S}), \alpha_P)$  sont des systèmes élémentaires, et on définit des isomorphismes de  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L}^{-1}$ ) avec les facteurs directs correspondants des algèbres de Lie de  $S_{\mathcal{L}}$  et  $P_{\mathcal{L}}$ .

**5.5.** — Posons  $\exp \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a ainsi défini un morphisme

$$W(\mathfrak{g}^{\alpha_G}) \longrightarrow G_{\mathcal{L}}$$

qui induit sur les algèbres de Lie le morphisme canonique, donc est l'unique morphisme de ce type (1.5). De même, on pose  $\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$ . Effectuant le calcul explicite de la formule (F), on trouve

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = XY, \quad \alpha_G^*(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = t_G(z, z^{-1}).$$

(32) L'ouvert  $N^\times = N_G^\times$  (défini avant 3.1) est :

$$N_G^\times(S') = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \middle| P \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S'), Q \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times(S') \right\},$$

le morphisme  $w_{\alpha_G}$  (cf. 3.1 (iv)) est donné, pour tout  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ , par

$$w_{\alpha_G}(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix};$$

le morphisme  $a_{\alpha_G}$  (cf. 3.5) est donné par :

76

$$\text{si } w = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in N_G^\times(S') \text{ alors } a_{\alpha_G}(w) = PQ^{-1} \in W((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times(S'),$$

c.-à-d., pour tout  $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times(S')$ , on a  $a_{\alpha_G}(w)(Y) = PQ^{-1}Y \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S')$ .

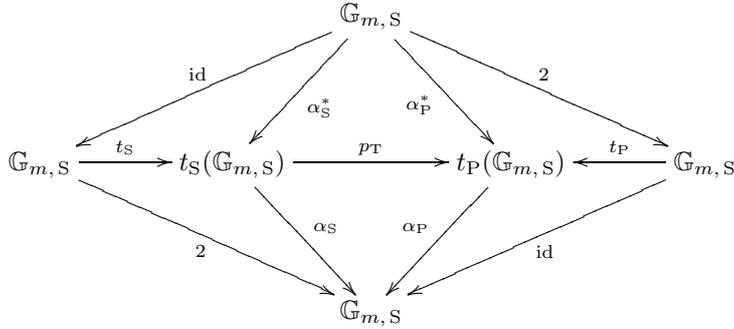
**5.6.** — Nous laissons au lecteur le soin de faire les mêmes calculs dans  $S_{\mathcal{L}}$  et  $P_{\mathcal{L}}$ . On trouve la même formule de dualité et les coracines

$$\alpha_S^*(z) = t_S(z), \quad \alpha_P^*(z) = t_P(z^2).$$

Notons  $p_T$  le morphisme induit par  $p : G_{\mathcal{L}} \rightarrow P_{\mathcal{L}}$  sur  $t_S(\mathbb{G}_{m,S})$ , c.-à-d.

$$p_T(t_S(z)) = t_P(z^2).$$

On a donc le diagramme commutatif : (33)



On reconnaît dans le partie centrale le diagramme commutatif de 4.1 (34) relatif au morphisme canonique  $p \circ i : S_{\mathcal{L}} \rightarrow P_{\mathcal{L}}$ , qui induit un morphisme des S-systèmes élémentaires précédents.

(32)N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(33)N.D.E. : où  $t_S$  et  $t_P$  sont des *isomorphismes*.

(34)N.D.E. : avec  $q = 1$ .

5.7. — Soit maintenant  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire quelconque. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{G}_{m,S} & & \\
 & \swarrow \text{id} & \downarrow \alpha^* & \searrow 2 & \\
 \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{\alpha^*} & T & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_{m,S} \\
 & \searrow 2 & \downarrow \alpha & \swarrow \text{id} & \\
 & & \mathbb{G}_{m,S} & & 
 \end{array}$$

77 Combinant les deux diagrammes précédents, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{G}_{m,S} & & \\
 & \swarrow \alpha_S^* & \downarrow \alpha^* & \searrow \alpha_P^* & \\
 t_S(\mathbb{G}_{m,S}) & \xrightarrow{\alpha^* \circ t_S^{-1}} & T & \xrightarrow{t_P \circ \alpha} & t_P(\mathbb{G}_{m,S}) \\
 & \searrow \alpha_S & \downarrow \alpha & \swarrow \alpha_P & \\
 & & \mathbb{G}_{m,S} & & 
 \end{array}$$

Utilisant 4.1, on a donc :

**Proposition 5.8.** — Soient  $S$  un schéma,  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire. Posons  $\mathcal{L} = \mathfrak{g}^\alpha$  (et donc  $\mathcal{L}^{-1} = \mathfrak{g}^{-\alpha}$ ).

