

EXPOSÉ XXIV

AUTOMORPHISMES DES GROUPES RÉDUCTIFS

par M. DEMAZURE

⁽⁰⁾ La première partie de cet exposé (n^{os} 1 à 5) est une conséquence directe de l'existence pour un groupe réductif de « suffisamment d'automorphismes extérieurs », résultat qui est une conséquence de la forme la plus faible du théorème d'isomorphisme des groupes épinglés. La seconde partie (n^{os} 6 et 7) expose deux applications des résultats plus précis de l'exposé précédent ; en particulier, le n^o 7 utilise le théorème de générateurs et relations sous sa forme explicite. Enfin, nous avons donné en appendice (n^o 8) des résultats de cohomologie « galoisienne » utilisés dans le texte. 323

Précisons nos notations cohomologiques : si S est un schéma et G un S -schéma en groupes, on notera $H^1(S, G)$ le premier ensemble de cohomologie de S à coefficients dans G , calculé pour la topologie (fpqc) ; c'est aussi l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux (fpqc) principaux homogènes sous G . On notera $H_{\text{ét}}^1(S, G)$ l'ensemble correspondant pour la topologie étale ; c'est donc la partie de $H^1(S, G)$ formée des classes de faisceaux homogènes sous G qui sont quasi-isotriviaux (= localement triviaux pour la topologie étale). On notera $\text{Fib}(S, G)$ la partie de $H^1(S, G)$ formée des classes de faisceaux représentables (fibrés principaux homogènes). On a donc les inclusions 324

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(S, G) &\subset H^1(S, G), \\ \text{Fib}(S, G) &\subset H^1(S, G). \end{aligned}$$

Si tout faisceau principal homogène sous G est représentable (par exemple si G est quasi-affine sur S , cf. SGA 1, VIII 7.9), on a donc $\text{Fib}(S, G) = H^1(S, G)$.

Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant pour la topologie (fpqc), on note $H^1(S'/S, G)$ le noyau de l'application canonique $H^1(S, G) \rightarrow H^1(S', G_{S'})$. On sait que $H^1(S'/S, G)$ peut se calculer de manière simpliciale (TDTE I, § A.4), ce qui implique que lorsque $S' \rightarrow S$ est couvrant pour la topologie étale, $H^1(S'/S, G)$ est aussi le noyau de $H_{\text{ét}}^1(S, G) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S', G_{S'})$.

⁽⁰⁾N.D.E. : Version du 13/10/2024

Enfin, suivant Exp. VIII, 4.5, on appelle « théorème 90 » l'assertion suivante : « tout faisceau principal homogène sous $\mathbb{G}_{m,S}$ est représentable et localement trivial », assertion équivalente à « $H^1(S, \mathbb{G}_{m,S}) = \text{Pic}(S)$ », ou encore à « $H^1(S, \mathbb{G}_{m,S}) = 0$ pour S local (ou plus généralement semi-local) ».

1. Schéma des automorphismes d'un groupe réductif

1.0. — Il convient d'abord de préciser certaines définitions de l'exposé précédent. Soient S un schéma non vide, G un S -groupe réductif, $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*, \Delta)$ une donnée radicielle réduite épinglée (Exp. XXIII 1.5). On appelle *épinglage de G de type \mathcal{R}* , ou *\mathcal{R} -épinglage de G* , la donnée :

- 325 (i) d'un isomorphisme de $D_S(M)$ sur un tore maximal T de G (ou, ce qui revient au même, d'un monomorphisme $D_S(M) \rightarrow G$ dont l'image soit un tore maximal T de G), identifiant R à un système de racines de G relativement à T (Exp. XIX, 3.6) et R^* à l'ensemble des coracines correspondantes,
- (ii) pour chaque $\alpha \in \Delta$, d'un $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$.

Pour que G possède un \mathcal{R} -épinglage, il faut et il suffit qu'il soit déployable et de type \mathcal{R} (Exp. XXII, 2.7).

Si $u : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de S -groupes réductifs, à tout \mathcal{R} -épinglage \mathcal{E} de G correspond par « transport de structure » un \mathcal{R} -épinglage $u(\mathcal{E})$ de G' . Si $v : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ est un isomorphisme de données radicielles épinglées, à tout \mathcal{R}' -épinglage \mathcal{E} de G' correspond par transport de structure un \mathcal{R} -épinglage $v(\mathcal{E})$ de G .

Appelons *groupe épinglé* un triplet $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ où G est un S -groupe réductif, \mathcal{R} une donnée radicielle réduite épinglée, et \mathcal{E} un épinglage de G de type \mathcal{R} . On appelle *isomorphisme* du groupe épinglé $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ sur le groupe épinglé $(G', \mathcal{R}', \mathcal{E}')$ un couple (u, v) où u est un isomorphisme $u : G \rightarrow G'$ et v un isomorphisme de données radicielles épinglées $v : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$, tels que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E}')$.⁽¹⁾

N. B. Si S est non vide, v est uniquement déterminé par u , et on dira aussi par abus de langage que u est un isomorphisme des groupes épinglés. En particulier, si $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ est un groupe épinglé, un automorphisme de $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ est donc un automorphisme u de G tel qu'il existe un automorphisme v de \mathcal{R} tel que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E})$; c'est donc un automorphisme de G , normalisant T , induisant sur T un automorphisme de la forme $D_S(h)$, où h est un automorphisme de M , et permutant entre eux les éléments X_α , $\alpha \in \Delta$. (Comme on le voit facilement, les conditions précédentes caractérisent d'ailleurs les automorphismes de $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$).

326

On a un foncteur contravariant évident

$$\Phi : (G, \mathcal{R}, \mathcal{E}) \mapsto \mathcal{R}, \quad (u, v) \mapsto v$$

et le résultat principal de l'exposé précédent (Exp. XXIII, 4.1) nous montre que c'est un foncteur pleinement fidèle (nous verrons d'ailleurs dans l'exposé suivant que c'est

⁽¹⁾N.D.E. : Donc $\text{Lie}(u)(X_{v(\alpha)}) = X'_\alpha$, pour tout $\alpha \in R'$.

une équivalence de catégories). Il s'ensuit en particulier que le groupe des automorphismes de $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de la donnée radicielle épinglée \mathcal{R} (cf. Exp. XXIII, 5.5).

1.1. — Soit S un schéma ; munissons $(\mathbf{Sch})/S$ de la topologie (fpqc) et considérons le S -faisceau en groupes $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, où G est un S -schéma en groupes. On a une suite exacte de S -faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow \underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow G \xrightarrow{\text{int}} \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$$

qui définit un monomorphisme

$$j : G / \underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G).$$

Le faisceau image de j est le faisceau des automorphismes intérieurs de G ; pour qu'un automorphisme u de G soit intérieur, il faut et il suffit qu'il existe une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ et pour chaque i un $g_i \in G(S_i)$ tel que $\text{int}(g_i) = u_{S_i}$. Dans ce cas, si v est un autre automorphisme de G , on voit aussitôt que $\text{int}(v)u = vuv^{-1}$ est l'automorphisme intérieur défini par la famille $g'_i = v(g_i)$. Il s'ensuit que l'image de j est distinguée dans $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$. Le faisceau en groupes quotient, noté $\underline{\text{Autext}}(G)$, est le faisceau des automorphismes extérieurs de G . On a donc une suite exacte

327

$$1 \longrightarrow G / \underline{\text{Centr}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1.$$

Les définitions précédentes sont toutes compatibles avec les changements de base. Elles sont naturellement valables dans tout site.

1.2. — Soient S un schéma et $(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ un S -groupe réductif épinglé. Soit E le groupe (abstrait) des automorphismes de la donnée radicielle épinglée \mathcal{R} , i.e. le groupe des automorphismes de \mathcal{R} normalisant Δ . Par Exp. XXIII, 5.5, on a un monomorphisme canonique

$$E \longrightarrow \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G)$$

qui associe à $h \in E$ l'unique automorphisme u du groupe épinglé G tel que $\Phi(u) = h$. Ce monomorphisme définit canoniquement un monomorphisme de faisceaux

$$(*) \quad a : E_S \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G).$$

Pour qu'un automorphisme u de G soit une section du faisceau image de a , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) u normalise T . On sait alors que u permute les racines de G relativement à T . Si $\alpha \in R$, alors $u(\alpha) : t \mapsto \alpha(u^{-1}(t))$ est donc localement sur S de la forme $t \mapsto \beta(t)$, avec $\beta \in R$. La seconde condition s'écrit alors comme suit :

(ii) Si $\alpha \in \Delta$ et si U est un ouvert de S tel que $u(\alpha)_U \in R$, alors $u(\alpha)_U \in \Delta$ et

328

$$\mathcal{L}ie(u_U)(X_\alpha)_U = (X_{u(\alpha)})_U.$$

Il résulte aussitôt des définitions que les sections de $a(E_S)$ normalisent les sous-groupes de G définis par l'épinglage : T, B, B^-, U, U^- .

Ces définitions posées, on a :

Théorème 1.3. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif. Considérons la suite exacte canonique de S -faisceaux en groupes ⁽²⁾

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \xrightarrow{p} \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow 1.$$

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est représentable par un S -schéma lisse et séparé.

(ii) $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ est représentable par un S -schéma constant tordu à engendrement fini (Exp. X, 5.1).

(iii) Si G est déployable, la suite exacte précédente est scindée. Plus précisément, pour tout épingleage de G , le morphisme (cf. 1.2 (*))

$$p \circ a : E_S \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G)$$

est un isomorphisme.

Montrons d'abord comment le théorème se déduit du lemme suivant :

Lemme 1.4. — Sous les hypothèses de (iii), $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est le produit semi-direct $a(E_S) \cdot \mathrm{ad}(G)$. ⁽³⁾

329 Le lemme entraîne aussitôt le théorème lorsque G est déployable. Comme G est localement déployable pour la topologie étale (Exp. XXII, 2.3), donc aussi pour la topologie (fppf), et que celle-ci est « de descente effective » pour la catégorie fibrée des morphismes constants tordus (Exp. X, 5.5), on en déduit (ii) dans le cas général (cf. Exp. IV, 4.6.8). Pour en déduire (i), on remarque que $\mathrm{ad}(G)$ est affine sur S , donc le morphisme p affine lorsque $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est représentable, et on conclut par descente des schémas affines. ⁽⁴⁾

Il ne nous reste donc qu'à prouver 1.4. Pour ce faire, il suffit de prouver :

Lemme 1.5. — Si $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ et $(\mathcal{R}', \mathcal{E}')$ sont deux épingleages du S -groupe réductif G , il existe un unique automorphisme intérieur u de G sur S transformant un épingleage en l'autre (i.e. tel qu'il existe $v : \mathcal{R}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ tel que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E}')$, cf. 1.0).

1.5.1. Unicité. — Il suffit de prouver que si G est un S -groupe épinglé et si $\mathrm{int}(g)$ est un automorphisme de groupe épinglé ($g \in G(S)$), alors $\mathrm{int}(g) = \mathrm{id}$. Or on a d'abord $\mathrm{int}(g)T = T$, $\mathrm{int}(g)B = B$, donc $g \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_G(B)(S) = T(S)$ (cf. par exemple Exp. XXII, 5.6.1). Il s'ensuit que $\mathrm{int}(g)$ normalise chaque U_α et que

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{int}(g))X_\alpha = \mathrm{Ad}(g)X_\alpha = \alpha(g)X_\alpha$$

pour tout $\alpha \in \Delta$. On a donc $\alpha(g) = 1$ pour $\alpha \in \Delta$, donc $g \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} (\mathrm{Ker} \alpha)(S) = \underline{\mathrm{Centr}}(G)(S)$ (Exp. XXII, 4.1.8). C.Q.F.D.

⁽²⁾N.D.E. : On rappelle que $\mathrm{ad}(G) = G/\underline{\mathrm{Centr}}(G)$ désigne le groupe adjoint de G , cf. XXII 4.3.6.

⁽³⁾N.D.E. : On a remplacé ici et dans la suite la notation $\mathrm{int}(G)$ par $\mathrm{ad}(G)$.

⁽⁴⁾N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 2.1.

1.5.2. Existence. — Il suffit de la prouver localement pour la topologie (fpqc). Soient

$$(T, M, R, \Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) \quad \text{et} \quad (T', M', R', \Delta', (X'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'})$$

les deux épingleages. Par conjugaison des tores maximaux, on peut supposer $T = T'$. Quitte à restreindre S , on peut supposer que l'isomorphisme $D_S(M) \simeq D_S(M')$ provient d'un isomorphisme $M \simeq M'$ transportant R sur R' , et on est ramené à la situation $T = T'$, $M = M'$, $R = R'$. Comme les systèmes de racines simples sont conjugués par le groupe de Weyl (Exp. XXI, 3.3.7), on peut également supposer $\Delta = \Delta'$. Il existe alors pour chaque $\alpha \in \Delta$ un scalaire $z_\alpha \in \mathbb{G}_m(S)$ tel que $X'_\alpha = z_\alpha X_\alpha$, et il suffit de construire localement pour (fpqc) une section t de T telle que $\alpha(t) = z_\alpha$ pour chaque $\alpha \in \Delta$. Mais le morphisme $T \rightarrow (\mathbb{G}_{m,S})^\Delta$ de composantes $\{\alpha, \alpha \in \Delta\}$ est le dual d'une injection $\mathbb{Z}^\Delta \rightarrow M$, donc est fidèlement plat, ce qui achève la démonstration de 1.5.2 et donc de 1.3. 330

Corollaire 1.6. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est affine (resp. de type fini, resp. de présentation finie, resp. quasi-compact) sur S .
- (ii) $\underline{\text{Autext}}(G)$ est fini sur S .
- (iii) Pour tout $s \in S$, on a $\text{rgred}(G_s) - \text{rgss}(G_s) \leq 1$.

En effet, comme $\text{ad}(G)$ est affine, plat et de présentation finie sur S , le morphisme $p : \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \rightarrow \underline{\text{Autext}}(G)$ est affine, fidèlement plat et de présentation finie.

Si $\underline{\text{Autext}}(G)$ est fini sur S , il est affine sur S , donc aussi $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, ce qui prouve (ii) \Rightarrow (i). Si $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est quasi-compact sur S , il est de présentation finie sur S (étant de toute façon localement de présentation finie et séparé sur S) ; par Exp. V, 9.1, $\underline{\text{Autext}}(G)$ est alors de présentation finie sur S , donc fini, ce qui prouve (i) \Rightarrow (ii). Enfin, pour prouver l'équivalence de (ii) et (iii), on peut supposer G déployé, et on est ramené à Exp. XXI, 6.7.8. 331

Corollaire 1.7. — Soient S un schéma et G un S -groupe réductif. Alors, on a $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)^0 \simeq \text{ad}(G)$.

Corollaire 1.8. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, H un S -schéma en groupes lisse, affine et à fibres connexes sur S . Alors le S -foncteur

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$$

est représentable par un S -schéma lisse et séparé (qui est affine sur S si G est semi-simple).

En effet, soit U l'ensemble des points s de S tels que $H_{\bar{s}}$ soit réductif ; c'est un ouvert (Exp. XIX, 2.6) ; si S' est un S -schéma, $H_{S'}$ est réductif si et seulement si $S' \rightarrow S$ se factorise par U . Il s'ensuit que le morphisme canonique $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \rightarrow S$ se factorise par U . On peut donc supposer $S = U$ et on est ramené à :

Corollaire 1.9. — Soient S un schéma, G et G' deux S -groupes réductifs. Alors

$$F = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$$

est représentable par un S -schéma lisse et séparé (affine si G ou G' est semi-simple).

332 De plus, S se décompose en somme de deux sous-schémas ouverts S_1 et S_2 tels que $F_{S_1} = \emptyset$ et que F_{S_2} soit un fibré principal homogène à gauche (resp. droite) sous $\underline{\text{Aut}}_{S_2\text{-gr.}}(G'_{S_2})$ (resp. $\underline{\text{Aut}}_{S_2\text{-gr.}}(G_{S_2})$).

En effet, soit S_2 l'ensemble des points de S où G et G' sont de même type, et soit S_1 son complémentaire.

Comme le type d'un groupe réductif est une fonction localement constante, S_1 et S_2 sont ouverts. Il est clair que $F_{S_1} = \emptyset$, et on peut supposer $S = S_2$. Par Exp. XXIII, 5.6, F est un faisceau principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale. Il s'ensuit que $F_0 = F/\text{ad}(G)$ est un faisceau principal homogène sous $\underline{\text{Autext}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale, donc représentable (Exp. X, 5.5). Comme $\text{ad}(G)$ est affine, F est donc aussi représentable.

Remarquons qu'en cours de démonstration, on a obtenu :

Corollaire 1.10. — Soient S un schéma, G et G' deux S -groupes réductifs de même type en chaque $s \in S$. Alors $\text{ad}(G)$ opère librement (à droite) dans $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$, le faisceau quotient

$$\underline{\text{Isomext}}(G, G') = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')/\text{ad}(G)$$

est représentable par un S -schéma constant tordu, qui est un fibré principal homogène sous $\underline{\text{Autext}}(G)$ (et qui est donc fini sur S si G est semi-simple). De plus, l'isomorphisme

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') \simeq \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G', G)$$

défini par $u \mapsto u^{-1}$ induit un isomorphisme

$$\underline{\text{Isomext}}(G, G') \simeq \underline{\text{Isomext}}(G', G).$$

333 **Remarque 1.11.** — Si $\underline{\text{Isomext}}(G, G')(S) \neq \emptyset$, on dit que G est une forme tordue intérieure de G' ; alors G' est une forme tordue intérieure de G ; on peut alors réduire le groupe structural de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ à $\text{ad}(G)$. Plus précisément, soit $u \in \underline{\text{Isomext}}(G, G')(S)$, considéré comme une section $u : S \rightarrow \underline{\text{Isomext}}(G, G')$. Notons

$$\underline{\text{Isomint}}_u(G, G')$$

l'image réciproque par le morphisme canonique $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G') \rightarrow \underline{\text{Isomext}}(G, G')$ du sous-schéma fermé de $\underline{\text{Isomext}}(G, G')$ image de u . L'opération naturelle de $\text{ad}(G)$ sur $\underline{\text{Isomint}}_u(G, G')$ munit ce schéma d'une structure de fibré principal homogène; par extension du groupe structural⁽⁵⁾ $\text{ad}(G) \rightarrow \underline{\text{Aut}}(G)$, $\underline{\text{Isomint}}_u(G, G')$ redonne $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$.

Par le lemme de Hensel (Exp. XI, 1.11), 1.8 donne aussitôt :

⁽⁵⁾N.D.E. : On a corrigé $\text{ad}(G) \rightarrow \underline{\text{Autext}}(G)$ en $\text{ad}(G) \rightarrow \underline{\text{Aut}}(G)$.

Corollaire 1.12. — Soient S un schéma local hensélien, G un S -groupe réductif, G' un S -groupe lisse affine à fibres connexes, s le point fermé de S . Si G_s et G'_s sont des $\kappa(s)$ -groupes algébriques isomorphes, G et G' sont isomorphes. Plus précisément, tout $\kappa(s)$ -isomorphisme $G_s \simeq G'_s$ provient d'un S -isomorphisme $G \simeq G'$.

Appliquant maintenant 1.7 (resp. 1.12) au schéma des nombres duals sur un corps, on déduit de Exp. III, 2.10 (resp. 3.10) le point (i) (resp. (ii)) du corollaire suivant.

Corollaire 1.13. — Soient k un corps et G un k -groupe réductif.

- (i) Si G est adjoint, on a $H^1(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = 0$.⁽⁶⁾
- (ii) On a $H^2(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = 0$.

Remarque 1.14. — (i) L'assertion concernant le H^1 était connue (Chevalley); celle concernant le H^2 a été démontrée dans la plupart des cas de la classification par Chevalley. 334

(ii) En fait, la conjonction de 1.13 et du théorème d'unicité sur un corps algébriquement clos est essentiellement équivalente au théorème d'unicité. Une démonstration directe de 1.13 donnerait donc une manière de déduire le théorème d'unicité général du théorème d'unicité de Chevalley sur un corps.

L'existence de groupes réductifs de tous les types sur tous les schémas (Exp. XXV) montre que les obstructions au relèvement d'un k -groupe réductif G au-dessus des anneaux artiniens à corps résiduel k (qui par Exp. III, 3.8 sont des éléments de

$$H^3(G, \mathcal{L}ie(G/k) \otimes V) \simeq H^3(G, \mathcal{L}ie(G/k)) \otimes V,$$

où V est un certain k -espace vectoriel (muni de l'action triviale de G)) sont nulles. Ceci semble suggérer que $H^3(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = 0$. Là encore, une démonstration directe de ce fait (s'il est vrai) donnerait sans doute une manière de déduire le théorème d'existence général du théorème d'existence sur un corps (Tôhoku de Chevalley).

Corollaire 1.15. — Soient k un corps,⁽⁷⁾ G un k -groupe réductif. Considérons k comme G -module trivial. Alors

$$H^1(G, k) = H^2(G, k) = 0.$$

⁽⁸⁾ Comme $H^i(G_{\bar{k}}, \bar{k}) = H^i(G, k) \otimes \bar{k}$, on peut supposer k algébriquement clos. Un élément de $H^1(G, k)$ n'est autre qu'un morphisme de k -groupes $\phi : G \rightarrow \mathbb{G}_{a, k}$. Alors $\phi(G) = G / \text{Ker}(\phi)$ est un sous-groupe lisse, connexe et réductif (cf. XIX 1.7) de $\mathbb{G}_{a, k}$, donc trivial. Donc $H^1(G, k) = 0$.

⁽⁶⁾N.D.E. : On a corrigé l'original, qui énonçait (i) sans supposer G adjoint. D'après la caractérisation des $H^i(G, -)$ comme foncteurs dérivés de $\text{Hom}_G(k, -)$ (Exp. I, 5.3.1, voir aussi [Ja87], I 4.16), on a $H^i(G, V) = \text{Ext}_G^i(k, V)$ pour tout G -module V ; or si $\text{car}(k) = p > 0$ et si $G = \text{SL}_{p, k}$, alors $\mathcal{L}ie(\text{GL}_p/k)$ est une extension non triviale de k par $\mathfrak{g} = \mathcal{L}ie(\text{SL}_p/k)$, donc $H^1(G, \mathfrak{g}) \neq 0$. Voir aussi l'ajout 1.15.1 ci-dessous.

⁽⁷⁾N.D.E. : On a remplacé « schéma » par « corps ».

⁽⁸⁾N.D.E. : En raison de la correction effectuée dans 1.13, on a donné une autre démonstration dans le cas de H^1 . D'autre part, il résulte d'un théorème de G. Kempf que $H^i(G, k) = 0$ pour tout $i > 0$, cf. [Ja87], II 4.5 et 4.11.

Considérons maintenant le k -groupe réductif $H = G \times_k \mathbb{G}_{m,k}$. On a $\mathcal{L}ie(H/k) = \mathcal{L}ie(G/k) \oplus k$, décomposition stable sous H . Pour un H -module quelconque V , on a

$$H^i(H, V) = H^i(G, H^0(\mathbb{G}_{m,k}, V))$$

(cela résulte de la caractérisation des $H^i(H, -)$ comme foncteurs dérivés de $H^0(H, -) = H^0(G, H^0(\mathbb{G}_{m,k}, -))$, et du fait que le foncteur $H^0(\mathbb{G}_{m,k}, -)$ est exact, cf. Exp. I, 5.3.1 et 5.3.3). En particulier, on a pour tout i

$$H^i(H, \mathcal{L}ie(H/k)) = H^i(G, \mathcal{L}ie(G/k)) \oplus H^i(G, k)$$

d'où $H^2(G, k) = 0$ en appliquant 1.13 (ii) au groupe réductif H .

Corollaire 1.15.1. — ⁽⁹⁾ Soient k un corps, G un k -groupe réductif, Z son centre et $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ le type de G . Alors on a

$$H^1(G, \mathcal{L}ie(G/k)) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M/\Gamma_0(R), k).$$

En particulier, $H^1(G, \mathcal{L}ie(G/k)) = 0$ si et seulement si Z est lisse sur k .

En effet, soit \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{z} , resp. \mathfrak{g}_{ad}) l'algèbre de Lie de G (resp. Z , resp. $G_{\text{ad}} = G/Z$). Il résulte de 1.15 (et de sa démonstration) que

$$H^1(G, \mathfrak{g}) = H^1(G_{\text{ad}}, \mathfrak{g}) \simeq H^1(G_{\text{ad}}, \mathfrak{g}/\mathfrak{z}).$$

Posons $C = \text{Coker}(\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_{\text{ad}})$; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\text{ad}} \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Comme $H^1(G_{\text{ad}}, \mathfrak{g}_{\text{ad}}) = 0$ (1.13) et $H^0(G_{\text{ad}}, \mathfrak{g}_{\text{ad}}) = 0$ (cf. Exp. II, 5.2.3), on obtient

$$H^1(G_{\text{ad}}, \mathfrak{g}/\mathfrak{z}) \simeq H^0(G_{\text{ad}}, C).$$

Pour calculer le terme de droite, on peut supposer k algébriquement clos. Soit (G, T, M, R) un déploiement de G ; alors $Z = D_k(M/\Gamma_0(R))$ et C s'identifie à

$$\text{Coker}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, k) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_0(R), k)) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M/\Gamma_0(R), k),$$

muni de l'action triviale de G_{ad} . Le corollaire en découle, puisque Z est non lisse sur k si et seulement si $\text{car}(k) = p > 0$ et $M/\Gamma_0(R)$ possède de la p -torsion (Exp. IX, 2.1).

Définition 1.16. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif. On appelle *forme* de G sur S un S -schéma en groupes G' localement isomorphe à G pour la topologie (fpqc) (il revient au même de dire (cf. Exp. XXIII, 5.6), que G' est localement isomorphe à G pour la topologie étale, ou encore que G' est un S -groupe réductif de même type que G en chaque point de S).

Corollaire 1.17. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif.

(i) Le foncteur

$$G' \longmapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$$

est une équivalence entre la catégorie des formes de G sur S et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$.

⁽⁹⁾N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, tiré de remarques de O. Gabber, qui précise 1.13 (i).

(ii) Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant, formes de G trivialisées par S' et fibrés trivialisés par S' se correspondent.

(iii) Tout faisceau principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$ est représentable et quasi-isotrivial (c.-à-d., localement trivial pour la topologie étale).

La première assertion est formelle dans la catégorie des faisceaux (pour (fpqc) par exemple). D'autre part, tout faisceau localement isomorphe à G (pour (fpqc)) est représentable (car G est affine sur S) et localement isomorphe à G pour la topologie étale. Enfin, pour toute forme G' de G , le S -faisceau $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ est représentable, d'après 1.8. Le corollaire en résulte aussitôt.

Corollaire 1.18. — L'ensemble des classes d'isomorphisme de formes du groupe réductif G sur S est isomorphe à

$$H^1(S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)) = H^1_{\text{ét}}(S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)) = \text{Fib}(S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)).$$

Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des formes trivialisées par S' est isomorphe à $H^1(S'/S, \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G))$. 336

Corollaire 1.19. — Soient S un schéma, \mathcal{R} une donnée radicielle réduite épinglée telle que $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ ⁽¹⁰⁾ existe (condition automatiquement vérifiée, cf. Exp. XXV). Notons

$$A_S(\mathcal{R}) = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R})) = \text{ad}(\text{Ép}_S(\mathcal{R})) \cdot E(\mathcal{R})_S.$$

(i) L'ensemble des classes d'isomorphisme de S -groupes réductifs de type \mathcal{R} (Exp. XXII, 2.7) est isomorphe (d'après Exp. XXIII, 5.12) à

$$H^1(S, A_S(\mathcal{R})) = H^1_{\text{ét}}(S, A_S(\mathcal{R})) = \text{Fib}(S, A_S(\mathcal{R})).$$

(ii) Si $S' \rightarrow S$ est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des classes de groupes déployables sur S' est isomorphe à $H^1(S'/S, A_S(\mathcal{R}))$.

Remarque 1.20. — Avec les notations précédentes, à tout S -groupe réductif de type \mathcal{R} est associé canoniquement un fibré principal homogène à droite sous $A_S(\mathcal{R})$:

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), G) = P.$$

Remarquons que P s'interprète comme le « schéma des épinglages de G de type \mathcal{R} » (cf. 1.0). D'ailleurs P est également un fibré principal homogène (à gauche) sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, structure qui apparaît aussitôt dans la description ci-dessus.

Proposition 1.21. — Soient S un schéma local hensélien, s son point fermé. Le foncteur

$$G \mapsto G_s$$

induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de S -groupes réductifs sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\kappa(s)$ -groupes réductifs. 337

En particulier, pour tout S -groupe réductif G , il existe un morphisme étale fini surjectif $S' \rightarrow S$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

⁽¹⁰⁾N.D.E. : cf. XXIII, Définition 5.11.

Utilisant l'existence des $\acute{E}p_S(\mathcal{R})$ (Exp. XXV), on est ramené à prouver que si on note $H = A_S(\mathcal{R})$, l'application canonique

$$\text{Fib}(S, H) \longrightarrow \text{Fib}(\kappa(s), H_s)$$

est bijective (et que tout élément de $\text{Fib}(S, H)$ a la propriété indiquée ci-dessus). Or, toute partie finie de H est contenue dans un ouvert affine (c'est en effet trivial pour un groupe constant, et H est affine au-dessus d'un groupe constant); on peut donc utiliser le résultat démontré en appendice (8.1).

2. Automorphismes et sous-groupes

Introduisons une notation : si $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, et si X est un sous-foncteur de G , on note

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, X) = \underline{\text{Norm}}_H(X), \quad \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, \text{id}_X) = \underline{\text{Centr}}_H(X).$$

Si Y est un second sous-foncteur de G , on définit de même $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, X, Y) = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, X) \cap \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, Y)$, et si G' est un second S -groupe et X' un sous-foncteur de G , on note $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, X; G', X')$ le sous-foncteur de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ défini par : pour tout $S' \rightarrow S$,

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, X; G', X')(S') = \{u \in \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')(S') \mid u(X_{S'}) = X'_{S'}\}$$

et l'on définit de même $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, X, Y; G', X', Y')$, etc. ⁽¹¹⁾

338 Proposition 2.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G (resp. B un sous-groupe de Borel de G , resp. $B \supset T$ un couple de Killing de G). Notons T^{ad} (resp. B^{ad}) le tore maximal (resp. le sous-groupe de Borel) de $\text{ad}(G)$ correspondant à T (resp. B) :

$$\begin{aligned} B^{\text{ad}} &\simeq B / \underline{\text{Centr}}(G) = B / \underline{\text{Centr}}(B), \\ T^{\text{ad}} &\simeq T / \underline{\text{Centr}}(G). \end{aligned}$$

Alors $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$ (resp. $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B)$, resp. $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)$) est représentable par un sous-schéma fermé de $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$, lisse sur S , et la suite exacte du théorème 1.3 induit des suites exactes :

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1; \\ 1 &\longrightarrow B^{\text{ad}} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1; \\ 1 &\longrightarrow T^{\text{ad}} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T) \longrightarrow \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Par descente des sous-schémas fermés, ⁽¹²⁾ on se ramène aussitôt au cas où G est épinglé et où $B \supset T$ est son couple de Killing canonique (cf. Exp. XXII, 5.5.5 (iv)). Comme le groupe E de 1.2 normalise B et T , le résultat se déduit aussitôt des théorèmes de normalisation dans $\text{ad}(G)$ (Exp. XXII, 5.3.12 et 5.6.1).

⁽¹¹⁾N.D.E. : On a explicité les définitions précédentes (l'original indiquait « On définit de même $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, X, Y)$, ..., $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, X; G', X')$, ... »).

⁽¹²⁾N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 1.9.

Utilisant maintenant les théorèmes de conjugaison (cf. Exp. XXIII, 5.12), et raisonnant comme au n°1, on en déduit :

Corollaire 2.2. — Soient S un schéma, G et G' deux S -groupes réductifs de même type en chaque point. Soit $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G').

(i) Le S -foncteur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T')$ est représentable par un sous-schéma fermé lisse de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$. 339

De plus, $\underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}})$ opère librement sur ce schéma, et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T') / \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \simeq \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

(ii) Le S -foncteur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B; G', B')$ est représentable par un sous-schéma fermé lisse de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B)$.

De plus, B^{ad} opère librement sur ce schéma et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B; G', B') / B^{\text{ad}} \simeq \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

(iii) Le S -foncteur $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T')$ est représentable par un sous-schéma fermé lisse de $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G')$, principal homogène sous $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)$.

De plus, T^{ad} opère librement sur ce schéma et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T') / T^{\text{ad}} \simeq \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

Raisonnant encore comme au n°1, on en déduit :

Corollaire 2.3. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . Le foncteur

$$(G', T') \longmapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, T; G', T'),$$

resp.

$$(G', B') \longmapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B; G', B'),$$

resp.

$$(G', B', T') \longmapsto \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T'),$$

est une équivalence entre la catégorie des couples (G', T') (resp. des couples (G', B') , resp. des triplets (G', B', T')), où G' est une forme de G et T' un tore maximal de G' (resp. B' un sous-groupe de Borel de G' , resp. $B' \supset T'$ un couple de Killing de G'), et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous le S -groupe H , où $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)$ (resp. $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B)$, resp. $H = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B, T)$). 340

De plus, tout faisceau principal homogène sous H est représentable et quasi-isotrivial, de sorte qu'on a

$$H^1(S, H) = H_{\text{ét}}^1(S, H) = \text{Fib}(S, H).$$

Remarque 2.4. — Sous les conditions de 2.2, le morphisme noté ensemblistement $u \mapsto u(\mathbb{T})$ (resp. $u \mapsto u(\mathbb{B})$, resp. $u \mapsto (u(\mathbb{B}), u(\mathbb{T}))$) induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} & \underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{G}') / \underline{\text{Aut}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \simeq \underline{\text{Tor}}(\mathbb{G}') \\ \text{resp.} & \quad \underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{G}') / \underline{\text{Aut}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{B}) \simeq \underline{\text{Bor}}(\mathbb{G}'), \\ \text{resp.} & \quad \underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{G}') / \underline{\text{Aut}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{B}, \mathbb{T}) \simeq \underline{\text{Kil}}(\mathbb{G}'). \end{aligned}$$

La démonstration est immédiate : il suffit de la faire localement pour (fpqc), on peut donc supposer $\mathbb{G} \simeq \mathbb{G}'$, et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii).

Remarque 2.5. — Les résultats précédents s'interprètent aussitôt en termes de restriction du groupe structural : si \mathbb{G}' est une forme de \mathbb{G} , correspondant au fibré principal $\underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{G}')$, se donner une restriction du groupe structural de ce fibré à $\underline{\text{Aut}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ revient à se donner un tore maximal \mathbb{T}' de \mathbb{G}' , les bijections suggérées ci-dessus étant celle de 2.4 d'une part, l'application $\mathbb{T}' \mapsto \underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{T}; \mathbb{G}', \mathbb{T}')$ d'autre part. De même pour sous-groupes de Borel et couples de Killing.

Proposition 2.6. — Soient \mathbb{S} un schéma, \mathbb{G} et \mathbb{G}' deux \mathbb{S} -groupes réductifs de même type en chaque point, \mathbb{T} (resp. \mathbb{T}') un tore maximal de \mathbb{G} (resp. \mathbb{G}'). Alors \mathbb{T}^{ad} opère librement sur $\underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{T}; \mathbb{G}', \mathbb{T}')$, le quotient

$$\mathbb{P} = \underline{\text{Isom}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{T}; \mathbb{G}', \mathbb{T}') / \mathbb{T}^{\text{ad}}$$

est représentable ; c'est un fibré principal homogène sous

$$\mathbb{A} = \underline{\text{Aut}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{T}) / \mathbb{T}^{\text{ad}},$$

où \mathbb{A} est représentable par un \mathbb{S} -schéma constant tordu, extension de $\underline{\text{Autext}}(\mathbb{G})$ par $\mathbb{W}_{\text{ad}(\mathbb{G})}(\mathbb{T}^{\text{ad}}) = \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(\mathbb{G})}(\mathbb{T}^{\text{ad}}) / \mathbb{T}^{\text{ad}}$. De plus, si on fait opérer \mathbb{A} sur \mathbb{T} de la manière évidente, le fibré associé à \mathbb{P} n'est autre que \mathbb{T}' .⁽¹³⁾

La première partie de la proposition résulte aussitôt des résultats précédents. Pour prouver la seconde, on remarque qu'il y a un morphisme évident $\mathbb{P} \times_{\mathbb{S}} \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ (défini par $(u, t) \mapsto u(t)$) ; pour démontrer qu'après passage au quotient par \mathbb{A} il induit un isomorphisme, on peut encore une fois supposer $(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \simeq (\mathbb{G}', \mathbb{T}')$, auquel cas c'est immédiat.

De manière absolument semblable, on a :

Proposition 2.7. — Soient \mathbb{S} un schéma, \mathbb{G} et \mathbb{G}' deux \mathbb{S} -groupes réductifs de même type en chaque point, $\mathbb{B} \supset \mathbb{T}$ (resp. $\mathbb{B}' \supset \mathbb{T}'$) un couple de Killing de \mathbb{G} (resp. \mathbb{G}'). Si on fait opérer $\underline{\text{Aut}}_{\mathbb{S}\text{-gr.}}(\mathbb{G}, \mathbb{B}, \mathbb{T}) / \mathbb{T}^{\text{ad}} \simeq \underline{\text{Autext}}(\mathbb{G})$ de la manière évidente sur \mathbb{T} , le fibré associé à $\underline{\text{Isomext}}(\mathbb{G}, \mathbb{G}')$ n'est autre que \mathbb{T}' .

Corollaire 2.8. — Soient \mathbb{G} et \mathbb{G}' deux \mathbb{S} -groupes réductifs qui sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre ; soit $\mathbb{B} \supset \mathbb{T}$ (resp. $\mathbb{B}' \supset \mathbb{T}'$) un couple de Killing de \mathbb{G}

⁽¹³⁾N.D.E. : Donc, si \mathbb{P} possède une section, alors \mathbb{T} et \mathbb{T}' sont isomorphes ; en particulier $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{T}'_{\mathbb{P}}$ sont isomorphes. Voir l'ajout 4.5.1 où cette remarque est développée dans le cas où $\mathbb{G}' = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\mathbb{S}}(\mathcal{R})$.

(resp. G'). Alors T et T' sont isomorphes⁽¹⁴⁾.

Remarque 2.9. — Il n'est pas vrai en général que B et B' soient isomorphes ; ce sont cependant des formes tordues intérieures l'un de l'autre (cf. n°5).

On peut développer des variantes « Isomint »⁽¹⁵⁾ des résultats précédents. Signalons-en une :

Proposition 2.10. — Soient S un schéma, G et G' deux S -groupes réductifs de même type en chaque point, $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G'). Soit $u \in \text{Isomext}(G, G')(S)$; considérons

$$\text{Isomint}_u(G, B, T; G', B', T') = \text{Isom}_{S\text{-gr.}}(G, B, T; G', B', T') \cap \text{Isomint}_u(G, G').$$

C'est un S -schéma lisse et affine qui est un fibré principal homogène sous T^{ad} . En particulier, $\text{Isomint}_u(G, B, T; G', B', T')(S) \neq \emptyset$ si et seulement si l'élément correspondant de $H^1(S, T^{\text{ad}})$ est nul.

Pour terminer ce numéro, démontrons deux résultats qui nous seront utiles par la suite :

Proposition 2.11. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G . Le morphisme évident

$$T^{\text{ad}} \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G, \text{id}_T)$$

est un isomorphisme.

Cela résulte des énoncés précédents ; d'ailleurs, on a donné une démonstration directe au cours de la preuve de 1.5.2.

Corollaire 2.12. — Sous les conditions précédentes, il existe une équivalence entre la catégorie des couples (G', f) , où G' est une forme de G et f un isomorphisme de T sur un tore maximal de G' , et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous T^{ad} . 343

Corollaire 2.13. — Si $H^1(S, T^{\text{ad}}) = 0$, et si G' est une forme de G possédant un tore maximal isomorphe à T , alors G' est isomorphe à G .

Corollaire 2.14. — Soient S un schéma tel que $\text{Pic}(S) = 0$, et G un S -groupe réductif de type constant. Pour que G soit déployable, il faut et il suffit que G possède un tore maximal déployé.

Soient G un groupe réductif, $\text{rad}(G)$ son radical (Exp. XXII, 4.3.9) ; comme $\text{rad}(G)$ est central et caractéristique dans G , on a un morphisme canonique

$$q : \text{Autext}(G) \longrightarrow \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(\text{rad}(G)).$$

⁽¹⁴⁾N.D.E. : d'après 2.7, puisque $\text{Isomext}(G, G')$ possède une section (cf. la N.D.E. précédente).

⁽¹⁵⁾N.D.E. : Rappelons que $\text{Isomint}_u(G, G')$ est défini en 1.11.

Proposition 2.15. — Soit G un S -groupe réductif. La suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, \mathrm{id}_{\mathrm{rad}(G)}) \xrightarrow{p} \underline{\mathrm{Autext}}(G) \xrightarrow{q} \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\mathrm{rad}(G))$$

et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$ est un sous-schéma ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$, fini sur S .

On peut supposer G déployé. La première assertion est immédiate; la seconde résulte de Exp. XXI, 6.7.5 et 6.7.7.

Notant $H = \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, \mathrm{id}_{\mathrm{rad}(G)})$, on en déduit :

Corollaire 2.16. — Il existe une équivalence entre la catégorie des couples (G', f) , où G' est une forme de G et f un isomorphisme de $\mathrm{rad}(G)$ sur le radical de G' , et la catégorie des fibrés principaux sous un certain S -schéma en groupes H , où H est tel qu'il existe une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(G) \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 1,$$

où le S -groupe F est étale et fini sur S .

3. Schéma de Dynkin d'un groupe réductif. Groupes quasi-déployés

3.1. — On rappelle (Exp. XXI, 7.4.1) qu'un *diagramme de Dynkin* est un ensemble fini muni de la structure définie par un ensemble de couples d'éléments distincts (liaisons) et d'une application dans $\{1, 2, 3\}$ (longueurs). À chaque donnée radicielle réduite épinglée \mathcal{R} est associé un diagramme de Dynkin $\Delta(\mathcal{R})$, dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des racines simples.

3.2. — Soit S un schéma. Un *S -schéma de Dynkin* est un S -schéma constant tordu fini Δ , muni de la structure définie par un sous-schéma L de $\Delta \times_S \Delta$ d'intersection vide avec la diagonale, et d'un morphisme $\Delta \rightarrow \{1, 2, 3\}_S$. Si S' est un S -schéma connexe⁽¹⁶⁾, $\Delta(S')$ est muni naturellement d'une structure de diagramme de Dynkin.