(i) Il existe un unique morphisme de groupes  $f : S_{\mathcal{L}} \rightarrow G$  qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & f \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \alpha^*(z), & f \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(X); \\
 \text{(b)} \quad & f \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(X), & f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} = \exp(Y); \\
 \text{(c)} \quad & f \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(X), & f \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix} = w_\alpha(X).
 \end{aligned}$$

(ii) Il existe un unique morphisme de groupes  $g : G \rightarrow P_{\mathcal{L}}$  qui vérifie

$$g(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(\exp(X)) = p \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$g(\exp(Y)) = p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}, \quad g(w_\alpha(X)) = p \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme  $g$  est fidèlement plat quasi-compact de noyau  $\text{Ker}(\alpha) = \underline{\text{Centr}}(G)$  et  $g \circ f$  est le morphisme canonique  $S_{\mathcal{L}} \rightarrow P_{\mathcal{L}}$ .

Remarquons que les conditions (b) de (i) donnent une description explicite de la dualité entre  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ . 78

**Corollaire 5.9.** — Soit  $(G, T, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire. Les sous-groupes  $T \cdot U_{\alpha}$ ,  $T \cdot U_{-\alpha}$ ,  $U_{\alpha}$  et  $U_{-\alpha}$  sont fermés.

Comme  $U_{\alpha}$  est un sous-schéma en groupes fermé de  $T \cdot U_{\alpha}$ , il suffit de faire la vérification pour ce dernier. D'après le théorème de Noether (Exp. IV 5.3.1 et 6.4.1), il suffit de prouver que  $(T \cdot U_{\alpha})/\text{Ker}(\alpha)$  est un sous-groupe fermé de  $G/\text{Ker}(\alpha)$ . En vertu de 5.8, on est donc ramené à prouver que le sous-groupe de  $P_{\mathcal{L}}$  (ou de  $G_{\mathcal{L}}$ , ce qui revient au même en vertu d'une nouvelle application du théorème de Noether), défini par  $c = 0$  est fermé, ce qui est trivial.

Par conséquent, les morphismes  $\exp$  du théorème 1.5 (i) sont des immersions fermées.

N. B. Le corollaire résulte aussi de ce que  $T \cdot U_{\alpha}$  et  $T \cdot U_{-\alpha}$  sont des « sous-groupes de Borel » de  $G$  (cf. Exp. XII 7.10).

**5.10.** — Soient  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible et

$$\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\alpha^*} T \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,S}$$

un diagramme de groupes <sup>(35)</sup> tel que  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ . Soient  $R$  le tore maximal de  $\text{Ker}(\alpha)$  et  $K = \alpha^{*-1}(R)$ . Alors,  $K$  est un sous-groupe de type multiplicatif de  $\mathbb{G}_{m,S}$ ; en vertu de  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ , c'est même un sous-groupe de  $\mu_{2,S}$ . En particulier le morphisme

$$K \longrightarrow S_{\mathcal{L}}, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

est central. On a donc un monomorphisme de groupes central :

$$K \longrightarrow R \times S_{\mathcal{L}}, \quad z \mapsto \left( \alpha^*(z), \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

Considérons le groupe  $G = (R \times S_{\mathcal{L}})/K$  obtenu par passage au quotient. C'est un groupe affine et lisse sur  $S$ , à fibres connexes. Il est immédiat que la suite

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow R \times t_S(\mathbb{G}_{m,S}) \xrightarrow{u} T \longrightarrow 1$$

où  $u(x, t_S(z)) = x \alpha^*(z)$  est exacte. L'image de  $R \times t_S(\mathbb{G}_{m,S})$  dans  $G$  est donc un tore  $T'$  isomorphe à  $T$ . On montre maintenant sans difficultés que si  $\alpha'$  est le caractère de  $T'$  déduit de  $\alpha$  par l'isomorphisme précédent,  $(G, T', \alpha')$  est un  $S$ -système élémentaire, que  $\mathfrak{g}^{\alpha'}$  est isomorphe à  $\mathcal{L}$  et que  $\alpha'^*$  est obtenu à partir de  $\alpha^*$  par l'isomorphisme  $T \xrightarrow{\sim} T'$ . On a donc construit un  $S$ -système élémentaire  $(G, T', \alpha')$  tel que l'objet

<sup>(35)</sup>N.D.E. :  $T$  étant un tore.

correspondant  $(\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\alpha'^*} \mathbb{T}' \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{G}_{m,S}, \mathfrak{g}^{\alpha'})$  de la catégorie  $\mathcal{D}$  définie en 4.2 soit isomorphe à  $(\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,S}, \mathcal{L})$ . On a donc prouvé le

**Théorème 5.11.** — *Dans les notations de 4.2, le foncteur*

$$(\mathbb{G}, \mathbb{T}, \alpha) \longmapsto (\mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,S}, \mathfrak{g}^\alpha)$$

*est une équivalence de catégories entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$ .*

80

## 6. Générateurs et relations pour un système élémentaire

**6.1.** — Soient  $S$  un schéma,  $(\mathbb{G}, \mathbb{T}, \alpha)$  un  $S$ -système élémentaire. Soient  $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(S)$  et  $u = \exp(X)$ ; on a vu en 3.8 que l'élément  $w = w_\alpha(X)$  vérifie en particulier la relation

$$(wu)^3 = e.$$

<sup>(36)</sup> On note  $s_\alpha$  l'automorphisme de  $\mathbb{T}$  induit par  $\text{int}(w)$ ; d'après le théorème 3.1 (iii), pour tout  $S' \rightarrow S$  et  $t \in \mathbb{T}(S')$ , on a

$$s_\alpha(t) = \text{int}(w)(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}).$$

**Théorème 6.2.** — *Soit  $H$  un  $S$ -faisceau en groupes pour (fppf). Soient*

$$f_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \longrightarrow H, \quad f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow H$$

*des morphismes de groupes et  $h \in H(S)$  une section de  $H$ . Pour qu'il existe un morphisme de groupes (nécessairement unique)*

$$f : \mathbb{G} \longrightarrow H$$

*prolongeant  $f_{\mathbb{T}}$  et  $f_\alpha$  et vérifiant  $f(w) = h$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout  $S' \rightarrow S$ , tout  $t \in \mathbb{T}(S')$  et tout  $x \in U_\alpha(S')$ , on a*

$$(1) \quad f_{\mathbb{T}}(t) f_\alpha(x) f_{\mathbb{T}}(t)^{-1} = f_\alpha(t x t^{-1}) = f_\alpha(x^{\alpha(t)}).$$

*(autrement dit,  $f_{\mathbb{T}}$  et  $f_\alpha$  se prolongent en un morphisme de groupes du produit semi-direct  $\mathbb{T} \cdot U_\alpha$  dans  $H$ ).*

(ii) *Pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $t \in \mathbb{T}(S')$ , on a*

$$(2) \quad h f_{\mathbb{T}}(t) h^{-1} = f_{\mathbb{T}}(s_\alpha(t)) = f_{\mathbb{T}}(t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})).$$

81

(iii) *On a les deux relations dans  $H(S)$  :*

$$(3) \quad h^2 = f_{\mathbb{T}}(\alpha^*(-1)),$$

$$(4) \quad (h f_\alpha(u))^3 = e.$$

---

<sup>(36)</sup>N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

*Démonstration.* Notons additivement  $U_\alpha$  et  $U_{-\alpha}$  et multiplicativement leur structure vectorielle. Si  $f$  vérifie les conditions de l'énoncé, on a nécessairement pour tout  $y \in U_{-\alpha}(S')$ ,

$$f(y) = f(w^{-1}yw^{-1}w) = hf_\alpha(w^{-1}yw)h^{-1}.$$

Soit donc  $f_{-\alpha} : U_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{H}$  le morphisme défini par

$$(*)_1 \quad f_{-\alpha}(y) = hf_\alpha(w^{-1}yw)h^{-1}.$$

C'est un morphisme de groupes. D'autre part,  $f$  est déterminé sur la grosse cellule  $\Omega$  par

$$f(ytx) = f_{-\alpha}(y)f_T(t)f_\alpha(x).$$

Cela montre l'unicité de  $f$ ; comme les conditions de l'énoncé sont manifestement nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes.