On définit aussitôt les notions suivantes : isomorphisme de deux schémas de Dynkin, extension de la base d'un schéma de Dynkin, schéma de Dynkin constant associé à un diagramme de Dynkin.

345 Toute donnée de descente sur un schéma de Dynkin pour la topologie étale est effective.

3.3. — On se propose d'associer à chaque S -groupe réductif G un S -schéma de Dynkin. Supposons d'abord G *déployable* sur S ; pour tout épinglage \mathcal{E} de G , notons $\Delta(\mathcal{E})$ le schéma de Dynkin constant associé à la donnée radicielle épinglée définie par \mathcal{E} ; si \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont deux épinglages de G , il existe par 1.5 un *unique automorphisme intérieur* de G sur S transformant \mathcal{E} en \mathcal{E}' ; cet automorphisme de G définit un isomorphisme $a_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} : \Delta(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{E}')$; les $a_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ forment évidemment un système transitif, de sorte qu'on peut identifier les $\Delta(\mathcal{E})$ (i.e. prendre la limite inductive); le résultat est un schéma de Dynkin constant noté $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$. Si maintenant G est un S -groupe réductif *quelconque*, il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \rightarrow S\}$ telle que

⁽¹⁶⁾N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que S' soit connexe.

G_{S_i} soit déployable. Raisonnant comme précédemment, on a donc une donnée de descente canonique sur les $\underline{\text{Dyn}}(G_{S_i})$, permettant de construire par descente un S-schéma de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G)$.

3.4. — Cette construction vérifie les propriétés suivantes (qui d'ailleurs la caractérisent essentiellement) :

(i) À chaque S-groupe réductif est associé un schéma de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G)$; à tout isomorphisme $u : G \xrightarrow{\sim} G'$ est associé fonctoriellement un isomorphisme $\underline{\text{Dyn}}(u) : \underline{\text{Dyn}}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Dyn}}(G')$.

(ii) Si S' est un S-schéma et G un S-groupe réductif, on a 346

$$\underline{\text{Dyn}}(G \times_S S') \simeq \underline{\text{Dyn}}(G) \times_S S'.$$

(iii) Si \mathcal{E} est un épingleage de G , définissant la donnée radicielle épinglée de diagramme de Dynkin Δ , on a

$$\underline{\text{Dyn}}(G) \simeq \Delta_S.$$

(iv) Si u est un automorphisme intérieur de G , $\underline{\text{Dyn}}(u)$ est l'automorphisme identique de $\underline{\text{Dyn}}(G)$.

3.5. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. Il est clair que le foncteur $\underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ des automorphismes de $\underline{\text{Dyn}}(G)$ pour la structure de schéma de Dynkin est représentable par un S-schéma constant tordu fini. Par 3.4 (i) et (ii), on a un morphisme canonique

$$\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G)),$$

qui, en vertu de (iv), se factorise par un morphisme

$$\underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G)).$$

Plus généralement, si G et G' sont deux S-groupes réductifs, on a un morphisme canonique

$$\underline{\text{Isomext}}(G, G') \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G), \underline{\text{Dyn}}(G'));$$

en particulier, si G' est une forme tordue intérieure de G (1.11), les schémas de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G)$ et $\underline{\text{Dyn}}(G')$ sont isomorphes.

3.6. — Si G est semi-simple (resp. adjoint ou simplement connexe), le morphisme

$$\underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G))$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). En effet, on peut supposer G épinglé et on est ramené au résultat correspondant pour les données radicielles réduites épinglées (cf. Exp. XXI, 7.4.5). 347

On a un résultat analogue pour les $\underline{\text{Isom}}$; d'où il résulte en particulier que deux S-groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes) sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre si et seulement si leurs schémas de Dynkin sont isomorphes.

3.7. — On peut donner une construction différente du schéma de Dynkin associé à un groupe réductif. Soient \mathcal{R} une donnée radicielle réduite épinglée, G un S -groupe réductif de type \mathcal{R} ; notons $\Delta(\mathcal{R})$ le diagramme de Dynkin défini par la donnée radicielle \mathcal{R} . On a (3.5) un morphisme canonique

$$A_S(\mathcal{R}) = \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R})) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\Delta(\mathcal{R})_S).$$

Le S -groupe réductif G correspond (1.17) à un fibré $\underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), G)$, principal homogène sous $A_S(\mathcal{R})$. Le fibré sous $\underline{\text{Aut}}_{\text{Dyn}}(\Delta(\mathcal{R})_S)$ associé correspond à une forme sur S de $\Delta(\mathcal{R})_S$: c'est $\underline{\text{Dyn}}(G)$; en d'autres termes, ce fibré associé n'est autre que $\underline{\text{Isom}}_{\text{Dyn}}(\Delta(\mathcal{R})_S, \underline{\text{Dyn}}(G))$. Sous cette dernière forme, la démonstration est immédiate.

3.8. Schéma de Dynkin et couples de Killing. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . Il existe un morphisme canonique

$$i : \underline{\text{Dyn}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, \mathbb{G}_{m,S})$$

348 qui identifie $\underline{\text{Dyn}}(G)$ au « schéma des racines simples de B relativement à T »; ce morphisme se définit aussitôt par descente à partir du cas épinglé. Remarquons d'ailleurs que la donnée de T et de i permet de reconstruire B (« correspondance biunivoque entre systèmes de racines simples et systèmes de racines positives »).

Il résulte de la description précédente de $\mathfrak{D} = \underline{\text{Dyn}}(G)$, qu'il existe une *racine canonique* de $B_{\mathfrak{D}}$ par rapport à $T_{\mathfrak{D}}$: cette racine $\alpha_{\mathfrak{D}}$ est l'image par $i(\mathfrak{D})$ du morphisme identique de \mathfrak{D} . On en déduit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -module *inversible canonique* $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$:

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\mathfrak{D}})^{\alpha_{\mathfrak{D}}}.$$

Dans le cas épinglé, on a

$$\mathfrak{D} = \prod_{\alpha \in \Delta} S_{\alpha},$$

où chaque S_{α} est une copie de S , et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ est alors le $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -module qui induit \mathfrak{g}^{α} sur S_{α} , pour tout $\alpha \in \Delta$.

3.9. Quasi-épinglages. Groupes quasi-épinglés. — Si G est un S -groupe réductif, on appelle *quasi-épinglage* de G la donnée :

- (i) d'un couple de Killing $B \supset T$ de G ,
- (ii) d'une section $X \in \Gamma(\underline{\text{Dyn}}(G), \mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\times}$.

On dit qu'un S -groupe réductif est *quasi-déployable* s'il possède un quasi-épinglage. On appelle *groupe quasi-épinglé* un groupe réductif muni d'un quasi-épinglage.

349 Soit $B \supset T$ un couple de Killing du S -groupe réductif G , alors G est quasi-épinglable relativement à ce couple de Killing si et seulement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ possède une section non nulle en chaque point, i.e. si l'élément de $\text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G))$ défini par $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ est nul. Supposons en particulier S semi-local; alors $\underline{\text{Dyn}}(G)$ l'est également, donc $\text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G)) = 0$. On en déduit :

Proposition 3.9.1. — *Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif. Pour que G soit quasi-déployable, il faut et il suffit qu'il possède un sous-groupe de Borel.*

⁽¹⁷⁾ En effet, S est affine donc, d'après la première assertion de Exp. XXII, 5.9.7, si G possède un sous-groupe de Borel B , il possède aussi un couple de Killing $B \supset T$. Puis, comme $\text{Pic}(\mathfrak{D}) = 0$, alors $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ possède une section X partout non nulle.

Soient toujours A un anneau semi-local et $S = \text{Spec}(A)$; remarquons maintenant que pour tout S -groupe réductif G le morphisme $\text{Bor}(G) \rightarrow S$ est surjectif (car $G_{\bar{s}}$ possède des sous-groupes de Borel, pour tout $s \in S$) et lisse et projectif (Exp. XXII, 5.8.3), donc possède des sections après extension étale finie surjective de la base. ⁽¹⁸⁾ On en déduit le

Corollaire 3.9.2. — *Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif. Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ étale fini et surjectif tel que $G_{S'}$ soit quasi-déployable.*

Remarque 3.9.3. — Sous les conditions précédentes, soit T un tore maximal de G (cf. Exp. XIV, 3.20); alors on peut supposer en outre que $G_{S'}$ est quasi-déployable relativement à $T_{S'}$: il suffit d'appliquer le raisonnement précédent au « schéma des sous-groupes de Borel contenant T », qui est fini et étale sur S (Exp. XXII, 5.5.5 (ii)).

3.10. — Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux *quasi-épinglages* du S -groupe réductif G . Il existe un *unique automorphisme intérieur* de G transformant \mathcal{E} en \mathcal{E}' . En effet, on se ramène aussitôt au cas déployé, où l'assertion a déjà été démontrée (1.5, il suffit de remarquer en effet qu'il revient au même pour un automorphisme intérieur de G de respecter un épinglage ou le quasi-épinglage sous-jacent). On en conclut comme au n°1 qu'un

350

⁽¹⁷⁾N.D.E. : On a détaillé la référence à Exp. XXII, 5.9.7.

⁽¹⁸⁾N.D.E. : L'original renvoyait à EGA IV, § 24, qui n'est pas paru. Il s'agit d'utiliser le « théorème de Bertini ». Détaillons l'argument, qui nous a été indiqué par O. Gabber. Soit $X \rightarrow S$ un morphisme surjectif, lisse et projectif; remplaçant S par une composante connexe, on peut supposer que X/S est en tout point de dimension relative d (cf. EGA IV₄, 17.10.2). On peut aussi supposer que X est un sous-schéma fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}_S^n = \mathbb{P}(E)$, où E est un A -module libre de rang $n + 1$ (cf. EGA II, 5.3.3). Soient s_1, \dots, s_r les points fermés de S ; d'après le théorème de Bertini (voir par exemple [Jou83], I 6.10), il existe un ouvert U du produit $P = \mathbb{P}(E^*)^d$, à fibres non vides, tel que pour tout point $u = (f_1, \dots, f_d)$ de U_{s_i} , l'intersection de $X_{\kappa(u)}$ avec les d hyperplans de $\mathbb{P}_{\kappa(u)}^n$ définis par u soit étale sur $\kappa(u)$. Quitte à rétrécir U , on peut supposer que U est le complémentaire dans l'espace affine \mathbb{A}_S^{nd} du lieu des zéros $\mathcal{V}(Q)$ d'un certain polynôme Q de degré $m > 0$. On voit alors facilement (par récurrence sur le nombre de variables) que $\mathcal{V}(Q)$ ne peut contenir tous les points rationnels de $\mathbb{A}_{s_i}^{nd}$ si $|\kappa(s_i)| > m$. Comme le morphisme $A \rightarrow \prod_i \kappa(s_i)$ est surjectif, on peut trouver un polynôme unitaire $R \in A[X]$ de degré m dont l'image dans $\kappa(s_i)[X]$ est irréductible si $\kappa(s_i)$ est fini, et possède m racines distinctes si $\kappa(s_i)$ est infini. Posons $A' = A[X]/(R)$ et $S' = \text{Spec}(A')$; alors $S' \rightarrow S$ est étale, fini et surjectif, et le corps résiduel en chacun de ses point fermés s'_1, \dots, s'_t est de cardinal $\geq 2^m$. Alors U possède un point rationnel u_i au-dessus de chaque point fermé de S' , et comme $A' \rightarrow \prod_i \kappa(s_i)$ est surjectif, ceux-ci se relèvent en une section u de $P_{S'}$. Notons Z l'intersection de $X_{S'}$ avec les d hyperplans de $\mathbb{P}_{S'}^n$ définis par u , et V l'ouvert de Z formé des points en lesquels Z est étale sur S' . D'après EGA IV₃, 11.3.8, V contient les fibres $Z_{s'_i}$ pour tout i ; comme $\pi : Z \rightarrow S'$ est propre, il en résulte que le fermé $\pi(Z - V)$ est vide, d'où $V = Z$. Alors $Z \rightarrow S'$ est surjectif, étale et propre, donc fini, ainsi que la composée $Z \rightarrow S$, et ceci fournit la section désirée de $X \rightarrow S$.

quasi-épinglage du S-groupe réductif G définit un scindage h de la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \text{ad}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G) \begin{array}{c} \xleftarrow{\dots\dots\dots h} \\ \xrightarrow{p} \end{array} \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1,$$

l'image de h étant le sous-groupe de $\underline{\text{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$ qui laisse invariant le quasi-épinglage.

De même si G et G' sont deux S-groupes quasi-épinglés, on définit de manière naturelle le sous-foncteur

$$\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr. q-ép.}}(G, G')$$

de $\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$; la projection de $\underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$ sur $\underline{\text{Isomext}}(G, G')$ induit un isomorphisme

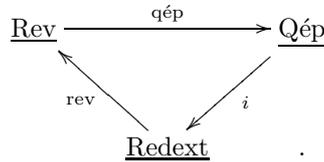
$$(*) \quad \underline{\text{Isom}}_{\text{S-gr. q-ép.}}(G, G') \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Isomext}}(G, G').$$

Théorème 3.11. — Soient S un schéma, \mathcal{R} une donnée radicielle réduite épinglée telle que $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ existe (cf. Exp. XXV), E le groupe de ses automorphismes. Considérons les trois catégories suivantes :

- (i) La catégorie Rev des revêtements principaux galoisiens de S de groupe E (les morphismes sont les isomorphismes de E-fibrés).
- (ii) La catégorie Redext dont les objets sont les S-groupes réductifs de type \mathcal{R} (Exp. XXII, 2.7), les morphismes de G dans G' étant les éléments de $\underline{\text{Isomext}}(G, G')(S)$.
- (iii) La catégorie Qép des S-groupes réductifs quasi-épinglés de type \mathcal{R} (les morphismes sont les isomorphismes respectant les quasi-épinglages).

351

Ces trois catégories sont équivalentes : plus précisément, on a un diagramme de foncteurs, commutatif à isomorphismes fonctoriels près



Nous allons décrire ci-dessous ces trois foncteurs, en laissant au lecteur le soin de vérifier la commutativité du diagramme. ⁽¹⁹⁾

3.11.1. Le foncteur i . — C'est le foncteur évident : $i(G) = G$, $i(f) =$ image de f par l'isomorphisme de 3.10 (*).

3.11.2. Le foncteur qép . — Soit S' un revêtement principal galoisien de S de groupe E. Soit $(G, T, M, R, \Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ un épinglage de $G = \text{Ép}_S(\mathcal{R})$ et soit $(X'_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ l'épinglage correspondant de $G' = G_{S'} = \text{Ép}_{S'}(\mathcal{R})$. D'après Exp. XXIII 5.5 bis, il existe un unique morphisme de groupes

$$\theta : E \longrightarrow \text{Aut}_{\text{S-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R})) = A(\mathcal{R})(S)$$

⁽¹⁹⁾N.D.E. : On a esquissé en 3.11.4 la vérification du fait que les foncteurs i , rev et qép sont pleinement fidèles, et que la composée $\text{rev} \circ i \circ \text{qép}$ est isomorphe au foncteur identité de Rev.

tel que, pour tout $h \in E$, $\theta(h)$ induise $D_S(h)$ sur T et $\mathcal{L}ie(\theta(h))(X_\alpha) = X_{h(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Tenant compte de l'opération de E sur S' , on obtient ainsi une opération de E sur G' , compatible avec l'opération de E sur S' et qui respecte le quasi-épinglage canonique de G' .⁽²⁰⁾ Comme $S' \rightarrow S$ est couvrant pour la topologie (fpqc), c'est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des morphismes affines, et on note

$$\text{qép}(S') = \text{Q-Ép}_{S'/S}(\mathcal{R})$$

le S -groupe *quasi-épinglé* obtenu par descente galoisienne.⁽²¹⁾

3.11.3. Le foncteur rev. — Soit G un S -groupe réductif de type \mathcal{R} . On note

352

$$\text{rev}(G) = \underline{\text{Isomext}}(\acute{\text{Ép}}_S(\mathcal{R}), G),$$

c'est un fibré principal homogène sous E_S (cf. 1.10 et 1.19), c'est-à-dire un objet de Rev.

3.11.4. — ⁽²²⁾ Il est clair, d'après l'isomorphisme 3.10 (*), que le foncteur i est pleinement fidèle. D'autre part, si G_0, G, G' sont des S -groupes réductifs, le morphisme naturel

$$\underline{\text{Isom}}(G_0, G) \times_S \underline{\text{Isom}}(G, G') \longrightarrow \underline{\text{Isom}}(G_0, G')$$

induit un morphisme

$$(*) \quad \underline{\text{Isomext}}(G_0, G) \times_S \underline{\text{Isomext}}(G, G') \longrightarrow \underline{\text{Isomext}}(G_0, G')$$

puisque, pour tout $S' \rightarrow S$, si $g_0 \in G_0(S')$, $g \in G(S')$, $u \in \underline{\text{Isom}}(G_0, G)(S')$, et $v \in \underline{\text{Isom}}(G, G')(S')$, on a l'égalité $v \circ \text{int}(g) \circ u \circ \text{int}(g_0) = v \circ u \circ \text{int}(u^{-1}(g)g_0)$. Prenant $G_0 = \acute{\text{Ép}}_S(\mathcal{R})$, on obtient une application

$$\underline{\text{Isomext}}(G, G')(S) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Rev}}(\underline{\text{Isomext}}(\acute{\text{Ép}}_S(\mathcal{R}), G), \underline{\text{Isomext}}(\acute{\text{Ép}}_S(\mathcal{R}), G'))$$

et pour montrer que c'est une bijection, on peut supposer, par descente (fpqc), que G et G' sont épinglés, auquel cas c'est évident.

⁽²⁰⁾N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui précède, pour faire voir que l'opération de E sur G' s'obtient en combinant l'opération naturelle de E sur $\acute{\text{Ép}}_{S'}(\mathcal{R})$ et l'opération donnée sur S' . Le couple de Killing canonique de G' est préservé par cette opération, ainsi que le quasi-épinglage donné par l'élément \tilde{X}' de $\Gamma(\Delta_{S'}, \mathcal{L}ie(G'/S')^{\Delta_{S'}})$, égal à X'_α sur la copie de S' indexée par α (en effet, comme E agit sur $\Delta_{S'}$ par permutation des copies de S' , on a bien $h(\tilde{X}') = \tilde{X}'$ pour tout $h \in E$).

⁽²¹⁾N.D.E. : voir, par exemple, TDTE I, p. 22, Exemple 1. On peut aussi décrire $\text{qép}(S')$ comme le tordu de $G = \acute{\text{Ép}}_S(\mathcal{R})$ par le E -torseur S'/S , i.e. le faisceau (fpqc) quotient de $S' \times_S G$ par l'action à droite de E définie par $(s', g) \cdot h = (s'h, h^{-1}(g))$. Comme G est affine sur S et comme E agit sur G par automorphismes de groupe, ce faisceau est représentable par un S -groupe G^\sharp , qui est une forme « tordue » de G , et $\mathcal{D}^\sharp = \underline{\text{Dyn}}(G^\sharp)$ est le tordu du schéma de Dynkin constant Δ_S par le toseur S'/S . Comme E normalise B et T , on obtient de même un couple (B^\sharp, T^\sharp) qui est un couple de Killing de G^\sharp . D'autre part, soient $\mathfrak{g} = \mathcal{L}ie(G/S)$ et $\mathfrak{g}^\sharp = \mathcal{L}ie(G^\sharp/S)$; pour tout $U \rightarrow S$, les sections de \mathfrak{g}^\sharp sur U sont les S -morphisms E -équivariants $U \times_S S' \rightarrow W(\mathfrak{g})$. Comme $\mathcal{D}^\sharp \times_S S'$ est E -isomorphe à $\Delta \times S'$, muni de l'action $(\alpha, s') \cdot h = (h^{-1}(\alpha), s'h)$, on obtient que le morphisme donné par $(\alpha, s') \mapsto X_\alpha$ est une section de \mathfrak{g}^\sharp sur \mathcal{D}^\sharp qui est un quasi-épinglage, i.e. une section partout non nulle de $(\mathfrak{g}^\sharp \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\mathcal{D}^\sharp})^{\mathcal{D}^\sharp}$ (cf. 3.8).

⁽²²⁾N.D.E. : On a ajouté ce numéro.

De même, si S_1, S_2 sont deux objets de $\underline{\text{Rev}}$ et si l'on note $S_i \times^E \acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R})$ le S -groupe $q\acute{\text{e}}p(S_i)$ obtenu en tordant $\acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R})$ par le E -torseur S_i (cf. N.D.E. (21)), on a une application naturelle

$$\text{Hom}_{\underline{\text{Rev}}}(S_1, S_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{\text{Q}\acute{\text{e}}p}}(S_1 \times^E \acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R}), S_2 \times^E \acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R})),$$

et pour montrer que c'est une bijection, on peut supposer, par descente (fpqc), que S_1 et S_2 sont des E -fibrés triviaux, auquel cas c'est évident.

Donc les trois foncteurs du diagramme sont pleinement fidèles. De plus, pour tout objet S' de $\underline{\text{Rev}}$ on a un morphisme naturel

$$S' \longrightarrow \underline{\text{Isomext}}(\acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R}), S' \times^E \acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R}))$$

et pour voir que c'est un isomorphisme, on peut supposer, par descente (fpqc), que S' est un E -fibré trivial, auquel cas c'est évident.

On a donc un isomorphisme de foncteurs $\text{Id}_{\underline{\text{Rev}}} \rightarrow \text{rev} \circ i \circ q\acute{\text{e}}p$. Comme le foncteur rev est pleinement fidèle on obtient donc, pour tout S -groupe réductif H (pas nécessairement quasi-déployé), une bijection

$$\underline{\text{Isomext}}(\text{Q-}\acute{\text{E}}p_{\text{rev}(H)/S}(\mathcal{R}), H)(S) \simeq \text{Aut}_{\underline{\text{Rev}}}(\text{rev}(H))$$

fonctorielle en H . En particulier, le morphisme identité de $\text{rev}(H)$ correspond à un élément « canonique » u_0 de $\underline{\text{Isomext}}(\text{Q-}\acute{\text{E}}p_{\text{rev}(H)/S}(\mathcal{R}), H)(S)$; de plus, tout $u \in \underline{\text{Isomext}}(\text{Q-}\acute{\text{E}}p_{\text{rev}(H)/S}(\mathcal{R}), H)(S)$ correspond à un automorphisme ϕ_u de $\text{rev}(H)$, et $q\acute{\text{e}}p(\phi_u)$ est l'unique automorphisme de S -groupe épinglé de $\text{Q-}\acute{\text{E}}p_{\text{rev}(H)/S}(\mathcal{R})$ tel que $u_0 \circ q\acute{\text{e}}p(\phi_u) = u$. On a ainsi démontré le théorème 3.11.

Développons un des corollaires de 3.11 :

Corollaire 3.12. — *Pour tout S -groupe réductif G , il existe un S -groupe quasi-épinglé $G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}$. et un « isomorphisme extérieur » $u \in \underline{\text{Isomext}}(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, G)(S)$. Le couple $(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, u)$ est unique à un isomorphisme unique près.*

En effet, on peut supposer G de type constant \mathcal{R} , et on prend $G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p} = \text{Q-}\acute{\text{E}}p_{\text{rev}(G)/S}(\mathcal{R})$.

3.12.1. — Remarquons que la donnée du couple $(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, u)$ permet de définir de manière canonique le S -schéma (cf. 1.11)

$$Q = \underline{\text{Isomint}}(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, G),^{(23)}$$

qui est un fibré principal homogène sous $\text{ad}(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p})$, et dont la donnée « équivaut » à celle de la forme tordue intérieure G de $G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}$. D'ailleurs Q n'est autre que le « schéma des quasi-épinglages de G », définition qui rend compte de sa structure de fibré principal homogène (à gauche) sous $\text{ad}(G)$ (3.10) – comparer avec 1.20.

Proposition 3.13. — *Soient S un schéma, G un S -groupe semi-simple adjoint (resp. simplement connexe), $B \supset T$ un couple de Killing de G , $\underline{\text{Dyn}}(G)$ le S -schéma de*

⁽²³⁾N.D.E. : On note $\underline{\text{Isomint}}(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, G)$ au lieu de $\underline{\text{Isomint}}_u(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, G)$ (cf. 1.11), puisque le couple $(G_{q\text{-}\acute{\text{e}}p}, u)$ est unique à un isomorphisme unique près.

Dynkin de G. Il existe un isomorphisme canonique de S-schémas en groupes

$$T \xrightarrow{\sim} \prod_{\underline{\text{Dyn}}(G)/S} \mathbb{G}_{m, \underline{\text{Dyn}}(G)}.$$

(On rappelle (cf. Exp. II, §1) que le second membre est par définition le S-foncteur qui à $S' \rightarrow S$ associe $\mathbb{G}_m(\underline{\text{Dyn}}(G) \times_S S')$, ou, ce qui revient au même, $\mathbb{G}_m(\underline{\text{Dyn}}(G_{S'}))$.)

Première démonstration. Faisons-la pour simplifier dans le cas adjoint. Considérons le morphisme composé

$$T \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} T_{\mathfrak{D}} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} \mathbb{G}_{m, \mathfrak{D}},$$

où le premier morphisme est le morphisme canonique, le second est $\prod_{\mathfrak{D}/S} \alpha_{\mathfrak{D}}$ (on a noté $\mathfrak{D} = \underline{\text{Dyn}}(G)$). Pour vérifier que ce morphisme est un isomorphisme, on peut supposer G déployé; or, dans ce cas, ce n'est autre que le morphisme $T \rightarrow (\mathbb{G}_{m, S})^{\Delta}$ de composantes α , pour $\alpha \in \Delta$, et celui-ci est un isomorphisme (Exp. XXII, 4.3.8).

Deuxième démonstration. D'après 2.8, 3.5 et 3.11, on peut supposer que $G = Q\text{-Éps}_{S'/S}(\mathcal{R})$, T étant le tore maximal canonique. Sur S' , on a par Exp. XXII 4.3.8, un isomorphisme $T_{S'} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{m, S'})^{\Delta}$, défini par les racines simples (resp. les coracines simples). Le groupe E opère au second membre par permutation de Δ . Or le fibré associé à S'/S par $E \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ est $\underline{\text{Dyn}}(G)$ (3.7), et on conclut aussitôt.

Utilisant la Prop. 8.4 de l'appendice, on en tire :

Corollaire 3.14. — *Sous les conditions précédentes, on a*

$$H^1(S, T) \xrightarrow{\sim} H^1(\underline{\text{Dyn}}(G), \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G)).$$

En particulier, $H^1(S, T) = 0$ lorsque S est semi-local.

354

Remarque 3.15. — Soient S un schéma, G (resp. G') un S-groupe réductif, $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G'), $u \in \underline{\text{Isomext}}(G, G')(S)$. Posons (cf. 2.10)

$$P = \underline{\text{Isomint}}_u(G, B, T; G', B', T');$$

c'est un fibré principal homogène sous T^{ad} (par $(f, t) \mapsto f \circ \text{int}(t)$).

Soit d'autre part $\mathfrak{D} = \underline{\text{Dyn}}(G) = \underline{\text{Dyn}}(G')$ (identifiés grâce à u (3.5)), et soit $L = \underline{\text{Isom}}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}, \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}})$ le fibré principal homogène sous $\mathbb{G}_{m, \mathfrak{D}}$ défini par le $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}$ -module inversible

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}, \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}) = \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}} \otimes (\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\vee}.$$

Chaque $f \in P(S')$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ sur $\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, d'où un morphisme canonique

$$P \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} L \quad .$$

Ce morphisme est un *isomorphisme*, compatible avec l'isomorphisme d'opérateurs

$$T^{\text{ad}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{D}/S} \mathbb{G}_{m, \mathfrak{D}}$$

défini ci-dessus. En effet, il suffit de le vérifier dans le cas où les deux groupes sont épinglés, où c'est facile.

Il s'ensuit en particulier que dans l'isomorphisme

$$H^1(S, T^{\text{ad}}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G))$$

de 3.14, la classe du fibré P est transformée en $cl(\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}) - cl(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})$. Le fibré P est donc trivial si et seulement si $\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ sont isomorphes.

355

Si (G, B, T) est quasi-déployable, par exemple si on prend pour G le groupe $G'_{\text{q-ép.}}$, avec son couple de Killing canonique, il s'ensuit que l'image de la classe de P n'est autre que l'obstruction au quasi-déploiement de G' définie en 3.9.

3.16. Symétries

3.16.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . On note $\mathfrak{D} = \underline{\text{Dyn}}(G)$. On rappelle (Exp. XXII, 5.9.1) qu'il existe un unique sous-groupe de Borel B^- de G tel que $B \cap B^- = T$. Si $X \in \Gamma(\mathfrak{D}, \mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\times}$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B, T) (3.9), alors $Y = -X^{-1} \in \Gamma(\mathfrak{D}, (\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\vee})^{\times}$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B^-, T) ; on dit que c'est le *quasi-épinglage opposé*.

Si \mathcal{R} est une donnée radicielle réduite épinglée et si \mathcal{E} est un \mathcal{R} -épinglage du S -groupe réductif G , on définit un \mathcal{R} -épinglage \mathcal{E}^- dit *opposé* à \mathcal{E} de la manière suivante : on garde le même tore maximal T , on prend l'opposé de l'isomorphisme $D_S(M) \xrightarrow{\sim} T$, et on « épingle » par $Y_{\alpha} = -X_{\alpha}^{-1} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$, pour $\alpha \in \Delta$. Le quasi-épinglage sous-jacent à \mathcal{E}^- est le quasi-épinglage opposé au quasi-épinglage sous-jacent à \mathcal{E} .

Remarque. — Dans les notations de Exp. XIX, 3.1, si on pose

$$w_{\alpha}(X_{\alpha}) = \exp(X_{\alpha}) \exp(-X_{\alpha}^{-1}) \exp(X_{\alpha}),$$

on a $w_{\alpha}(X_{\alpha}) = w_{-\alpha}(Y_{\alpha})$ (*loc. cit.*, 3.1 (vi)).

Proposition 3.16.2. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif.

(i) Soit T un tore maximal de G ; il existe un unique

$$i_T \in (\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, T)/T^{\text{ad}})(S) \subset \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(T)$$

356

tel que $i_T(t) = t^{-1}$ pour toute section t de T .

(ii) Soit (B, T) un couple de Killing de G ; il existe une unique section

$$w_{B, T} \in (\underline{\text{Norm}}_G(T)/T)(S) = W_G(T)(S)$$

telle que $\text{int}(w_{B, T})(B) = B^-$ (avec l'abus de langage évident).

(iii) Soit $\mathcal{Q} = (B, T, X)$ un quasi-épinglage de G , $\mathcal{Q}^- = (B^-, T, Y)$ le quasi-épinglage opposé; il existe un unique automorphisme intérieur de G

$$n_{\mathcal{Q}} \in \underline{\text{Norm}}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}})(S) \subset \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(G)$$

tel que $n_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^-$, c'est-à-dire : $n_{\mathcal{Q}}(T) = T$, $n_{\mathcal{Q}}(B) = B^-$, $n_{\mathcal{Q}}(X) = Y$.

(iv) Soit $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ un épingleage de G , $(\mathcal{R}, \mathcal{E}^-)$ l'épingleage opposé ; il existe un unique automorphisme de G

$$u_{\mathcal{E}} \in \text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G, T) \subset \text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G)$$

tel que $u_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^-$, c.-à-d., $u_{\mathcal{E}}(t) = t^{-1}$ pour toute section t de T , et $\text{Ad}(u_{\mathcal{E}})X_{\alpha} = Y_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

Démonstration. (ii) résulte de Exp. XXII, 5.5.5 (ii), puis (iii) résulte de 3.10, et (iv) résulte de Exp. XXIII, 4.1. Enfin pour prouver (i), on peut supposer G épingleé. L'existence résulte de (iv) par exemple, l'unicité du fait qu'un automorphisme de G qui induit l'identité sur T est donné par une section de T^{ad} (2.11).

Corollaire 3.16.3. — On a

357

$$i_T^2 = w_{B,T}^2 = n_Q^2 = u_{\mathcal{E}}^2 = e .$$

De plus, i_T (resp. $u_{\mathcal{E}}$) est $\neq e$ si $G \neq e$, et $w_{B,T}$ (resp. n_Q) est $\neq e$ si G n'est pas un tore.

Corollaire 3.16.4. — Dans la situation de (iii) (resp. (iv)), n_Q se projette sur $w_{B,T}$ (resp. $u_{\mathcal{E}}$ se projette sur i_T) par le morphisme canonique

$$\text{Norm}_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \longrightarrow W_{\text{ad}(G)}(T^{\text{ad}}) \simeq W_G(T) ,$$

resp.

$$\text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G, T) \longrightarrow \text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G, T)/T^{\text{ad}} .$$

Corollaire 3.16.5. — Les définitions précédentes sont compatibles avec l'extension de la base, et sont fonctorielles par isomorphisme (en un sens évident).

Proposition 3.16.6. — (i) On peut définir de manière unique pour chaque groupe réductif G sur un schéma S un élément

$$s_G \in \text{Autext}(G)(S)$$

de telle manière que cette construction soit fonctorielle en G par isomorphisme, soit compatible avec les changements de base et que chaque fois que T est un tore maximal du S -groupe réductif G , s_G soit l'image de i_T par le morphisme canonique

$$\text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G, T)/T^{\text{ad}} \longrightarrow \text{Autext}(G).$$

(ii) On a $s_G^2 = e$, et s_G est un élément central de $\text{Autext}(G)$.

(iii) Sous les conditions de 3.16.2 (ii), si on identifie $\text{Aut}_{\text{S-gr.}}(G, B, T)/T^{\text{ad}}$ à $\text{Autext}(G)$ (2.2), on a

$$w_{B,T} i_T = i_T w_{B,T} = s_G .$$

(iv) Sous les conditions de 3.16.2 (iv), si on identifie $\text{Aut}_{\text{S-gr.-ép}}(G, \mathcal{R}, \mathcal{E})$ à $\text{Autext}(G)$ (1.3 (iii)), on a

$$n_{\mathcal{E}} u_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}} n_{\mathcal{E}} = s_G .$$

358

Démonstration. (i) se prouve sans difficulté par descente. D'autre part, comme i_T est évidemment une section centrale et de carré e dans $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(T)$, (ii) en résulte immédiatement ; (iii) est une conséquence de (iv) par descente. Enfin, sous les conditions de (iv), il est clair que $n_{\mathcal{E}}u_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}}n_{\mathcal{E}}$ et que cet automorphisme de G respecte l'épingleage ; modulo l'identification faite, il est donc égal à son image dans $\underline{\text{Autext}}(G)$; mais $n_{\mathcal{E}}$ est intérieur et $u_{\mathcal{E}}$ se projette sur s_G .

Remarque 3.16.7. — (i) On détermine explicitement s_G dans chacun des cas de la classification grâce à (iii) : il suffit pour chaque donnée radicielle irréductible épinglée de composer la symétrie par rapport à l'origine avec la symétrie dans le groupe de Weyl (i.e. l'élément w_0 du groupe de Weyl tel que $w_0(\Delta) = -\Delta$). On trouve les résultats suivants : on a $s_G = e$ sauf pour A_n ($n \geq 2$), D_n (n impair) et E_6 , auquel cas s_G est l'unique « automorphisme extérieur » non trivial.

(ii) L'automorphisme $u_{\mathcal{E}}$ est celui qui sert à fabriquer « les formes réelles compactes » dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

359 **Remarque 3.16.8.** — On a défini en 3.16.1 une involution dans le S -schéma $Q = \underline{\text{Isomint}}(G_{q\text{-ép.}}, G)$ des quasi-épingleages de G (cf. 3.12.1) ; par transport de structure de $G_{q\text{-ép.}}$ à G , on voit aussitôt que cette involution est donnée par l'action d'un élément de $\text{ad}(G_{q\text{-ép.}})(S)$: l'élément n_0 défini (3.16.2 (iii)) par le quasi-épingleage canonique de $G_{q\text{-ép.}}$.

De la même manière, on a défini une involution dans le S -schéma

$$P = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\acute{E}p_S(\mathcal{R}), G)$$

des \mathcal{R} -épingleages de G (cf. 1.20). Raisonnant comme précédemment, on voit que cette involution est donnée par l'action de l'automorphisme u_0 de $\acute{E}p_S(\mathcal{R})$ défini (3.16.2 (iv)) par l'épingleage canonique de $\acute{E}p_S(\mathcal{R})$.

4. Isotrivialité des groupes réductifs et des fibrés principaux sous les groupes réductifs

4.1. Définitions. Théorème d'isotrivialité

Définition 4.1.1. — Soient S un schéma, G un S -schéma en groupes, P un fibré principal homogène sous G . On dit que P est *localement isotrivial* (resp. *semi-localement isotrivial*) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme *étale fini surjectif* $S' \rightarrow U$ tel que $P_{S'}$ soit trivial.

360 **Définition 4.1.2.** — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif. On dit que G est *localement isotrivial* (resp. *semi-localement isotrivial*) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme *étale fini surjectif* $S' \rightarrow U$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

Remarque 4.1.3. — (i) L'équivalence de catégories de 1.17 respecte par définition l'isotrivialité locale (resp. semi-locale.)

(ii) Ajoutons aux conditions de 4.1.1 : G localement de présentation finie sur S . Alors le fibré principal P (ou le groupe réductif G) est localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial) si et seulement si pour tout $S' \rightarrow S$, S' local (resp. semi-local), $P_{S'}$ est isotrivial (ou $G_{S'}$ isotrivial), c'est-à-dire s'il existe $S'' \rightarrow S'$ étale fini surjectif tel que $P_{S''}$ soit trivial (ou $G_{S''}$ déployé).

(iii) Dans le cas des tores, la définition 4.1.2 coïncide avec celle de Exp. IX, 1.1.

4.1.4. — Rappelons (Exp. XXII, 4.3 et 6.2) que pour tout groupe réductif G , nous avons introduit les groupes $\text{rad}(G)$, $\text{corad}(G)$ et $\text{dér}(G)$. Les groupes $\text{rad}(G)$ et $\text{corad}(G)$ sont des tores, qui sont déployés lorsque G est déployé; de plus, il existe une isogénie $\text{rad}(G) \rightarrow \text{corad}(G)$. Le S -groupe $\text{dér}(G)$ est semi-simple, on a $G/\text{dér}(G) = \text{corad}(G)$; il s'ensuit que pour tout fibré principal homogène P sous G , $P/\text{dér}(G)$ est un fibré principal homogène sous $\text{corad}(G)$. Ceci dit, on a :

Théorème 4.1.5. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif de type constant. 361

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) G est localement (resp. semi-localement) isotrivial.
- (b) Le tore $\text{rad}(G)$ l'est.
- (b') Le tore $\text{corad}(G)$ l'est.
- (c) Le revêtement galoisien de S associé à G (3.11) l'est.

Si T est un tore maximal de G , ces conditions sont également équivalentes à

- (d) Le tore T est localement (resp. semi-localement) isotrivial

(ii) Soit P un fibré principal homogène sous G ; pour que P soit localement (resp. semi-localement) isotrivial, il faut et il suffit que le $\text{corad}(G)$ -fibré principal $P/\text{dér}(G)$ le soit.

Corollaire 4.1.6. — Les conditions de (i) sont vérifiées lorsque G est semi-simple ou lorsque S est localement noethérien et normal (ou plus généralement géométriquement unibranche). Les conditions de (ii) sont vérifiées lorsque G est localement (resp. semi-localement) isotrivial.

Pour (i), la première assertion est triviale sur (b), la seconde résulte de (c) et Exp. X, 5.14 et 5.15. Pour (ii), il suffit de remarquer qu'en vertu du théorème 90, un fibré principal sous un tore déployé est semi-localement isotrivial.

4.2. Démonstration : le cas semi-simple

Démontrons d'abord, en vue d'une référence ultérieure :

Proposition 4.2.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G (resp. B un sous-groupe de Borel, resp. $B \supset T$ un couple de Killing de G), P un fibré principal homogène sous G , G' la forme tordue de G associée à P (via le morphisme $\text{int} : G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G)$). On a des isomorphismes canoniques 362

$$P/\underline{\text{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Tor}}(G'), \quad P/B \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Bor}}(G'), \quad P/T \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Kil}}(G').$$

Par construction, G' est le quotient de $P \times_S G$ par une certaine opération de G ($((p, g')g = (pg, g^{-1}g'g)$); on a donc un morphisme $P \times_S G \rightarrow G'$, c'est-à-dire un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_S(G, G'),$$

qui, comme on le voit aussitôt, se factorise par un morphisme

$$f : P \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, G'),$$

(pour vérifier cette assertion, on peut supposer $G = P$, auquel cas on a $G' = G$, $f = \text{int}$). L'application ensembliste $p \mapsto f(p)(T)$ définit un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\text{Tor}}(G').$$

Pour vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme $P/\underline{\text{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Tor}}(G')$ comme annoncé, on peut de nouveau supposer $P = G$ auquel cas on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii). (En fait, *loc. cit.* devrait être remplacé par l'énoncé ci-dessus). On raisonne de même pour Bor et Kil.

363 Proposition 4.2.2. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe semi-simple de type constant.

- (i) G est isotrivial.
- (ii) Tout fibré principal sous G est isotrivial.

Prouvons (i). Quitte à faire une extension étale finie surjective de la base, on peut, par 3.9.2, supposer G quasi-déployé. Mais alors G est isotrivial par construction (3.11, le groupe E est fini). Pour prouver (ii), on peut, en vertu de (i), supposer G déployé; on est alors ramené à :

Lemme 4.2.3. — Soit S un schéma semi-local. Tout fibré principal sous un groupe réductif déployé est isotrivial.

En effet, avec les notations de 4.2.1, où $B \supset T$ désigne le couple de Killing canonique de G déployé, le S -schéma $\underline{\text{Kil}}(G')$ possède une section, après extension étale finie surjective de la base, en vertu de 3.9.2. On peut donc réduire le groupe structural de G à T , or T est déployé, donc $H^1(S, T) = 0$ (théorème 90).

Corollaire 4.2.4. — Soient S un schéma et

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$$

une suite exacte de S -schémas en groupes (pour (fpqc)), G étant semi-simple de type constant. Soit P un fibré principal homogène sous G' , supposons le faisceau ⁽²⁴⁾ associé P/G représentable (par exemple G'' affine sur S). Pour que P soit localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial), il faut et il suffit que P/G le soit (comme fibré sous G'' ⁽²⁴⁾).