On a par (4)

$$hf_\alpha(u)h^{-1}h^2 = f_\alpha(-u)h^{-1}f_\alpha(-u).$$

Or, par (3) et (1),  $h^2 = h^{-2}$  commute à  $f_\alpha(-u)$ , ce qui donne

$$hf_\alpha(u)h^{-1} = f_\alpha(-u)hf_\alpha(-u).$$

Mais, par définition  $hf_\alpha(u)h^{-1} = f_{-\alpha}(uwu^{-1})$ ; d'après 3.7, comme  $u = \exp(X)$  et  $w = w_\alpha(X)$ , on a

$$(*)_2 \quad wuw^{-1} = -\tilde{u},$$

où  $\tilde{u}$  désigne l'élément apparié à  $u$ . On obtient donc :

$$(*)_3 \quad f_{-\alpha}(-\tilde{u}) = f_\alpha(-u)hf_\alpha(-u).$$

Soit maintenant  $t$  une section de  $T$  sur un  $S' \rightarrow S$  variable. Faisons opérer  $\text{int}(f_T(t))$  sur la formule précédente. On obtient au premier membre <sup>(37)</sup>

$$\begin{aligned} f_T(t)f_{-\alpha}(-\tilde{u})f_T(t)^{-1} &= f_T(t)hf_\alpha(u)h^{-1}f_T(t)^{-1} \\ &= h(h^{-1}f_T(t)h)f_\alpha(u)(h^{-1}f_T(t)^{-1}h)h^{-1} \\ &= hf_T(s_\alpha(t))f_\alpha(u)f_T(s_\alpha(t))^{-1}h^{-1} = hf_\alpha(\alpha(s_\alpha(t))u)h^{-1} \end{aligned}$$

par (2) et (1); puis comme  $s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})$  et  $\alpha \circ \alpha^* = 2$ , ceci égale

$$hf_\alpha(\alpha(t)^{-1}u)h^{-1}.$$

Enfin, par  $(*_1)$  et  $(*_2)$  on a

$$hf_\alpha(\alpha(t)^{-1}u)h^{-1} = f_{-\alpha}(\alpha(t)^{-1}uwu^{-1}) = f_{-\alpha}(-\alpha(t)^{-1}\tilde{u}).$$

Le second membre de  $(*_3)$  donne

$$f_\alpha(-\alpha(t)u) \cdot f_T(t)hf_T(t)^{-1}h^{-1} \cdot h \cdot f_\alpha(-\alpha(t)u)$$

et comme  $hf_T(t)^{-1}h^{-1} = f_T(s_\alpha(t^{-1})) = f_T(t \cdot \alpha^*(\alpha(t)))$ , ceci égale

$$f_\alpha(-\alpha(t)u) \cdot f_T(\alpha^*(\alpha(t))) \cdot h \cdot f_\alpha(-\alpha(t)u).$$

---

<sup>(37)</sup>N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

Comparant les deux expressions obtenues, on obtient

$$f_{-\alpha}(-\alpha(t)^{-1}\tilde{u}) = f_{\alpha}(-\alpha(t)u) \cdot f_{\Gamma}(\alpha^*(\alpha(t))) \cdot h \cdot f_{\alpha}(-\alpha(t)u).$$

Comme  $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$  est fidèlement plat et que  $H$  est un préfaisceau séparé, on peut remplacer  $-\alpha(t)^{-1}$  par une section quelconque de  $\mathbb{G}_{m,S}$  et on obtient le

**Lemme 6.2.1.** — *Pour tout  $z \in \mathbb{G}_m(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ , on a*

$$f_{-\alpha}(z\tilde{u}) = f_{\alpha}(z^{-1}u) \cdot f_{\Gamma}(\alpha^*(-z^{-1})) \cdot h \cdot f_{\alpha}(z^{-1}u).$$

83 Soient maintenant  $x, y \in \mathbb{G}_a(S')$ ,  $S' \rightarrow S$ ; supposons  $y$  et  $(1+xy)$  inversibles. Appliquant d'abord le lemme à  $z = y$ , on obtient <sup>(38)</sup>

$$f_{\alpha}(xu)f_{-\alpha}(y\tilde{u}) = f_{\alpha}((x+y^{-1})u) \cdot f_{\Gamma}(\alpha(-y^{-1})) \cdot h \cdot f_{\alpha}(y^{-1}u)$$