364 Si P est trivial, P/G l'est aussi, ce qui montre que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons S local (resp. semi-local) et P/G isotrivial, donc trivialisé par une extension S' de S étale finie et surjective. Étendant la base à S' , on peut réduire

⁽²⁴⁾N.D.E. : On a remplacé « fibré » par « faisceau », et ensuite G' par G'' .

le groupe structural de $P_{S'}$ à $G_{S'}$. Mais S' est encore semi-local et $G_{S'}$ semi-simple de type constant, donc le fibré obtenu est isotrivial (4.2.2).

4.3. Démonstration : cas général. — Remarquons d'abord que 4.1.5 (ii) résulte aussitôt de l'application de 4.2.4 à la suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{dér}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \text{corad}(G) \longrightarrow 1 .$$

Démontrons donc (i). Si G est déployé, $\text{rad}(G)$ et $\text{corad}(G)$ sont déployés, ainsi que $\text{rev}(G)$; donc (a) implique (b), (b'), et (c).

4.3.1. — On a (c) \Rightarrow (a). Soit \mathcal{R} le type de G ; on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{ad}(\acute{E}p_S(\mathcal{R})) \longrightarrow A_S(\mathcal{R}) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1 .$$

Appliquant 4.2.4 au fibré $P = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\acute{E}p_S(\mathcal{R}), G)$ et au fibré associé $\text{rev}(G) = P/\text{ad}(\acute{E}p_S(\mathcal{R}))$, on a (c) \Rightarrow (a).

4.3.2. — On a (b) \Rightarrow (a). Il nous suffit de prouver que si $\text{rad}(G)$ est déployé, G est semi-localement isotrivial. Or soit $G_0 = \acute{E}p_S(\mathcal{R})$; considérons la catégorie des couples (G', f) , où G' est une forme de G_0 et f un isomorphisme de $\text{rad}(G_0)$ sur $\text{rad}(G)$.

On sait (2.16) que cette catégorie est équivalente à la catégorie des fibrés principaux homogènes sous un certain S -groupe H extension d'un groupe constant tordu fini par un groupe semi-simple. Il nous suffit de prouver que tout fibré principal sous H est semi-localement isotrivial, or cela résulte aussitôt de 4.2.4. 365

4.3.3. — On a (b') \Rightarrow (a). On peut raisonner comme précédemment (ce sera d'ailleurs le même groupe H qui s'introduira). On peut aussi voir que (b) et (b') sont équivalentes : un tore isogène à un tore localement déployé est également localement déployé (cf. Exp. IX, 2.11 (iii)).

4.3.4. — On a (d) \Rightarrow (a). Il suffit de prouver qu'un groupe de type constant possédant un tore maximal déployé est semi-localement isotrivial ; or cela résulte aussitôt de 2.14.

4.3.5. — On a (a) \Rightarrow (d). Il suffit de prouver qu'un tore maximal d'un groupe déployé est semi-localement isotrivial. Or on a plus précisément :

Lemme 4.3.6. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, T_0 un tore maximal déployé de G , $W_0 = \underline{\text{Norm}}_G(T_0)/T_0$ (c'est un S -groupe localement constant, et constant si G est de type constant, par 2.14), T un tore maximal de G .

Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ qui est principal homogène sous W_0 (donc étale fini et surjectif, et même principal galoisien si G est de type constant), tel que $T_{S'}$ soit conjugué à $(T_0)_{S'}$ par un élément de $G(S')$ (et donc en particulier déployé).

En effet, on sait que $\underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)$ est un fibré principal homogène sous $\underline{\text{Norm}}_G(T_0)$ (cf. par exemple Exp. XI, 5.4 bis). Posons $S' = \underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)/T_0$; c'est un fibré principal homogène sous W_0 . Étendant la base de S à S' , on peut réduire le groupe structural de $\underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)$ à T_0 . Or S' est semi-local et T_0 déployé, donc $\underline{\text{Transp}}_G(T_0, T)$ possède une section sur S' ⁽²⁵⁾. C.Q.F.D.

4.4. Utilisation de l'existence de tores maximaux

En utilisant le théorème d'existence de tores maximaux de Grothendieck (Exp. XIV, 3.20), on peut préciser considérablement les résultats précédents. Énonçons tout de suite :

Théorème 4.4.1. — Soient S un schéma semi-local, \mathcal{R} une donnée radicielle réduite épinglée, W son groupe de Weyl, E le groupe de ses automorphismes. (On rappelle que E opère naturellement sur W et que le produit semi-direct $A = W \cdot E$ s'identifie au groupe des automorphismes de \mathcal{R} non épinglée, cf. Exp. XXI, 6.7.2).

(i) Tout fibré principal homogène sous $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ est trivialisé par un revêtement principal galoisien $S' \rightarrow S$ de groupe W .

(ii) Soit G un S -groupe réductif de type \mathcal{R} ; soit $\text{rev}(G) = \underline{\text{Isomext}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), G)$ le revêtement galoisien de S de groupe E associé. Soit W_0 la forme de W_S associée à $\text{rev}(G)$. Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$, qui est un fibré principal homogène sous W_0 , tel que $G_{S'}$ soit quasi-déployable (i.e. possède un sous-groupe de Borel).

367 (iii) Tout S -groupe réductif de type \mathcal{R} est déployé par un revêtement principal galoisien $\bar{S} \rightarrow S$ de groupe A .

Énonçons d'abord :

Proposition 4.4.2. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G , P un fibré principal homogène sous G , G' la forme tordue de G associée à P (on a alors, cf. 4.2.1, un isomorphisme canonique $P/\underline{\text{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Tor}}(G')$). Soit T' un tore maximal de G' , définissant un morphisme composé

$$S \longrightarrow \underline{\text{Tor}}(G') \xrightarrow{\sim} P/\underline{\text{Norm}}_G(T).$$

Considérons les morphismes canoniques

$$P \longrightarrow P/T \longrightarrow P/\underline{\text{Norm}}_G(T)$$

et prenons-en les images réciproques par le morphisme précédent :

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & P/T & \longrightarrow & P/\underline{\text{Norm}}_G(T) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S. \end{array}$$

⁽²⁵⁾N.D.E. : par le « théorème 90 ».

Alors S' (resp. H) est un fibré principal homogène au-dessus de S (resp. S') sous $W_G(T)$ (resp. $T_{S'}$). De plus, si on fait opérer $W_G(T)$ sur T de la manière évidente, le fibré associé à S' est isomorphe à T' .

Les deux premières assertions sont triviales, la dernière se prouve comme l'assertion correspondante de 2.6.

Corollaire 4.4.3. — Soient S un schéma semi-local, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G . Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaites :

368

- (i) T est déployé.
- (ii) T est contenu dans un sous-groupe de Borel de G , et G est soit adjoint, soit simplement connexe.

Soit en outre P un fibré principal homogène sous G . Il existe un S -schéma S' , qui est un fibré principal homogène sous $W_G(T)$, tel que $P_{S'}$ soit trivial.

En effet, si G' est la forme de G associée à P , alors G' possède un tore maximal T' (Exp. XIV, 3.20). Reprenant les notations de la proposition précédente, on voit que $H^1(S', T_{S'}) = 0$ (en vertu du théorème 90 pour (i), de 3.14 pour (ii)). Le morphisme $H \rightarrow S'$ possède une section, donc $P_{S'}$ possède aussi une section sur S' . C.Q.F.D.

Démontrons maintenant le théorème. L'assertion (i) est un cas particulier du corollaire précédent (prendre $G = \mathbb{E}P_S(\mathcal{R})$, muni de son tore déployé canonique). Prouvons (ii). On sait (3.12), que G est une forme tordue intérieure de

$$G_0 = G_{\text{rev}(G)/S}^{\text{qÉp}}(\mathcal{R}).$$

Si T_0 est le tore maximal canonique de G_0 , $W_{G_0}(T_0)$ est bien le groupe W_0 décrit dans l'énoncé. La forme G de G_0 correspond à un fibré principal homogène P sous $\text{ad}(G_0)$ ($P = \text{Isomint}(G_0, G)$). Le groupe $W_{\text{ad}(G_0)}(T_0^{\text{ad}})$ est canoniquement isomorphe à W_0 , et on obtient le résultat voulu en appliquant 4.4.3 à la situation $(\text{ad}(G_0), T_0^{\text{ad}}, P)$, l'hypothèse (ii) de 4.4.3 étant bien vérifiée. Démontrons enfin (iii). Reprenons les notations de (ii); on a un diagramme

369

$$\begin{array}{ccc} & \text{rev}(G) & \\ & \downarrow E_S & \\ & S & \xleftarrow{W_0} S' \end{array}$$

On sait que $G_{S'}$ est isomorphe à $(G_0)_{S'}$ et que $(G_0)_{\text{rev}(G)}$ est déployable. Si on pose $\bar{S} = S' \times_S \text{rev}(G)$, $G_{\bar{S}}$ est bien déployable, et il ne reste plus qu'à vérifier que \bar{S} est bien un revêtement principal galoisien de S de groupe A , ce qui résulte du lemme plus général suivant (naturellement valable dans tout site) :

Lemme 4.4.4. — Soient S un schéma, G et H deux S -schémas en groupes, $G \rightarrow \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(H)$ une opération de G sur H , E un G -fibré principal homogène, F un H_0 -fibré principal homogène, où H_0 est la forme de H associée à E . Alors $E \times_S F$ est muni

naturellement d'une structure de fibré principal homogène sous le produit semi-direct $H \cdot G$.

Notons $(e, g) \mapsto eg$ (resp. $(f, u) \mapsto fu$) l'opération (à droite) de G sur E (resp. de H_0 sur F). Notons

$$p : E \times_S H \longrightarrow H_0$$

la projection canonique (H_0 est par définition le quotient de $E \times_S H$ par G y opérant suivant la formule $(e, h)g = (eg, g^{-1}hg)$). Considérons le morphisme

$$r : E \times_S F \times_S H \times_S G \longrightarrow E \times_S F$$

défini ensemblistement par

$$r(e, f, h, g) = (eg, fp(e, h)).$$

370 Le morphisme r définit bien une opération du produit semi-direct $H \cdot G$ sur $E \times_S F$. En effet, on a ensemblistement

$$r(r(e, f, h, g), h', g') = (egg', fp(e, h)p(eg, h'));$$

mais

$$p(e, h)p(eg, h') = p(e, h)p(e, gh'g^{-1}) = p(e, hgh'g^{-1}),$$

d'où

$$r(r(e, f, h, g), h', g') = r(e, f, hgh'g^{-1}, gg'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver maintenant que cette loi est bien une loi de fibré principal homogène, on peut supposer que E et F sont triviaux, auquel cas on voit aussitôt que $E \times_S F$ est également un fibré trivial.

4.5. Isotrivialité des tores maximaux des groupes semi-simples ⁽²⁶⁾ Mettons ici en évidence le résultat suivant, contenu implicitement dans 2.6 (cf. la N.D.E. (13)) et qui était mentionné à la fin de Exp. IX 1.2. Rappelons (XXIII 5.11) que, pour tout schéma S et toute donnée radicielle réduite \mathcal{R} , on note $\text{Ép}_S(\mathcal{R})$ l'unique S -groupe épinglé de type \mathcal{R} (qui existe d'après Exp. XXV) et $T_S(\mathcal{R})$ son tore maximal canonique.

Proposition 4.5.1. — Soit G un S -groupe semi-simple de type constant \mathcal{R} ; on suppose que G possède un tore maximal T (ce qui est le cas si S est semi-local, d'après XIV 3.20).

(i) Alors $P = \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(\text{Ép}_S(\mathcal{R}), T_S(\mathcal{R}); G, T)/T_S(\mathcal{R})^{\text{ad}}$ est un S -fibré principal sous le groupe fini $\text{Aut}(\mathcal{R})$, et T_P est un tore maximal déployé de G_P . Par conséquent, T est isotrivial.

(ii) De plus, pour tout ensemble fini F de points de P contenu dans un ouvert affine, il existe un ouvert U de P contenant F tel que G_U soit déployé.

⁽²⁶⁾N.D.E. : On a ajouté ce n°4.5.

Démonstration. La suite exacte

$$1 \longrightarrow T_S(\mathcal{R})^{\text{ad}} \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R}), T_S(\mathcal{R})) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(T_S(\mathcal{R}))$$

induit pour tout $S' \rightarrow S$ un morphisme de fibrés $P_{S'} \rightarrow \underline{\text{Isom}}_{S'\text{-gr.}}(T_{S'}(\mathcal{R}), T_{S'})$, donc si $P_{S'}$ possède une section, alors $T_{S'}(\mathcal{R})$ et $T_{S'}$ sont isomorphes. C'est en particulier le cas pour $S' = P$.

Remarquons d'ailleurs que $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\acute{\text{E}}p_S(\mathcal{R}), T_S(\mathcal{R}))/T_S(\mathcal{R})^{\text{ad}}$ n'est autre que le S-groupe constant $\text{Aut}(\mathcal{R})_S$, et que P s'identifie au $\text{Aut}(\mathcal{R})_S$ -torseur $\underline{\text{Isom}}(\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}(G, T))$, où $\tilde{\mathcal{R}}(G, T)$ désigne la donnée radicielle tordue associée à (G, T) (cf. XXII 1.10).

Puis (ii) résulte de (i) et de 2.14, compte tenu du fait que les \mathfrak{g}^α (α parcourant les racines de \mathcal{R}) sont des \mathcal{O}_U -modules libres de rang 1 sur un ouvert affine assez petit U contenant F .

5. Décomposition canonique d'un groupe adjoint ou simplement connexe

Dans ce numéro, nous allons utiliser les résultats du n°1 pour généraliser au cas des schémas une décomposition classique des groupes adjoints (resp. simplement connexes). Pour ne pas surcharger indéfiniment la rédaction, les démonstrations sont esquissées et le détail en est laissé au lecteur ; en fait il s'agit toujours de démonstrations absolument standard de théorie des fibrés principaux : réduction du groupe structural, torsion, ...

5.1. — Rappelons (Exp. XXI, 7.4) qu'un diagramme de Dynkin est réunion disjointe de ses composantes connexes, qui sont des diagrammes de Dynkin. De plus, tout diagramme de Dynkin connexe non vide correspondant à une donnée radicielle est isomorphe à l'un des diagrammes type (A_n, B_n, \dots, G_2) qui ont été exhibés en Exp. XXI, 7.4.6. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des diagrammes de Dynkin dont les composantes connexes sont de l'un des types précédents. Soit \mathbf{T} l'ensemble de ces diagrammes type. Pour tout diagramme de Dynkin D , soit $n(\mathbf{t}) = n_D(\mathbf{t})$ le nombre de composantes connexes de D isomorphes à \mathbf{t} , où $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$. Le type de D est par définition $\sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} n_D(\mathbf{t}) \mathbf{t}$.

371

Un diagramme de Dynkin de type \mathbf{t} est dit *simple* de type \mathbf{t} , un diagramme de Dynkin de type $n \mathbf{t}$ est dit *isotypique* de type \mathbf{t} . Soit D_0 l'ensemble des composantes connexes de D et soit

$$a : D_0 \longrightarrow \mathbf{T}$$

l'application évidente. Le type de D n'est autre que $\sum_{x \in D_0} a(x)$.

5.2. — Soient S un schéma, D un *S-schéma de Dynkin* (vérifiant la condition restrictive énoncée ci-dessus). Le conoyau du couple de morphismes $L \rightrightarrows D$ ($L =$ ⁽²⁷⁾ schéma des liaisons de D) est noté D_0 . C'est le « schéma des composantes connexes » de D (il

⁽²⁷⁾N.D.E. : On a remplacé R par L , comme dans 3.2.

existe trivialement lorsque D est constant ; le cas général s'en déduit par descente) ; c'est un S -schéma constant tordu fini. On a un morphisme canonique

$$a : D_0 \longrightarrow \mathbf{T}_S .$$

Pour $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, posons $a^{-1}(\mathbf{t}) = D_{0,\mathbf{t}}$; c'est un sous-schéma de D_0 , dont l'image réciproque dans D , notée $D_{\mathbf{t}}$, est la *composante isotypique* de type \mathbf{t} du schéma de Dynkin D . Chaque $D_{\mathbf{t}}$ est un sous-schéma de D , et on a

$$D = \coprod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} D_{\mathbf{t}} .$$

Remarquons que le degré de $D_{0,\mathbf{t}}$ en $s \in S$ est $n(s, \mathbf{t})$, si le type de D en s est $\sum_{\mathbf{t}} n(s, \mathbf{t}) \mathbf{t}$.

5.3. — Dans la suite, nous ne considérerons que des groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes). Pour simplifier le langage, nous énoncerons les résultats pour des groupes adjoints ; *tous les énoncés resteront valables* si on y substitue partout *simplement connexe* à *adjoint*.

Rappelons qu'une donnée radicielle réduite adjointe est déterminée à isomorphisme près par le type de ses diagrammes de Dynkin. On dira donc qu'une donnée radicielle adjointe \mathcal{R} (resp. un groupe semi-simple adjoint G) est de type $\sum n(\mathbf{t}) \mathbf{t}$ si ses diagrammes de Dynkin le sont (resp. si son type est donné par une donnée radicielle adjointe de type $\sum n(\mathbf{t}) \mathbf{t}$). On dira que \mathcal{R} ou G est *simple* de type \mathbf{t} (resp. *isotypique* de type \mathbf{t}), si son type est \mathbf{t} (resp. $n \mathbf{t}$, $n > 0$).

Si G est un groupe semi-simple adjoint, on utilisera les symboles $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ et $\underline{\text{Dyn}}_{0,\mathbf{t}}(G)$ dans le sens défini en 5.2.

5.4. — Soient \mathbf{t}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, des éléments distincts de \mathbf{T} , et soit \mathcal{R}_i une donnée radicielle adjointe épinglée isotypique de type \mathbf{t}_i . Considérons le produit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_n$ (Exp. XXI, 6.4.1). Soit S un schéma tel que les différents $\text{Ép}_S(\mathcal{R}_i)$ existent (cf. Exp. XXV). On vérifie aussitôt qu'il existe un isomorphisme canonique

$$(*) \quad \text{Ép}_S(\mathcal{R}) = \text{Ép}_S(\mathcal{R}_1) \times_S \dots \times_S \text{Ép}_S(\mathcal{R}_n).$$

373 De plus, si E_i désigne le groupe des automorphismes de \mathcal{R}_i , E le groupe des automorphismes de \mathcal{R} , D_i (resp. D) le diagramme de Dynkin de \mathcal{R}_i (resp. \mathcal{R}), on a des isomorphismes :

$$E_i \simeq \text{Aut}(D_i), \quad D = \coprod D_i, \quad E \simeq \coprod E_i \simeq \text{Aut}(D).$$

Combinant avec (*) et 1.4, on voit que (*) induit un isomorphisme

$$A_S(\mathcal{R}) \simeq A_S(\mathcal{R}_1) \times_S \dots \times_S A_S(\mathcal{R}_n).$$

Proposition 5.5. — Soient S un schéma, G un S -groupe semi-simple adjoint. Il existe une décomposition unique

$$G \simeq \coprod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} G_{\mathbf{t}} ,$$

où $G_{\mathfrak{t}}$ est un S -groupe semi-simple adjoint isotypique de type \mathfrak{t} . De plus, la décomposition précédente induit des isomorphismes

$$\underline{\text{Dyn}}_{\mathfrak{t}}(G) \simeq \underline{\text{Dyn}}(G_{\mathfrak{t}}), \quad \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \simeq \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G_{\mathfrak{t}}).$$

Cela a en effet été démontré ci-dessus lorsque G est déployé. Dans le cas général, on peut supposer G de type constant \mathcal{R} . Utilisant la décomposition précédente de $A_S(\mathcal{R})$ et 1.17, on en déduit la décomposition voulue de G . Les autres résultats se prouvent alors par descente.

Remarque 5.6. — Plus généralement, si G et H sont deux groupes semi-simples adjoints, on a comme suit des isomorphismes canoniques (le diagramme est commutatif) :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \underline{\text{Isom}}_{S\text{-gr.}}(G_{\mathfrak{t}}, H_{\mathfrak{t}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Isomext}}(G, H) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \underline{\text{Isomext}}(G_{\mathfrak{t}}, H_{\mathfrak{t}}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{\text{Isom}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G), \underline{\text{Dyn}}(H)) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \underline{\text{Isom}}_{\text{Dyn}}(\underline{\text{Dyn}}(G_{\mathfrak{t}}), \underline{\text{Dyn}}(H_{\mathfrak{t}})). \end{array}$$

Remarque 5.7. — On peut donner une caractérisation intrinsèque de $G_{\mathfrak{t}}$, que nous énonçons ci-après sans démonstration : c'est le plus grand sous-groupe réductif de G *invariant* (et d'ailleurs caractéristique) et isotypique de type \mathfrak{t} .

La proposition précédente permet de ramener l'étude des groupes semi-simples adjoints à celle des groupes semi-simples adjoints isotypiques. C'est cette étude que nous allons faire ci-dessous.

5.8. — Soient \mathcal{R} une donnée radicielle réduite épinglée adjointe *simple* de type \mathfrak{t} , I un ensemble fini non vide, \mathcal{R}^I la donnée radicielle produit de copies \mathcal{R}_i de \mathcal{R} , pour $i \in I$. Notons E le groupe des automorphismes de \mathcal{R} , qui s'identifie au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin D de \mathcal{R} . Le diagramme de Dynkin de \mathcal{R}^I s'identifie à D^I , ce qui montre que l'on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \text{Aut}(D)^I \longrightarrow \text{Aut}(D^I) \longrightarrow \text{Aut}(I) \longrightarrow 1,$$

où $\text{Aut}(I)$ désigne le groupe des permutations de I . Il s'ensuit que l'isomorphisme canonique

$$\text{Ép}_S(\mathcal{R})^I \simeq \text{Ép}_S(\mathcal{R}^I)$$

induit une suite exacte

$$1 \longrightarrow A_S(\mathcal{R})^I \longrightarrow A_S(\mathcal{R}^I) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(I_S) \longrightarrow 1,$$

le dernier groupe étant le S -groupe constant associé à $\text{Aut}(I)$. Remarquons d'autre part que I s'identifie canoniquement à l'ensemble des composantes connexes de D^I .

374

375

Si G est un S -groupe semi-simple de type \mathcal{R}^I , définissant (cf. 1.17) un fibré principal homogène P sous $A_S(\mathcal{R}^I)$, la définition de $\underline{\text{Dyn}}(G)$ par descente (3.7), et celle de $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ (5.2), montre que le fibré associé à P par le morphisme $A_S(\mathcal{R}^I) \rightarrow \underline{\text{Aut}}(I_S)$ n'est autre que $\underline{\text{Isom}}_S(I_S, \underline{\text{Dyn}}_0(G))$, correspondant à la forme $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ de I_S . Utilisant à nouveau l'équivalence de catégories 1.17 et la suite exacte précédente, on en déduit par un raisonnement formel qu'il existe un $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ -groupe réductif de type \mathcal{R} , soit G_0 , et un S -isomorphisme $G \simeq \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} G_0$.

Proposition 5.9. — Soient S un schéma, G un S -groupe semi-simple adjoint isotypique de type \mathfrak{t} . Il existe un $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ -groupe semi-simple adjoint G_0 simple de type \mathfrak{t} , et un S -isomorphisme (uniques)

$$G \simeq \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} G_0.$$

De plus, cet isomorphisme induit une suite exacte

$$1 \longrightarrow \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G_0) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_S(\underline{\text{Dyn}}_0(G)) \longrightarrow 1.$$

376 On peut évidemment supposer G de type constant $n \mathfrak{t}$. La première assertion a déjà été démontrée (l'assertion d'unicité est évidente). La seconde se déduit alors du cas déployé par descente.

On peut regrouper 5.5 et 5.9 :

Proposition 5.10. — Soient S un schéma, G un S -groupe semi-simple adjoint, $\mathfrak{D} = \underline{\text{Dyn}}(G)$ son schéma de Dynkin.

(i) Il existe une décomposition canonique

$$G \simeq \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,\mathfrak{t}}/S} G_{0,\mathfrak{t}} \simeq \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} G_0,$$

où chaque $G_{0,\mathfrak{t}}$ est un $\underline{\text{Dyn}}_{0,\mathfrak{t}}(G)$ -groupe simple adjoint de type \mathfrak{t} (resp. où G_0 est un $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ -groupe semi-simple adjoint dont le type en $x \in \underline{\text{Dyn}}_0(G)$ est $a(x) \in \mathbf{T}$ (le morphisme $a : \underline{\text{Dyn}}_0(G) \rightarrow \mathbf{T}_S$ a été défini en 5.2)).

(ii) Les décompositions précédentes induisent des suites exactes isomorphes (notées verticalement), où $\underline{\text{Aut}}_{S,a}(\mathfrak{D}_0)$ désigne le schéma des automorphismes de $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ qui commutent au morphisme $a : \underline{\text{Dyn}}_0(G) \rightarrow \mathbf{T}_S$:

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & 1 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,\mathfrak{t}}/S} \underline{\text{Aut}}_{\text{gr.}}(G_{0,\mathfrak{t}}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} \underline{\text{Aut}}_{\text{gr.}}(G_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) & \longrightarrow & \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \underline{\text{Aut}}_S(\underline{\text{Dyn}}_{0,\mathfrak{t}}(G)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Aut}}_{S,a}(\underline{\text{Dyn}}_0(G)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 & & 1
 \end{array}$$

Corollaire 5.11. — *Sous les conditions précédentes, les trois catégories suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la catégorie des fibrés principaux homogènes sous G .*
- (ii) *la catégorie des fibrés principaux homogènes sous G_0 .*
- (iii) *la catégorie produit, pour $\mathfrak{t} \in \mathbf{T}$, des catégories des fibrés principaux homogènes sous les $G_{0,\mathfrak{t}}$.*

Cela se déduit formellement des décompositions précédentes et de 8.4.

Corollaire 5.12. — *On a des isomorphismes canoniques*

$$\underline{\text{Tor}}(G) \simeq \prod_{\mathfrak{t} \in \mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,\mathfrak{t}}/S} \underline{\text{Tor}}(G_{0,\mathfrak{t}}) \simeq \prod_{\underline{\text{Dyn}}_0(G)/S} \underline{\text{Tor}}(G_0),$$

et de même en remplaçant $\underline{\text{Tor}}$ par $\underline{\text{Bor}}$ (resp. $\underline{\text{Kil}}$).

Trivial à partir du cas déployé.

Remarque 5.13. — *Le morphisme canonique*

$$\underline{\text{Dyn}}(G) \longrightarrow \underline{\text{Dyn}}_0(G)$$

permet de considérer $\underline{\text{Dyn}}(G)$ comme un $\underline{\text{Dyn}}_0(G)$ -schéma de Dynkin ; en fait c'est le schéma de Dynkin $\underline{\text{Dyn}}(G_0)$ de G_0 .

De même si $T \subset \mathbb{B}$ est un couple de Killing de G , correspondant canoniquement au couple de Killing $T_0 \subset \mathbb{B}_0$ de G_0 , on vérifie que les obstructions au quasi-déploiement de G et G_0 , qui se trouvent (3.9) dans $\text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G)) = \text{Pic}(\underline{\text{Dyn}}(G_0))$ coïncident. On en déduit :

Corollaire 5.14. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *G est quasi-déployable,*

- (ii) G_0 est quasi-déployable,
 (iii) chaque $G_{0,\mathfrak{t}}$, $\mathfrak{t} \in \mathbf{T}$, est quasi-déployable.

6. Automorphismes des sous-groupes de Borel des groupes réductifs

Lemme 6.1. — Soient S un schéma, (G, T, M, R) un S -groupe déployé, Δ un système de racines simples de R , et B le sous-groupe de Borel correspondant. Alors B^u est engendré comme faisceau (fppf) en groupes par les U_α , $\alpha \in \Delta$.

Soit H le sous-faisceau en groupes de B^u engendré par les U_α , $\alpha \in \Delta$. Prouvons $H \supset U_\beta$ ($\beta \in R_+$) par récurrence sur l'entier $\text{ord}(\beta) = \text{ord}_\Delta(\beta) > 0$ (cf. Exp. XXI, 3.2.15). L'assertion est vérifiée par hypothèse pour $\text{ord}(\beta) = 1$. Supposons donc $\text{ord}(\beta) > 1$ et $U_\gamma \subset H$ dès que $\text{ord}(\gamma) < \text{ord}(\beta)$. Il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $\beta - \alpha \in R_+$ (Exp. XXI, 3.1.1). Soit p le plus grand entier tel que $\beta - p\alpha = \beta' \in R_+$. On a $U_\alpha, U_{\beta'} \subset H$, $\beta' - \alpha \notin R$. On est donc ramené à prouver :

Lemme 6.2. — Reprenons les notations de Exp. XXIII, 6.4. Supposons $p = 1$, c'est-à-dire $\beta - \alpha$ non racine. Si H est un sous-faisceau en groupes de B^u tel que $U_\alpha, U_\beta \subset H$, alors $U_{i\alpha + j\beta} \subset H$ chaque fois que $i\alpha + j\beta \in R$, $i > 0$, $j > 0$.

Distinguons quatre cas suivant la valeur de $q = 0, 1, 2, 3$. Dans la suite x et y désignent deux sections arbitraires de $\mathbb{G}_{a,S'}$, $S' \rightarrow S$.

Si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer.

379 Si $q = 1$, on a $p_{\alpha+\beta}(\pm x) = p_\beta(-y)p_\alpha(-x)p_\beta(y)p_\alpha(x) \in H(S')$, donc $U_{\alpha+\beta} \subset H$.

Si $q = 2$, on a de même

$$p_{\alpha+\beta}(\pm xy)p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2y) = p_\beta(-y)p_\alpha(-x)p_\beta(y)p_\alpha(x) \in H(S'),$$

d'où, quitte à changer certains signes

$$F(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y) \in H(S').$$

Comme $p_{\alpha+\beta}$ et $p_{2\alpha+\beta}$ commutent, on a alors $F(x, 1)F(1, -x) = p_{2\alpha+\beta}(x^2 - x)$.⁽²⁸⁾ Si $a \in \mathbb{G}_a(S)$, l'équation $X^2 - X = a$ définit une extension libre et surjective de S (c'est $\text{Spec } \mathcal{O}_S[X]/(X^2 - X - a)$); on a donc $p_{2\alpha+\beta}(a) \in H(S')$ donc $U_{2\alpha+\beta} \subset H$, donc aussi $U_{\alpha+\beta} \subset H$ (car $F(1, a) \in H(S')$).

Si $q = 3$, on a de même

$$F(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y)p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2) \in H(S');$$

et comme

$$p_{3\alpha+2\beta}(\pm x) = F(1, 1)^{-1}p_\beta(-x)F(1, 1)p_\beta(x) \in H(S'),$$

on obtient que $U_{3\alpha+2\beta} \subset H$ et donc

$$K(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y) \in H(S').$$

Calculant alors

$$K(x + y, 1)K(-x, 1)K(1, y)^{-1}$$

⁽²⁸⁾N.D.E. : On a corrigé $F(-1, x)$ en $F(1, -x)$.

modulo $U_{3\alpha+2\beta}$, on trouve

$$p_{2\alpha+\beta}(2x^2 + y^2 + 2xy - y)p_{3\alpha+\beta}(y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - y) \in H(S').$$

Si $a \in \mathbb{G}_a(S)$, les « équations »

$$\begin{aligned} x^2 &= -xy - y + 1 - a \\ y^2 &= 3y - 2 + 3a \end{aligned}$$

définissent une extension libre et surjective de S ; on a alors $y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - y = 0$ et l'expression précédente donne $p_{2\alpha+\beta}(a) \in H(S')$.⁽²⁹⁾ On a donc prouvé que H contient $U_{2\alpha+\beta}$ et $U_{3\alpha+2\beta}$ et que 380

$$E(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{3\alpha+\beta}(x^3y) \in H(S').$$

Comme $p_{\alpha+\beta}(xy)$ et $p_{3\alpha+\beta}$ commutent, on est ramené au calcul précédent, c.-à-d., $E(1, x)E(1, -x) = p_{3\alpha+\beta}(x^3 - x)$, d'où $U_{3\alpha+\beta} \subset H$, puis $U_{\alpha+\beta} \subset H$.

Remarque 6.2.1. — La démonstration précédente montre qu'on aurait pu remplacer l'hypothèse « H contient U_α et U_β » par « H contient U_α ou U_β , et H est invariant sous $\text{int}(U_\alpha)$ et $\text{int}(U_\beta)$ ».

Théorème 6.3. — Soient S un schéma, G et G' deux S -groupes semi-simples, B (resp. B') un sous-groupe de Borel de G (resp. G'). Tout isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} B'$ est induit par un unique isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$.

L'assertion est locale pour la topologie étale et on peut supposer G déployé : $G = (G, T, M, R)$, B étant défini par le système de racines positives R_+ de R . L'isomorphisme donné $u : B \xrightarrow{\sim} B'$ induit un isomorphisme de T sur un tore maximal T' de B' , donc de G' . L'isomorphisme donné $T \simeq D_S(M)$ donne un isomorphisme $T' \simeq D_S(M)$ dans lequel les éléments de R_+ deviennent les racines constantes de B' par rapport à T' , donc les éléments de R les racines constantes de G' par rapport à T' . Comme G et G' sont semi-simples, les coracines sont déterminées par dualité (Exp. XXI, 1.2.5), ce qui prouve que (T', M, R) est un déploiement de G' tel que $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G')$.

Appliquant Exp. XXIII, 5.1 (Théorème d'unicité), on en déduit qu'il existe un unique isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$ coïncidant avec u sur T et les U_α , $\alpha \in \Delta$. Par 5.1, la restriction de cet isomorphisme à B est u . 381
C.Q.F.D.

Remarque 6.3.1. — (i) Utilisant Exp. XXII, 4.1.9 et raisonnant comme dans *loc. cit.* 4.2.12, on peut dans l'énoncé du théorème remplacer « isomorphisme » par « isogénie » (resp. « isogénie centrale »).

(ii) Le théorème est faux pour les groupes réductifs. Prendre par exemple $G = G' = \text{SL}_2 \times \mathbb{G}_m$ identifié au groupe des matrices suivantes :

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & h \end{array} \right) \mid ad - bc = 1, h \text{ inversible} \right\};$$

⁽²⁹⁾N.D.E. : On a corrigé $p_{3\alpha+\beta}(a)$ en $p_{2\alpha+\beta}(a)$, et détaillé la fin de l'argument.

prendre pour $B = B'$ le sous-groupe de Borel défini par $c = 0$ et pour u l'automorphisme de B suivant : $u(a, b, d, h) = (a, b, d, ah)$.

Corollaire 6.4. — *Le foncteur $(G, B) \mapsto B$ de la catégorie formée des couples (G, B) , où G est un S -groupe semi-simple et B un sous-groupe de Borel de G , dans la catégorie des S -schémas en groupes (les morphismes sont les isomorphismes) est pleinement fidèle.*

Corollaire 6.5. — *Soient S un schéma, G un S -groupe semi-simple, B un sous-groupe de Borel de G , B' un S -groupe localement isomorphe à B pour (fpqc). Alors B' est localement isomorphe à B pour la topologie étale finie locale ⁽³⁰⁾ et il existe un S -groupe semi-simple G' dont B' soit un groupe de Borel ; G' est unique à un unique isomorphisme près induisant l'identité sur B' .*

382 **Corollaire 6.6.** — *Soient S un schéma, G un S -groupe semi-simple, B un sous-groupe de Borel de G . Alors $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(B)$ est représentable par un S -schéma affine et lisse, $\underline{\text{Autext}}(B)$ est représentable par un S -schéma étale et fini, et les morphismes évidents induisent un isomorphisme de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & B_{\text{ad}} & \longrightarrow & \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G, B) & \longrightarrow & \underline{\text{Autext}}(G) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 1 & \longrightarrow & B_{\text{ad}} & \longrightarrow & \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(G) & \longrightarrow & \underline{\text{Autext}}(B) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Cela résulte aussitôt de 2.1 et des résultats précédents. On laisse au lecteur le soin de développer les analogues des résultats des N^{os} 1,2,3,4 dans le cadre ci-dessus.

383 **Remarque 6.7.** — Si S est un schéma et B un S -groupe, B ne peut donc être sous-groupe de Borel que d'un unique groupe semi-simple, bien déterminé par B . Il reste donc à caractériser les S -groupes B qui sont bien sous-groupes de Borel de groupes semi-simples. ⁽³¹⁾

7. Représentabilité des foncteurs $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$, pour G réductif

7.1. Le cas déployé

7.1.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe épinglé, T son tore maximal, Δ l'ensemble des racines simples et, pour $\alpha \in \Delta$,

$$u_\alpha \in U_\alpha^\times(S), \quad w_\alpha \in \underline{\text{Norm}}_G(T)(S),$$

les éléments définis par l'épinglage.

⁽³⁰⁾N.D.E. : notée (étf) dans Exp. IV 6.3. En d'autres mots, pour tout $s \in S$ il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme étale fini surjectif $V \rightarrow U$ tel que $B' \times_S V \simeq B \times_S V$.

⁽³¹⁾N.D.E. : On peut se demander si tout S -groupe affine lisse, dont chaque fibre géométrique est un sous-groupe de Borel d'un groupe semi-simple, est un sous-groupe de Borel d'un S -groupe semi-simple. (On a supprimé le « contre-exemple » donné dans l'original, pour $S =$ le schéma des nombres d'au-dessus sur un corps k , qui était erroné, comme nous l'a signalé M. Demazure.)

Soit d'autre part H un S -schéma en groupes ; nous nous intéressons au foncteur $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$, et plus précisément au morphisme

$$q : \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(T, H).$$

Soit donc

$$f_T : T \longrightarrow H$$

un morphisme de S -groupes, considérons $q^{-1}(f_T) = \mathcal{F}$. C'est le foncteur défini par

$$\mathcal{F}(S') = \{f \in \text{Hom}_{\text{S'-gr.}}(G_{S'}, H_{S'}) \mid f = (f_T)_{S'} \text{ sur } T_{S'}\}.$$

On a un morphisme de S -foncteurs

384

$$i : \mathcal{F} \longrightarrow H^{2n},$$

où $n = \text{Card}(\Delta)$, défini ensemblistement par $i(f) = (f(u_\alpha), f(w_\alpha))_{\alpha \in \Delta}$. En vertu de Exp. XXIII, 1.9, i est d'ailleurs un monomorphisme.

Proposition 7.1.2. — *Si H est séparé sur S , \mathcal{F} est représentable et i est une immersion fermée.*

La technique habituelle de représentabilité relative ⁽³²⁾ nous montre qu'il suffit de prouver qu'étant données des sections

$$v_\alpha, h_\alpha \in H(S), \quad \text{pour } \alpha \in \Delta,$$

les S -schémas S' tels qu'il existe un S' -homomorphisme

$$f : G_{S'} \longrightarrow H_{S'}$$

prolongeant $(f_T)_{S'}$ et vérifiant $f(u_\alpha) = v_\alpha, f(w_\alpha) = h_\alpha$, sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-schéma fermé de S . On peut évidemment supposer S affine.

Pour simplifier la suite, disons qu'un morphisme $Y \rightarrow X$ ⁽³³⁾ de schémas affines vérifie la condition (L) si Y est le spectre d'une $\mathcal{O}(X)$ -algèbre qui est un $\mathcal{O}(X)$ -module libre. Il est clair que si l'on se restreint à la catégorie des schémas affines, un produit, ou un composé de morphismes vérifiant (L) vérifie (L) et que (L) est stable par extension de la base.

Lemme 7.1.3. — *Supposons S affine, et soit $\alpha \in \Delta$. Considérons le morphisme*

$$a : T \times_S T \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}$$

défini ensemblistement par $a(t, t') = \alpha(t) + \alpha(t')$.

385

(i) *a est fidèlement plat et de présentation finie.*

(ii) *Soit R le carré fibré de a . Le morphisme structural $R \rightarrow S$ vérifie (L).*

⁽³²⁾N.D.E. : Voir par exemple la démonstration de XXII 5.8.1.

⁽³³⁾N.D.E. : On a corrigé $X \rightarrow Y$ en $Y \rightarrow X$.

Il est d'abord clair que le morphisme a est surjectif, $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$ l'étant. Il est trivial que a est de présentation finie. Comme α vérifie (L), il suffit, pour prouver (i) et (ii) de montrer que le morphisme

$$u : \mathbb{G}_{m,S}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_{a,S}$$

défini ensemblistement par $u(x, y) = x+y$ vérifie (L). Autrement dit, il suffit de vérifier que pour tout anneau A , l'anneau $A[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ est un module libre sur son sous-anneau $A[X+Y]$.⁽³⁴⁾ Or $A[X, Y]$ est un module libre de base $\{1, X\}$ sur le sous-anneau $B = A[X+Y, XY]$ (on a $X^2 - (X+Y)X + XY = 0$), donc $A[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}] = A[X, Y]_{XY}$ est libre sur $B_{XY} = A[X+Y, (XY)^{\pm 1}]$ de base $\{1, X\}$, et libre sur $A[X+Y]$ de base les éléments $(XY)^p$ et $X(XY)^p$, pour $p \in \mathbb{Z}$.

386

Lemme 7.1.4. — Soit $\alpha \in \Delta$, et soit $b : T \times_S T \rightarrow H$ le morphisme défini ensemblistement par

$$b(t, t') = (\text{int}(f_T(t))v_\alpha)(\text{int}(f_T(t'))v_\alpha).$$

Soit $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow H$ un S -morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :⁽³⁵⁾

(i) f_α est un morphisme de groupes ; on a $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$ et

$$f_T(t)f_\alpha(x)f_T(t)^{-1} = f_\alpha(\alpha(t)x)$$

pour tous $t \in T(S')$, $x \in U_\alpha(S')$, $S' \rightarrow S$.

(ii) On a $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$ et la relation

$$f_\alpha(a(t, t')u_\alpha) = b(t, t')$$

pour tous $t, t' \in T(S')$, $S' \rightarrow S$.

Si f_α vérifie (i), on a $f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha) = \text{int}(f_T(t))v_\alpha$, ce qui entraîne aussitôt (ii). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée et démontrons les différentes conditions de (i) ; prouvons d'abord la dernière. Comme a est couvrant pour (fpqc), il suffit de prouver que si $t, t', t'' \in T(S')$, on a

387

$$f_T(t)f_\alpha(a(t', t'')u_\alpha)f_T(t)^{-1} = f_\alpha(\alpha(t)a(t', t'')u_\alpha);$$

or ceci s'écrit aussi

$$f_T(t)b(t', t'')f_T(t)^{-1} = b(tt', tt''),$$

propriété évidente sur la définition de b . Reste à prouver que f_α est un morphisme de groupes. Or la propriété précédente donne aussitôt

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha)f_\alpha(\alpha(t')u_\alpha) &= (f_T(t)f_\alpha(u_\alpha)f_T(t)^{-1}) \cdot (f_T(t')f_\alpha(u_\alpha)f_T(t')^{-1}) \\ &= b(t, t') = f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha + \alpha(t')u_\alpha). \end{aligned}$$

On a donc $f_\alpha(x + x') = f_\alpha(x)f_\alpha(x')$, chaque fois que x et x' sont des sections de l'ouvert U_α^\times de U_α , qui est schématiquement dense ; on conclut alors par Exp. XVIII, 1.4.