Or  $x+y^{-1} = y^{-1}(1+xy)$ . Appliquant le lemme à  $z = \frac{y}{1+xy}$ , on trouve

$$f_{\alpha}((x+y^{-1})u) = f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\tilde{u}\right) f_{\alpha}(-(x+y^{-1})u) \cdot h^{-1} \cdot f_{\Gamma}\left(\alpha^*\left(\frac{-y}{1+xy}\right)\right).$$

Reportant ceci dans l'égalité précédente, on obtient

$$f_{\alpha}(xu)f_{-\alpha}(y\tilde{u}) = f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}u\right) f_{\alpha}(-(x+y^{-1})u) \cdot h^{-1} \cdot f_{\Gamma}(\alpha^*(1+xy)^{-1}) \cdot h \cdot f_{\alpha}(y^{-1}u).$$

Comme  $h^{-1}f_{\Gamma}(t)h = f_{\Gamma}(s_{\alpha}(t))$  d'après (2) (noter que  $s_{\alpha}^2 = \text{id}$ ) et comme  $s_{\alpha} \circ \alpha^* = -\alpha^*$  (cf. 6.2.1), ceci égale

$$f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}u\right) f_{\alpha}(-(x+y^{-1})u) \cdot f_{\Gamma}(\alpha^*(1+xy)) \cdot f_{\alpha}(y^{-1}u).$$

Enfin, comme pour tous  $x' \in U_{\alpha}(S')$  et  $z \in \mathbb{G}_m(S')$  on a

$$f_{\alpha}(x')f_{\Gamma}(\alpha^*(z)) = f_{\Gamma}(\alpha^*(z))f_{\alpha}(z^{-2}x'),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(xu)f_{-\alpha}(y\tilde{u}) &= f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\tilde{u}\right) \cdot f_{\Gamma}(\alpha^*(1+xy)) \cdot f_{\alpha}\left(\left(\frac{-y^{-1}(1+xy)}{(1+xy)^2} + y^{-1}\right)u\right) \\ &= f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\tilde{u}\right) \cdot f_{\Gamma}(\alpha^*(1+xy)) \cdot f_{\alpha}\left(\frac{x}{1+xy}u\right). \end{aligned}$$

On a donc prouvé :

**Lemme 6.2.2.** — *Soit  $S' \rightarrow S$ . Si  $a \in U_{\alpha}(S')$ ,  $b \in U_{-\alpha}^{\times}(S')$ , et  $1+ab \in \mathbb{G}_m(S')$ , on a*

$$f_{\alpha}(a)f_{-\alpha}(b) = f_{-\alpha}\left(\frac{b}{1+ab}\right) f_{\Gamma}(\alpha^*(1+ab)) f_{\alpha}\left(\frac{a}{1+ab}\right).$$

<sup>(38)</sup>N.D.E. : On a détaillé les calculs qui suivent.

Par densité schématique, cette formule reste valable lorsque  $b \in U_{-\alpha}(S')$ ,  $1 + ab$  étant toujours inversible. Considérons alors le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow H$$

défini par  $f(ytx) = f_{-\alpha}(y)f_T(t)f_\alpha(x)$ .

84

Il résulte aussitôt de 6.2.2, de la condition 6.2 (i), et de la formule (F') de 2.4, que si  $g, g' \in \Omega(S')$  et  $gg' \in \Omega(S')$ , on a  $f(gg') = f(g)f(g')$ . Par Exp. XVIII 2.3 (iii) et 2.4<sup>(39)</sup>, il existe donc un morphisme de groupes  $G \rightarrow H$  prolongeant  $f$ . Notons-le aussi  $f$ ; il répond à la question; il suffit de prouver, en effet, que  $f(w_\alpha) = h$ . Or  $w_\alpha = u \cdot (-\tilde{u}) \cdot u$ , d'où, d'après (\*<sub>3</sub>) :<sup>(40)</sup>

$$f(w_\alpha) = f_\alpha(u)f_{-\alpha}(-\tilde{u})f_\alpha(u) = h.$$

**Remarque 6.3.** — Nous compléterons ces résultats en Exp. XXIII 3.5.

---

<sup>(39)</sup>N.D.E. : Noter que chaque fibre géométrique de  $G$  est connexe, par exemple d'après 1.1.

<sup>(40)</sup>N.D.E. : On a simplifié l'original en invoquant (\*<sub>3</sub>).