⁽³⁴⁾N.D.E. : On a simplifié la démonstration de l'original.

⁽³⁵⁾N.D.E. : Dans ce qui suit, la loi de groupe de U_α est notée additivement, c.-à-d., si l'on note $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ l'isomorphisme tel que $p_\alpha(1) = u_\alpha$ et si $x = p_\alpha(z)$, alors $\alpha(t)x$ (resp. $a(t, t')u_\alpha$) désigne $p_\alpha(\alpha(t)z)$ (resp. $p_\alpha(a(t, t')) = \alpha(t)u_\alpha + \alpha(t')u_\alpha$).

7.1.5. — Fixons-nous provisoirement un $\alpha \in \Delta$. Le morphisme a est fidèlement plat quasi-compact, donc $\mathbb{G}_{a,S}$ s'identifie au quotient de $T \times_S T$ par la relation d'équivalence R définie par a . Soit

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1} \\ \xrightarrow{i_2} \end{array} T \times_S T$$

cette relation d'équivalence.

Pour que le morphisme b se factorise par a , ⁽³⁶⁾ il faut et il suffit que $b \circ i_1 = b \circ i_2$; autrement dit, si on note K le noyau du couple de morphismes

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{b \circ i_1} \\ \xrightarrow{b \circ i_2} \end{array} H,$$

il faut et il suffit que $K = R$. Or H est supposé séparé sur S , donc K est un sous-schéma fermé de R . Rappelons, d'autre part, que R est essentiellement libre sur S (7.1.3).

7.1.6. — D'après ce qui précède, si S' est un S -schéma, pour qu'il existe sur S' un f_α 388 vérifiant les conditions de 7.1.4 (i) (et alors nécessairement unique), il faut et il suffit que $K_{S'} = R_{S'}$, et que le morphisme f_α obtenu vérifie $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$.

La première condition est équivalente au fait que $S' \rightarrow S$ se factorise par un certain sous-schéma fermé de S (Exp. VIII, 6.4 ⁽³⁷⁾); si on remplace S par ce sous-schéma fermé, la seconde condition définit à nouveau un sous-schéma fermé de S (égalité de deux sections de H , or H est supposé séparé sur S).

Quitte à remplacer S par ce sous-schéma fermé, on peut donc supposer qu'il existe un morphisme $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow H$ vérifiant les conditions de 7.1.4 (i). Prenant l'intersection des sous-schémas de S obtenus pour chaque $\alpha \in \Delta$, on peut supposer cette condition vérifiée pour tout $\alpha \in \Delta$.

7.1.7. — De même, considérons pour chaque $\alpha \in \Delta$ les deux morphismes de S -groupes

$$f_T \circ \text{int}(w_\alpha), \quad \text{int}(h_\alpha) \circ f_T : T \longrightarrow H.$$

Comme H est séparé sur S et T essentiellement libre sur S , le même raisonnement que précédemment montre que, quitte à remplacer S par un sous-schéma fermé, on peut supposer que pour tout $\alpha \in \Delta$ on a

$$f_T \circ \text{int}(w_\alpha) = \text{int}(h_\alpha) \circ f_T.$$

7.1.8. — Utilisant maintenant le théorème de générateurs et relations (Exp. XXIII, 3.5), on voit qu'il existe un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow H$ vérifiant les 389 conditions exigées si et seulement si un certain ensemble fini de relations algébriques entre les sections $h_\alpha, v_\alpha, f_T(\alpha^*(-1))$ ($\alpha \in \Delta$) de H est vérifié :

$$R_i \left((h_\alpha)_\alpha, (v_\alpha)_\alpha, (f_T(\alpha^*(-1)))_\alpha \right) = e, \quad i = 1, \dots, n$$

⁽³⁶⁾N.D.E. : i.e. pour que la condition (ii) de 7.1.4 soit satisfaite.

⁽³⁷⁾N.D.E. : voir aussi l'ajout dans Exp. VI_B, 6.2.3.

Comme H est séparé sur S , cela définit encore un sous-schéma fermé de S , et on a terminé.

Corollaire 7.1.9. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif déployé, T son tore maximal, H un S -schéma en groupes séparé sur S . Soit d'autre part \mathcal{P} une propriété de morphismes telle que :

- (i) Une immersion fermée vérifie \mathcal{P} .
- (ii) Le composé de deux morphismes vérifiant \mathcal{P} vérifie aussi \mathcal{P} .
- (iii) \mathcal{P} est stable par changement de base.
- (iv) Le morphisme structural $H \rightarrow S$ vérifie \mathcal{P} .

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, H)$$

est relativement représentable par un morphisme séparé vérifiant \mathcal{P} . ⁽³⁸⁾

En effet, on peut supposer G épinglé ; le morphisme structural $H^{2n} \rightarrow S$ vérifie \mathcal{P} et on conclut par 7.1.2.

Corollaire 7.1.10. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif déployé, et H un S -schéma en groupes lisse et à fibres affines ⁽³⁹⁾. Alors le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S -schéma localement de présentation finie et séparé sur S .

390 En effet, comme H est lisse S , on peut considérer sa composante neutre H^0 , qui est à fibres affines, lisse, séparée et de présentation finie sur S (Exp. VI_B, 3.10 et 5.5). Comme G est à fibres connexes, on peut remplacer H par H^0 . Comme G et H sont alors de présentation finie, on peut supposer S noethérien, et on applique 7.1.9 en prenant pour \mathcal{P} la propriété « de type fini ». Mais, par Exp. XV, 8.9, on sait que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, H)$ est représentable par un S -schéma séparé et localement de type fini.

Remarque 7.1.11. — Si H est affine sur S , on peut remplacer la référence à Exp. XV par Exp. XI, 4.2.

7.2. Cas général

Proposition 7.2.1. — Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G . Soit d'autre part H un S -schéma en groupes, tel que le morphisme structural $H \rightarrow S$ vérifie la condition suivante :

(+) Chaque point $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel que le morphisme $H_U \rightarrow U$ soit quasi-projectif.

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, H)$$

est relativement représentable par un morphisme vérifiant (+).

⁽³⁸⁾N.D.E. : i.e. pour tout $S' \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(T, H)$, avec S' représentable, $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \times_S S'$ est représentable et le morphisme de S -schémas $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \times_S S' \rightarrow S'$ est séparé et vérifie \mathcal{P} .

⁽³⁹⁾N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que H soit quasi-séparé, qui est superflue.

Lorsque G est déployable relativement à T , on applique 7.1.9 en prenant pour \mathcal{P} la propriété (+) ci-dessus. Lorsque G est localement isotrivial, par exemple semi-simple (4.2.2), on remarque que l’assertion du théorème est locale pour la topologie étale finie locale (en effet, la propriété d’être quasi-projectif est locale pour la topologie étale finie *globale* et assure l’effectivité de la descente pour cette topologie, cf. SGA 1, VIII, 7.7). Enfin, dans le cas général, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.2.2. — *Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, T un tore maximal de G , G' le groupe dérivé de G (Exp. XXII, 6.2), $T' = T \cap G'$ le tore maximal de G' correspondant à T (Exp. XXII, 6.2.8). Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} G & \longleftarrow & G' \\ \uparrow & & \uparrow \\ T & \longleftarrow & T' \end{array}$$

est une somme amalgamée dans la catégorie des S -faisceaux en groupes : c.-à-d., pour tout S -faisceau en groupe H , le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(G, H) & \longrightarrow & \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(G', H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(T, H) & \longrightarrow & \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(T', H). \end{array}$$

En effet, si $\text{rad}(G)$ est le radical de G , alors $\text{rad}(G) \subset T$, donc

$$\text{rad}(G) \cap G' = \text{rad}(G) \cap T' = K,$$

et le produit dans G induit des isogénies (Exp. XXII, 6.2)

$$i : G' \times_S \text{rad}(G) \longrightarrow G, \quad j : T' \times_S \text{rad}(G) \longrightarrow T.$$

Soient $f_{G'} : G' \rightarrow H$, $f_T : T \rightarrow H$, et $f_{T'} : T' \rightarrow H$ des morphismes de S -groupes tels que $f_{G'}|_{T'} = f_T|_{T'} = f_{T'}$. Montrons qu’il existe un unique morphisme de S -groupes $f : G \rightarrow H$ induisant $f_{G'}$ et f_T . Soit $f_{\text{rad}} = f_T|_{\text{rad}(G)}$ ⁽⁴⁰⁾ et soit

$$f_1 = f_{G'} \cdot f_{\text{rad}} : G' \times_S \text{rad}(G) \longrightarrow H.$$

Pour que f existe (et il sera évidemment unique), il faut et il suffit que f_1 induise l’identité sur le noyau de i , c’est-à-dire que $f_{G'}$ et f_{rad} coïncident sur K ; mais l’existence de f_T montre par le même raisonnement que $f_{T'}$ et f_{rad} coïncident sur K . Il n’y a plus qu’à remarquer que $f_{G'}$ et $f_{T'}$ coïncident évidemment sur $K \subset T'$.

Raisonnant maintenant comme en 7.1.10, on déduit de 7.2.1 :

Corollaire 7.2.3. — *Soient S un schéma, G un S -groupe réductif, H un S -schéma en groupes, lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines. Alors $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S -schéma localement de présentation finie et séparé sur S .*

⁽⁴⁰⁾N.D.E. : On a remplacé f_r par f_{rad} .

7.3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

Si G et H sont deux S -groupes lisses, \mathfrak{g} et \mathfrak{h} leurs algèbres de Lie, on a un morphisme canonique

$$\mathcal{L}ie : \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

où le second membre a une définition évidente.

393 **Proposition 7.3.1.** — Soient S un schéma de caractéristique 0 (i.e. un \mathbb{Q} -schéma), G un S -groupe réductif, H un S -schéma en groupes lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines.

- (i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S -schéma lisse et séparé sur S .
- (ii) Si G est semi-simple, ce schéma est affine et de présentation finie sur S .
- (iii) Si G est simplement connexe (Exp. XXII, 4.3.3), le morphisme canonique

$$\mathcal{L}ie : \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

est un isomorphisme.

Lemme 7.3.2. — Soient k un corps de caractéristique 0, G un k -groupe réductif, V un k -espace vectoriel de dimension finie, $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de G dans V . On a

$$H^0(G, V) = H^0(\mathfrak{g}, V), \quad H^i(G, V) = 0, \quad \text{pour } i > 0.$$

La première égalité est vraie en général pour un groupe lisse et connexe⁽⁴¹⁾ ; dans le cas d'un groupe réductif, on peut la démontrer comme suit : on peut supposer k algébriquement clos, donc G déployable, donc G engendré par des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{G}_{m,k}$ ⁽⁴²⁾, et il suffit de vérifier l'assertion pour ce groupe, ce qui est facile.

394 De cette première égalité résulte que $H^0(G, V)$ est un foncteur exact en V lorsque G est semi-simple ; \mathfrak{g} est en effet alors une algèbre de Lie semi-simple et on applique [BLie], § I.6, exercice 1 (b). L'assertion reste vraie lorsque G est réductif ; en effet, si l'on introduit le radical R de G ⁽⁴³⁾ et le quotient G/R qui est semi-simple, on a $H^0(G, V) = H^0(G/R, H^0(R, V))$, et $H^0(G, -)$ est composé de deux foncteurs exacts. Appliquant alors Exp. I, 5.3.1, on en déduit $H^i(G, V) = 0$ pour $i > 0$.

Remarque 7.3.3. — Sous les conditions précédentes, si G est semi-simple, on a $H^1(\mathfrak{g}, V) = H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$, cf. [BLie], *loc. cit.* (b) et (d).

⁽⁴¹⁾N.D.E. : En effet, il est clair que $V^G \subset V^{\mathfrak{g}}$. D'autre part, $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G(V^{\mathfrak{g}})$ est un sous-groupe fermé de G , lisse puisque $\mathrm{car}(k) = 0$; d'après Exp. II 5.3.1, on a $\mathcal{L}ie(H) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}$, et comme H est lisse et G connexe ceci entraîne $H = G$, d'où $V^{\mathfrak{g}} \subset V^G$ (voir aussi [DG70], § II.6, Prop. 2.1 (c)).

⁽⁴²⁾N.D.E. : En effet, la réunion des tores maximaux de G est dense dans G , cf. Bible, § 6.5, Th. 5 (= [Ch05], § 6.6, Th. 6).

⁽⁴³⁾N.D.E. : Noter que R est un tore.

7.3.4. — Démontrons maintenant la proposition. Déjà, par 7.2.3, $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est représentable par un S-schéma localement de présentation finie et séparé sur S ; pour montrer qu'il est lisse, il suffit de prouver qu'il est infinitésimalement lisse (Exp. XI, 1.8)⁽⁴⁴⁾, ce qui résulte de Exp. III, 2.8 (i) par 7.3.2. On a donc prouvé (i).

Montrons que (ii) résulte de (iii). Il suffit d'abord de prouver que $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est affine sur S, il sera alors de présentation finie sur S, car il est lisse sur S par (i) ; de toutes façons $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est représentable par un sous-schéma fermé de

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-mod.}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \simeq W(\mathfrak{g}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{h})$$

qui est un S-schéma affine, et la conclusion voulue apparaît lorsque G est simplement connexe.

Dans le cas général, on peut supposer G déployé, donc $G \simeq \acute{E}p_S(\mathcal{R})$; introduisant la donnée radicielle simplement connexe $sc(\mathcal{R})$ (Exp. XXI, 6.5.5), et utilisant le théorème d'existence (Exp. XXV, 1.1), on construit un S-groupe simplement connexe \overline{G} et une isogénie centrale $\overline{G} \rightarrow G$. Le noyau K de cette isogénie est un S-groupe diagonalisable fini (donc un S-groupe constant tordu, S étant de caractéristique 0) et $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(K, H)$ est (trivialement) représentable par un S-schéma séparé (si $K \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$, alors $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(K, H)$ est isomorphe à $\text{Ker}(H \xrightarrow{n} H)$). On a une suite exacte de « S-schémas pointés » :

$$1 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H) \xrightarrow{u} \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\overline{G}, H) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(K, H),$$

donc u est une immersion fermée, donc $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est affine sur S.

7.3.5. — Démontrons enfin (iii). Raisonnant comme dans la démonstration de (i) et utilisant 7.3.3, on peut montrer que le S-schéma $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est lisse sur S. Pour démontrer (iii), on peut donc supposer que $S = \text{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; il suffit même de prouver que le morphisme $\mathcal{L}ie$ est bijectif sur les points à valeurs dans k et qu'il induit une bijection sur les espaces tangents en deux points correspondants. Montrons d'abord que

$$\text{Hom}_{k\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \text{Hom}_{k\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

est bijectif.

Si $u : G \rightarrow H$ est un morphisme de k-groupes, le graphe de u est un sous-groupe connexe de $G \times_k H$ qui est déterminé par son algèbre de Lie qui est le graphe de $\mathcal{L}ie(u)$; l'application est donc injective. Réciproquement, si $v : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, le graphe \mathfrak{k} de v est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, isomorphe à \mathfrak{g} . En particulier, comme \mathfrak{g} est sa propre algèbre dérivée, il en est de même de \mathfrak{k} et donc, d'après un théorème de Chevalley ([Ch51], §14, Th. 15), \mathfrak{k} est

⁽⁴⁴⁾N.D.E. : i.e. que pour tout S-schéma S' local artinien, de point fermé s' , tout morphisme de $\kappa(s')$ -groupes $G_{s'} \rightarrow H_{s'}$ se relève en un morphisme de S' -groupes $G_{S'} \rightarrow H_{S'}$. D'après Exp. III 2.8, ceci résulte de la nullité de $H^2(G_{s'}, V)$, où $V = \mathcal{L}ie(H_{s'}/\kappa(s'))$.

l'algèbre de Lie d'un sous-groupe connexe K de $G \times_k H$.⁽⁴⁵⁾ De plus, comme $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}$ est semi-simple, alors G est un k -groupe semi-simple. Comme

$$\dim(K) = \dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$$

et comme $K \cap H$ est fini (car son algèbre de Lie est nulle), le morphisme canonique $\text{pr}_1 : K \rightarrow G$ est fini et dominant; comme G est connexe, pr_1 est surjectif; c'est donc une isogénie. Comme G est simplement connexe et K semi-simple alors, d'après Exp. XXI 6.2.7, pr_1 est un isomorphisme, donc K est le graphe d'un morphisme de k -groupes $u : G \rightarrow H$ tel que $\mathcal{L}ie(u) = v$.

Enfin, soit $u : G \rightarrow H$ un morphisme de k -groupes. L'espace tangent à $\underline{\text{Hom}}_{k\text{-gr.}}(G, H)$ en u s'identifie à $Z^1(G, \mathfrak{h})$ (cf. Exp. II, 4.2; G opère sur \mathfrak{h} par $\text{Ad}_H \circ u$); de la même manière, on peut prouver que l'espace tangent à $\underline{\text{Hom}}_{k\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ en $\mathcal{L}ie(u)$ s'identifie à $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Il nous faut donc prouver que l'application canonique $Z^1(G, \mathfrak{h}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est bijective. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h}^G & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & Z^1(G, \mathfrak{h}) \longrightarrow H^1(G, \mathfrak{h}) \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h}^{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \end{array}$$

et d'après 7.3.2 et 7.3.3 on a $\mathfrak{h}^G = \mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}$ et $H^1(G, \mathfrak{h}) = 0 = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, d'où la conclusion désirée.

Remarque 7.3.6. — Il est vraisemblable que si S est un schéma localement noethérien, G un S -groupe semi-simple simplement connexe, H un S -schéma en groupes lisse, \widehat{G} et \widehat{H} leurs complétés formels le long de la section unité, tout homomorphisme $\widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ provient d'un unique homomorphisme de G dans H , ce qui généraliserait 7.3.1 (iii). Lorsque S est le spectre d'un corps k et H est affine et de type fini, cela résulte d'un théorème de Dieudonné ([Di57], § 15, th. 4).⁽⁴⁶⁾

⁽⁴⁵⁾N.D.E. : voir aussi [Bo91], II 7.9. D'autre part, on a ajouté la phrase qui suit.

⁽⁴⁶⁾N.D.E. : Voir Exp. VII_B pour la définition des groupes formels \widehat{G} et \widehat{H} . Supposons que $S = \text{Spec}(k)$, où k est un corps. D'après *loc. cit.*, 2.2.1, se donner un morphisme de k -groupes formels $v : \widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ équivaut à se donner un morphisme de k -algèbres de Hopf $\phi : \text{Dist}(G) \rightarrow \text{Dist}(H)$, où $\text{Dist}(G)$ désigne l'algèbre des distributions (à l'origine) de G , cf. Exp. VII_A, 2.1 ou [DG70], § II.4, 6.1 ou [Ja87], I 7.7 (elle est appelée « l'hyperalgèbre » de G dans [Di57] et [Ta75]). Le théorème 4 de [Di57] (voir aussi [Ta75], 0.3.4 (f) et (g)) généralise dans ce contexte le théorème de Chevalley utilisé dans 7.3.5; on obtient ainsi qu'il existe un k -sous-groupe fermé connexe K de $G \times H$ tel que \widehat{K} égale le graphe de v ; comme $\text{Dist}(K) \rightarrow \text{Dist}(G)$ est un isomorphisme, $K \rightarrow G$ est un morphisme étale fini. On en déduit alors que K est semi-simple puis, d'après Exp. XXI 6.2.7, que $K \rightarrow G$ est un isomorphisme (puisque G est simplement connexe); voir aussi [Ta75], 1.8 et 2.2. Plus généralement, *loc. cit.* étudie les k -groupes G ayant la propriété (SC) : tout morphisme étale fini de k -groupes $G' \rightarrow G$, avec G' connexe, est un isomorphisme. Notons enfin que ce qui précède montre que tout $\text{Dist}(G)$ -module V de dimension finie est, de façon unique, un G -module; pour une extension au cas d'un k -groupe réductif déployé G (ou même d'un sous-groupe de Borel de G) voir [Ja87], II 1.20 (et les références qui s'y trouvent).

7.4. Un exemple

À titre d'exemple, nous allons déterminer

397

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\text{SL}_{2, \text{S}}, \text{SL}_{2, \text{S}}).$$

7.4.1. — On rappelle (Exp. XX, n°5), que $\text{SL}_{2, \text{S}}$ est le S-schéma en groupes formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur S vérifiant $ad - bc = 1$. Un tore maximal T est défini par le monomorphisme $\alpha^* : \mathbb{G}_{m, \text{S}} \rightarrow \text{SL}_{2, \text{S}}$

$$\alpha^*(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Une racine de G par rapport à T est définie par $\alpha(\alpha^*(z)) = z^2$, un monomorphisme

$$p : \mathbb{G}_{a, \text{S}} \longrightarrow \text{SL}_{2, \text{S}}$$

correspondant étant défini par

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le représentant du groupe de Weyl correspondant à $u = p(1)$ est

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons d'autre part (Exp. XX, 6.2) que $\text{SL}_{2, \text{S}}$ est engendré par T, $p(\mathbb{G}_{a, \text{S}})$ et w , soumis aux relations

398

$$\begin{aligned} \alpha^*(z)p(x)\alpha^*(z^{-1}) &= p(z^2x), \\ w\alpha^*(z)w^{-1} &= \alpha^*(z^{-1}), \\ w^2 &= \alpha^*(-1), \\ (wu)^3 &= 1. \end{aligned}$$

7.4.2. — Soit f un endomorphisme de $\text{SL}_{2, \text{S}}$. Il définit d'abord un homomorphisme $f \circ \alpha^* : \mathbb{G}_{m, \text{S}} \rightarrow \text{SL}_{2, \text{S}}$. Le noyau $\text{Ker}(f \circ \alpha^*)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_{m, \text{S}}$, donc est localement sur S égal à un $\mu_{n, \text{S}}$ ($n \geq 1$) ou à $\mathbb{G}_{m, \text{S}}$. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un monomorphisme

$$f' : \mathbb{G}_{m, \text{S}} \longrightarrow \text{SL}_{2, \text{S}}$$

tels que $f \circ \alpha^*(z) = f'(z^n)$.

En vertu de la conjugaison des monomorphismes $\mathbb{G}_{m, \text{S}} \rightarrow \text{SL}_{2, \text{S}}$, on peut, après une extension de la base couvrante pour la topologie étale, trouver une section g de G telle que $f \circ \alpha^*(z) = \text{int}(g) \circ \alpha^*(z^n)$. Transformant f par $\text{int}(g)$, on est donc ramené au cas où il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \circ \alpha^*(z) = \alpha^*(z^n)$.

7.4.3. — Considérons maintenant le morphisme

$$f \circ p : \mathbb{G}_{a,S} \longrightarrow \mathrm{SL}_{2,S}.$$

Il vérifie la condition

$$\alpha^*(z^n)(f \circ p)(x)\alpha^*(z^n)^{-1} = (f \circ p)(z^2x).$$

Si $n = 0$, il s'ensuit aussitôt que $f \circ p$ est invariant sous les homothéties de $\mathbb{G}_{a,S}$, donc constant. Si $n \neq 0$, on peut appliquer Exp. XXII, 4.1.9 ; $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,S}$, il existe un $\lambda \in \mathbb{G}_{m,S}$ tel que

$$f \circ p(x) = p(\lambda x^n);$$

cette relation est d'ailleurs valable pour $n = 0$, en prenant $\lambda = 1$. Quitte à de nouveau étendre S , on peut trouver un $z \in \mathbb{G}_{m,S}$ tel que $z^2 = \lambda$. Remplaçant f par $\mathrm{int}(\alpha^*(z)) \circ f$, on est donc ramené au cas où l'on a

$$f \circ \alpha^*(z) = \alpha^*(z^n), \quad f \circ p(x) = p(x^n).$$

7.4.4. — Enfin, on doit avoir $f(w)\alpha^*(z^n)f(w)^{-1} = \alpha^*(z^n)^{-1}$ et $(f(w)u)^3 = 1$. En vertu de Exp. XX, 3.8, cela entraîne $f(w) = w^n$. Comme G est engendré par T , $p(\mathbb{G}_{a,S})$ et w cela entraîne que pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(S')$, $S' \rightarrow S$, on a

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}.$$

7.4.5. — Résumant la discussion précédente, on voit que *localement* sur S pour la topologie étale, on peut trouver pour tout endomorphisme f de $\mathrm{SL}_{2,S}$ un automorphisme (intérieur) ϕ de $\mathrm{SL}_{2,S}$, et un entier $n \geq 0$ tel que $f = \phi \circ F_n$, où

$$F_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que si $f = \phi \circ F_n$, l'entier n est bien déterminé par une fibre f_s de f , par exemple par $\mathrm{Ker}(f_s)$. Il s'ensuit que n est une fonction localement constante sur S .

7.4.6. — On en déduit aussitôt que si f est un endomorphisme de $\mathrm{SL}_{2,S}$, alors S se décompose canoniquement en somme de sous-schémas ouverts et fermés S_0, S_1, S_{p^n} (où p^n décrit l'ensemble des puissances > 0 des nombres premiers) tels que :

- (i) f_{S_0} est le morphisme nul,
- (ii) f_{S_1} est un isomorphisme (= un automorphisme intérieur),
- (iii) S_{p^n} est de caractéristique p et $f_{S_{p^n}}$ se décompose de manière unique sous la forme $\phi \circ F_p^n$, où ϕ est un automorphisme intérieur et F_p l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{SL}_{2, \mathbb{F}_p}$.

7.4.7. — En d'autres termes, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}}, \mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}})$ est le schéma somme :

- (i) d'un schéma isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$,
- (ii) d'un schéma isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{ad}(\mathrm{SL}_{2, \mathbb{Z}})$,

(iii) pour chaque nombre premier p et chaque entier $n > 0$ d'un schéma isomorphe à $\underline{\text{Aut}}_{\mathbb{F}_p\text{-gr.}}(\text{SL}_2, \mathbb{F}_p) \simeq \text{ad}(\text{SL}_2, \mathbb{F}_p)$.

7.4.8. — Il s'ensuit en particulier que

(i) $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{F}_p\text{-gr.}}(\text{SL}_2, \mathbb{F}_p, \text{SL}_2, \mathbb{F}_p)$ a un nombre infini de composantes connexes, et donc *n'est pas quasi-compact*.

(ii) Si S est un schéma d'inégales caractéristiques, $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr.}}(\text{SL}_2, S, \text{SL}_2, S)$ *n'est pas plat* sur S .

8. Appendice : Cohomologie d'un groupe lisse sur un anneau hensélien. Cohomologie et foncteur \square

401

Proposition 8.1. — *Soient S un schéma local hensélien, s son point fermé, G un S -schéma en groupes lisse tel que tout sous-ensemble fini de G soit contenu dans un ouvert affine ^(*). Alors*

(i) *Si P est un fibré principal homogène sous G , il existe un $S' \rightarrow S$ étale fini et surjectif qui trivialise P . On a $\text{Fib}(S, G) \simeq H^1_{\text{ét}}(S, G)$.*

(ii) *Pour tout morphisme $S' \rightarrow S$ étale fini et surjectif, l'application canonique*

$$H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S' \otimes_S \kappa(s)/\kappa(s), G_s)$$

est bijective.

(iii) *L'application canonique*

$$\text{Fib}(S, G) \longrightarrow \text{Fib}(\kappa(s), G_s)$$

est bijective.

8.1.2. — Si K est une extension séparable finie de $\kappa(s)$, il existe un $S' \rightarrow S$ étale fini surjectif tel que $K \simeq S' \otimes_S \kappa(s)$. ⁽⁴⁷⁾ Si P est un fibré principal homogène sous G , alors P est lisse sur S , donc P_s lisse sur $\kappa(s)$; il existe donc une extension séparable finie K de $\kappa(s)$ telle que P_K possède une section (cf. EGA IV₄, 17.15.10). Représentant K comme il a été dit ci-dessus, on voit que $P_{S'}$ possède une section par le « lemme de Hensel » (cf. EGA IV₄, 18.5.17), ce qui prouve la première partie de (i).

Réciproquement, si P est un faisceau principal homogène sous G pour la topologie étale, il existe un $S' \rightarrow S$ étale fini surjectif qui trivialise P (en effet toute famille couvrante d'un schéma local hensélien pour la topologie étale est majorée par une famille réduite à un morphisme $S' \rightarrow S$ de la forme voulue).

402

En vertu de l'hypothèse de descente faite sur G , P est représentable (SGA 1, VIII, 7.6), ce qui achève de prouver (i), et montre que (ii) entraîne (iii). Il ne nous reste donc qu'à prouver (ii).

^(*)Cette dernière condition est en fait inutile (cf. A. Grothendieck, *Groupe de Brauer* III, in *Dix Exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, 1968, théorème 11.7 et remarques 11.8.3).

⁽⁴⁷⁾N.D.E. : Noter que S' est encore local et hensélien. D'autre part, on a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°8.1.1.

8.1.3. — L'application de (ii) est injective : soient P et Q deux fibrés principaux homogènes sous G trivialisés par S' . Considérons le S -faisceau en groupes $H = \underline{\text{Isom}}_{G\text{-fibrés}}(P, Q)$; comme $H_{S'}$ est isomorphe à $G_{S'}$, H est représentable, en vertu de la deuxième hypothèse sur G , cf. ci-dessus. Si $H(\kappa(s)) \neq \emptyset$, alors $H(S) \neq \emptyset$ par le lemme de Hensel, donc P et Q sont isomorphes.

8.1.4. — Prouvons enfin que l'application de (ii) est surjective, ou encore que l'application canonique

$$Z^1(S'/S, G) \longrightarrow Z^1(S' \otimes_S \kappa(s)/\kappa(s), G_s)$$

est surjective. Soit \mathbf{Z}^1 le S -foncteur défini par

$$\mathbf{Z}^1(T) = Z^1(S' \times_S T/T, G_T);$$

l'application précédente s'identifie à l'application

$$\mathbf{Z}^1(S) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(\kappa(s));$$

par une nouvelle application du lemme de Hensel, il suffit de prouver que \mathbf{Z}^1 est représentable par un S -schéma lisse.

403 **8.1.5.** — Prouvons que \mathbf{Z}^1 est représentable par un S -schéma localement de présentation finie. Soit \mathbf{C}^i , $i = 0, 1, \dots$, le S -foncteur défini par

$$\mathbf{C}^i(T) = C^i(S' \times_S T/T, G_T),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C}^i(T) = G((S' \times_S T/T)^{i+1}) = G((S'/S)^{i+1} \times T),$$

ou encore

$$\mathbf{C}^i = \underline{\text{Hom}}_S((S'/S)^{i+1}, G).$$

Comme \mathbf{Z}^1 est obtenu à partir de \mathbf{C}^1 et \mathbf{C}^2 par produits fibrés, il suffit de prouver que \mathbf{C}^i , $i = 1, 2$, est représentable par un S -schéma localement de présentation finie.

8.1.6. — Si $T \rightarrow S$ est un morphisme étale fini surjectif qui décompose S' , alors

$$\mathbf{C}^i \times_S T = \underline{\text{Hom}}_T((S' \times_S T/T)^{i+1}, G_T)$$

est représentable par un produit de n copies de G_T , où n est le degré de $(S'/S)^{i+1}$. Appliquant une nouvelle fois l'hypothèse sur G , on en déduit que \mathbf{C}^i est bien représentable par un S -schéma localement de présentation finie (SGA 1, VIII, *loc. cit.*).

8.1.7. — Pour prouver que \mathbf{Z}^1 est lisse, il nous faut maintenant, par définition, prouver que si T est un S -schéma *affine*, T_0 le sous-schéma fermé défini par un idéal \mathcal{J} de carré nul, l'application canonique

$$\mathbf{Z}^1(T) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(T_0)$$

404 est surjective. Comme G est lisse, l'application canonique $G(T) \rightarrow G(T_0)$ est surjec-

tive, et il suffit de prouver que l'application canonique

$$H^1(S' \times_S T/T, G_T) \longrightarrow H^1(S' \times_S T_0/T_0, G_{T_0})$$

est bijective.

Changeant légèrement de notations et généralisant les hypothèses, il nous suffit maintenant de prouver :

Lemme 8.1.8. — Soient S et S' deux schémas affines, $S' \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat, \mathcal{J} un idéal de carré nul sur S , S_0 le sous-schéma fermé qu'il définit, G un S -groupe lisse. Posons $S'_0 = S' \times_S S_0$, $G_0 = G \times_S S_0$. L'application canonique

$$H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S'_0/S_0, G_0)$$

est bijective.

Remarque 8.1.9. — Si on suppose G commutatif, la même assertion est valable pour tous les H^i , $i > 0$, avec une démonstration analogue.

Démonstration. Soit \mathcal{M}_0 le \mathcal{O}_{S_0} -module quasi-cohérent $\mathcal{M}_0 = \mathcal{L}ie(G_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}$. Pour chaque S_0 -préschéma T_0 , posons $M_0(T_0) = H^0(T_0, \mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0})$, et soient

$$M = \prod_{S_0/S} M_0 \quad \text{et} \quad \overline{G} = \prod_{S_0/S} G_0$$

les S -foncteurs en groupes définis par $M(T) = M_0(T_0)$ et $\overline{G}(T) = G_0(T_0)$, où $T_0 = T \times_S S_0$. D'après Exp. III, 0.9 et (0.6.2), il existe pour tout S -schéma affine T une suite exacte, fonctorielle en T : 405

$$1 \longrightarrow M(T) \longrightarrow G(T) \longrightarrow \overline{G}(T) \longrightarrow 1.$$

Nous avons à étudier l'application

$$H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S'_0/S_0, G_0) = H^1(S'/S, \overline{G}).$$

Supposons d'abord G commutatif. On a alors une suite exacte de cohomologie

$$H^1(S'/S, M) \longrightarrow H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S'/S, \overline{G}) \longrightarrow H^2(S'/S, M);$$

mais

$$H^i(S'/S, M) = H^i(S'_0/S_0, M_0) = H^i(S'_0/S_0, \mathcal{M}_0),$$

et on sait (TDTE I, B, Lemme 1.1), que $H^i(S'_0/S_0, \mathcal{M}_0) = 0$ pour $i \neq 0$.

Si maintenant G n'est pas commutatif, il nous faut utiliser la suite exacte de cohomologie non abélienne. Si $u \in Z^1(S'/S, G)$, on sait que les éléments de $H^1(S'/S, G)$ qui ont même image dans $H^1(S'/S, \overline{G})$ que la classe de u sont dans l'image de l'application cobord correspondante :

$$H^1(S'/S, M_u) \longrightarrow H^1(S'/S, G),$$

où M_u est le S -foncteur M « tordu par u ». De même, si v est un élément de $Z^1(S'/S, \overline{G})$, il existe un « cobord »

$$\Delta(v) \in H^2(S'/S, M_v),$$

où M_v est le S -foncteur M « tordu par v », tel que $\Delta(v) = 0$ si et seulement si la classe de v est dans l'image de $H^1(S'/S, G)$. Il nous suffit de prouver que l'on a $H^1(S'/S, M_u) = H^2(S'/S, M_v) = 0$.

406 Or rappelons (Exp. III 0.8) que l'opération de \overline{G} sur M définie par la suite exacte n'est autre que celle qui se déduit fonctoriellement de la représentation adjointe de G_0 :

$$\text{ad} : G_0 \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathcal{L}ie(G_0/S_0)).$$

L'élément u (resp. v) opère donc dans $M_{S' \times_S S'}$ par l'intermédiaire d'un $S'_0 \times_{S_0} S'_0$ -automorphisme de $\mathcal{L}ie(G_0/S_0)$. Comme u (resp. v) est un cocycle, cet automorphisme est une donnée de descente; notons \mathcal{L}_u (resp. \mathcal{L}_v) le \mathcal{O}_{S_0} -module quasi-cohérent obtenu. On vérifie aussitôt que pour $T \rightarrow S$, on a

$$M_u(T) = H^0(T_0, \mathcal{L}_u \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0})$$

et la même relation en remplaçant u par v . On a donc

$$H^1(S'/S, M_u) = H^1(S'_0/S_0, \mathcal{L}_u \otimes \mathcal{I}),$$

$$H^2(S'/S, M_v) = H^2(S'_0/S_0, \mathcal{L}_v \otimes \mathcal{I}),$$

et les deux sont bien nuls en vertu du résultat déjà utilisé.

Proposition 8.2. — Soient \mathcal{C} une catégorie possédant des produits fibrés, munie d'une topologie moins fine que la topologie canonique, $S' \rightarrow S$ un morphisme de \mathcal{C} , G' un S' -faisceau en groupes, G le S -faisceau en groupes $\prod_{S'/S} G'$. Soit $H_S^1(S', G') \subset H^1(S', G')$ l'ensemble des classes de faisceaux principaux homogènes sous G' qui sont trivialisés par un crible de S' obtenu par changement de base à partir d'un crible couvrant convenable de S . L'application canonique $H^1(S, G) \rightarrow H^1(S', G')$ définie par le foncteur

$$P \longmapsto P \times_S S'$$

407 induit une bijection

$$H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} H_S^1(S', G');$$

la bijection réciproque est définie par le foncteur $P' \mapsto \prod_{S'/S} P'$.

Pour tout objet X de \mathcal{C}/S , on a par définition un isomorphisme fonctoriel en X

$$\text{Hom}_S(X, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{S'}(X \times_S S', G').$$

On a donc pour chaque S -objet T une bijection fonctorielle en T

$$H^1(T/S, G) \xrightarrow{\sim} H^1(T'/S', G').$$

Remplaçant maintenant l'unique morphisme $T \rightarrow S$ par une famille couvrante quelconque de S et passant à la limite inductive, on en déduit la première partie de l'énoncé. La seconde partie s'en déduit sans difficultés.

Lemme 8.3. — Sous les conditions de 8.2, l'assertion $H_S^1(S', G') = H^1(S', G')$ est locale sur S : supposons qu'il existe une famille couvrante $\{S_i \rightarrow S\}$ telle que pour tout i , on ait $H_{S_i}^1(S' \times_S S_i, G') = H^1(S' \times_S S_i, G')$. Alors $H_S^1(S', G') = H^1(S', G')$.

En effet, soit P' un faisceau principal homogène sous G' . Posons

$$P'_i = P \times_{S'} (S' \times_S S_i);$$

en vertu de l'hypothèse, il existe une famille couvrante $\{S_{ij} \rightarrow S_i\}$ telle que pour chaque j , $P' \times_{S'} (S' \times_S S_{ij})$ possède une section. Mais $\{S_{ij} \rightarrow S\}$ est une famille couvrante de S , et P' est bien trivialisé par la famille couvrante de S' obtenue à partir de celle-là par changement de base.

Proposition 8.4. — Soit $S' \rightarrow S$ un morphisme étale fini de schémas. Soient G' un S' -faisceau en groupes, G le S -faisceau en groupes $\prod_{S'/S} G'$. Pour la topologie étale (resp. étale finie locale, resp. (fpqc)), les foncteurs

$$\begin{aligned} P &\longmapsto P \times_S S' \\ \prod_{S'/S} P' &\longleftarrow P' \end{aligned}$$

induisent des bijections réciproques l'une de l'autre :

$$H^1(S, G) \simeq H^1(S', G').$$

Par 8.2, il suffit de montrer que $H^1_S(S', G') = H^1(S', G')$. Par 8.3, il suffit de le faire localement pour la topologie étale finie locale ; on peut donc supposer que S' est une somme directe finie de copies de S , soit I_S , où I est un ensemble fini convenable. Alors G' est donné par une famille $(G_i)_{i \in I}$ de faisceaux sur S et

$$H^1(S', G') \simeq \prod_{i \in I} H^1(S, G_i).$$

D'autre part

$$H^1(S, G) \simeq \prod_{i \in I} H^1(S, G_i),$$

d'où, en vertu de 8.2, $H^1_S(S', G') = H^1(S', G')$. C.Q.F.D.

Remarques 8.5. — On peut interpréter 8.2 et 8.3 par la suite exacte suivante (f est le morphisme $S' \rightarrow S$ donné)

$$1 \longrightarrow H^1(S, f_*(G')) \longrightarrow H^1(S', G') \longrightarrow H^0(S, R^1 f_*(G')).$$

Dans le cas commutatif, cette suite exacte résulte de la suite spectrale de Leray ; elle est encore valable dans le cas non commutatif (cf. thèse de Giraud⁽⁴⁸⁾).

Sous cette forme, on voit que le résultat est encore valable si f est seulement supposé *fini*, ou simplement *entier*, la topologie étant la topologie *étale*, car pour tout G' , on a

$$R^1 f_*(G') = \text{faisceau final},$$

en vertu de SGA 4, VIII, 5.3.⁽⁴⁹⁾

D'autre part, ce résultat devient faux si on prend une topologie telle que (fpqc) ou (fppf), même si $S = \text{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, $S' = \text{Spec}(k[t]/t^2)$, $G' = \mu_p$ ou α_p .

⁽⁴⁸⁾N.D.E. : Voir le paragraphe V 3.1.4 de [Gi71].

⁽⁴⁹⁾N.D.E. : Cette référence renvoie également au paragraphe V 3.1.4 de [Gi71].

De même, 8.2 devient faux, même pour la topologie étale, si on y supprime l'hypothèse que f est fini, comme on le voit en prenant pour f une immersion ouverte ; par exemple si $S = \text{Spec}(V)$, V anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, S' étant l'ouvert induit au point générique, et G' le groupe constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{S'}$, avec n premier à la caractéristique résiduelle de V , on a $H^1(S, G) = 0$, $H^1(S', G') \neq 0$. Remplaçant d'ailleurs S' par $S \amalg S'$, on en déduit un exemple analogue, avec $S' \rightarrow S$ étale surjectif, donc couvrant pour la topologie envisagée.

Bibliographie

- [BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, Hermann, 1960.
- [Ch51] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*. t. II *Groupes algébriques*, Hermann, 1951.
- [Di57] J. Dieudonné, *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$* . VI, Amer. J. Math. **79** (1957), n°2, 331-388. ⁽⁵⁰⁾
- [Bo91] A. Borel, *Linear algebraic groups*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1991.
- [Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.
- [DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.
- [Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, 1971.
- [Ja87] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Academic Press, 1987 ; 2nd edition, Amer. Math. Soc., 2003.
- [Jou83] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Birkhäuser, 1983.
- [Ta75] M. Takeuchi, On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 249-275.

⁽⁵⁰⁾N.D.E. : On a ajouté à ces trois références, figurant dans l'original, les références qui suivent.